This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

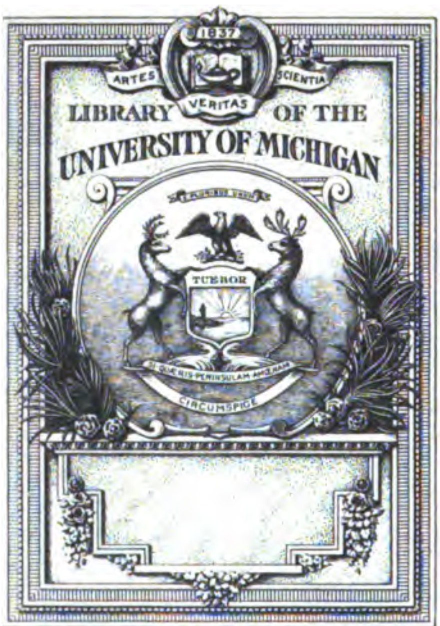
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
35
.K15m

53 2-24

MATHESIS THEORETICA ELEMENTARIS

ATQVE

SVBLIMIOR

IN VSVM

ACADEMICARVM PRAELECTIONVM.

AVCTORE

WENCESL. JO. GVST. KARSTEN,

PHIL. DOCT. ET LOG. PROF. P. O. IN ACAD. ROST.



ROSTOCHII ET GRYPHISWALDIAE,

APVD ANTON. FERDIN. RÖSEVM. 1760.

PRAEFATIO.

Inſtituti mei rationem diſplicere iis non poſſe mihi perſuadeo, qui de ſumma hodiernae Matheſeos perfectione et elegantia convicti ſunt. Quo pluribus inventis novis, quo pluribus inventionum methodis novis maxima admiratione dignis indies perficitur haec ſcientia: eo magis neceſſe eſt, ut praeſtantiſſimae hujus diſciplinae ſtudioſis opera, quam in eadem addiſcenda collocant, quantum fieri poteſt, ſublevetur. Non tantum Algebrae communis praecepta, ſed et immortalis memoriae virorum, LEIBNIZII et NEUTONI inventa, differentialium et integralium intelligo calculos, ſcitu prorſus neceſſaria ſunt omnibus, qui Analyſtarum hujus ſeculi prae caeteris eminentium ſcripta evolvere et practicarum hujus ſcientiae partium vel unius ſolida cognitione imbui laudanda flagrant cupiditate. Unicum FAMIGERATISSIMI HUJUS AEVI MATHE-

396293

MATICI, PERILL. EVLERI ſufficiet teſtimonium. „Quod *omnibus ſcriptis, quae ſine Ana-„lyſi ſunt compoſita*, id potiſſimum Mechanicis „obtingit, ut lector, etiamſi de veritate eorum „quae proferuntur, convincatur, tamen non „ſatis claram et diſtinctam eorum cognitionem „aſſequatur, ita ut easdem quaeſtiones, ſi tan-„tillum immutentur, proprio marte vix reſol-„vere valeat, niſi ipſe in Analyſin inquirat, „easdemque propoſitiones analytica methodo „evolvat.„ Quae verba leguntur in *Praefatione Tomi I. Mechanices*. Idem Summus Geometra ſub finem huius praefationis poſtulat, ut in Analyſi *tam finitorum, quam infinitorum* ſatis ſit exercitatus, qui omnia ab ipſo explicata intelligere et ſine manuductione hoc opus perlegere velit. Sed quid opus eſt teſtimoniis, cum ipſa res negari a nemine queat, qui animum adtendit ad omnia Doctorum hujus ſcientiae primae magnitudinis ſcripta, ad volumina celebrium, quae hodie florent, Academiarum et Societatum, et quae communem impendunt operam in perficiendis tam theoreticis quam practicis huius ſcientiae partibus. Quis unicum ejusmodi ſcriptum intelliget, niſi palmariorum univerſae Analyticae Artis, praceptorum imbutus jam eſt ſcientia. In numero eorum, qui in Academia noſtra Matheſin Elementarem me audierunt explicantem, ſemper ſelectiorem quendam inveni coetum ad ſubliniora quoque Matheſeos praecepta adſpirantem, atque in explicanda Analyſi Elemen-

tis

tis Analyſeos finitorum Perill. Segneri huc usque uſus ſum, cujus excellentis curſus mathematici tertium tomum fruſtra ſemper expectavi. Cum itaque idoneam et ſcopo meo ſatis facientem ad calculum differentialem et integralem manuductionem non inveni; univerſam Matheſin Theoreticam, tam Elementarem quam Sublimiorem, in unum ſyſtema ad diſcentium uſum collegi. Compendium enim Matheſeos Theoreticae, omnia quae huc ſpectant explicans, ad hunc usque diem in vulgus non prodiit. Autores Diarii Goettingenſis anni 1758. p. 138. cum Elementa Segneriana indicant, idem his verbis fatentur: *Der Nutzen dieſes Werks fællt deſto deutlicher in die Augen, da man in Teutſchland zur Analyſis kein anderes Lehrbuch als das Wolffiſche hat brauchen kœnnen, das in der That zu der Zeit, da es heraus kam, vor vierzig Jahren, von der damahligen Vollkommenheit der Wiſſenſchaft weniger entfernt war, als von der jetzigen, aber doch ſeit dem faſt die Aſymtote der analytiſchen Einſicht der meiſten teutſchen Profeſſoren der Mathematik geblieben iſt. Selbſt unter den Arbeiten der Auslænder, die bey uns ohne alzugroſſe Schwierigkeit zu haben ſind, hat keine dieſen Mangel vollkommen erſetzen kœnnen, da Clairauts Algebra nur Arithmetiſche Aufgaben, Maclaurin nichts von der Anwendung auf die gemeine Geometrie enthælt, und Neutons Arithmetica Univerſalis mehr eine Sammlung wohl gewæhlter Aufgaben, als eiu Lehrbegriff iſt.*

PRAEFATIO.

H. v. S. Bemühung kan den Lehrbegierigen, und denen, die ſich derſelben zu Vorleſungen bedienen wollen, Genüge leiſten, beſonders wenn die Rechnung des Unendlichen beygefüget iſt. Sed Analyſin Infinitorum et Geometriam Generalem publicare Perill. Dno. Segnero nondum placuit. Scriptum Maclaurini adeo prolixum eſt, ut ſolertiſſimi patientiam haud parum exerceat, atque tyronibus erudiendis inſervire plane nequeat. Praeſtantiſſima Analyſeos inventa per tot volumina tam prolixiora quam breviora ſunt diſperſa, ut difficillimum ſit, omnia pervolvere, atque ad conſenſum unius ſyſtematis colligere. Omnes inventionum methodos praecipue in differentialium & integralium calculo a me expoſitas eſſe ſpero, quæ ignorari debent a nemine, Recentiorum Analyſtarum ſcripta evoluturo. Nonnulla fortaſſe deſiderari poſſe a judice critico, non diffiteor, pleniorem ſcilicet expoſitionem doctrinæ ſerierum, inventionem termini ſerierum generalis et ſummatorii praecipue recurrentium, earum praeterea, quae ex infininitis componuntur factoribus, progreſſiorum. Sed anguſti limites temporis praelectionibus Academicis deſtinati, cum collegium, quod intra unius anni terminos non finitur, a Studioſo rariſſime frequentari, atque acerrimam quoque diſcendi ardorem valde debilitare ſoleat, a pluribus explicandis me coercuerunt. Ex eadem ratione in Geometria Sublimiori omnia ea, quae digna ſunt notatu, explicare non potui, quorſum v.

g.

g. pertinent problemata de iſoperimetris de linea braeviſſima in quavis ſuperficie et hujus generis alia. Spero autem fore, ut is, cui omnia, quae propoſui, ſatis ſunt familiaria, mira facilitate prolixiora volumina, quae indicatas doctrinas ex inſtituto proponunt, intelligere, atque in proprium uſum vocare queat.

Ea, quae §. 24. et 25. *Anal. Math.* de infinite parvi et infinite magni notione explicavi, ex genuina quidem multiplicationis et diviſionis notione, qua in Analyſi utimur, diſtincte ſatis deduci poſſunt. Pauca tamen hoc loco explicatis addam, quae diſtinctius forſan et uberius explicant eum, quem de infinito mathematico mihi formo, conceptum. Series reciproca, cujus terminus generalis eſt $\frac{1}{x}$, ita eſt comparata, ut ejus termini, ponendo loco x numeros in ordine naturali progredientes, ut, 1, 2, 3, 4, 5, etc. continuo decreſcant, ita quidem, ut cyphra, ſeu o, ſit terminus, ad quem fractio $\frac{1}{x}$ continuo quidem adpropinquat, quem tamen proprie nunquam adtingit, ponendo loco x numeros quantumvis magnos. Ipſe verò conceptus de hoc limite verus et realis eſt, nec ſola forſan chimera intellectus noſtri. Si denominator x certa lege creſcat, ipſa fractio $\frac{1}{x}$ hunc limitem actu attingere poteſt, quod v. g. evenit, ſi x denotet tangentem, ideoque $\frac{1}{x}$ cotangentem anguli A, eo caſu, quo angulus

A ſit recto aequalis. Ipſa vero fractio $\frac{1}{x}$ limitem $=$ o attingere non poteſt, niſi ſimul x adtingat limitem, ultra quem creſcere prorſus nequit. Quodſi enim aſſumatur, x ulterius augeri poſſe, ſi $\frac{1}{x}$ fuerit $=$ o, etiam ipſa fractio ulterius diminui et nihilo minor evadere poſſet, quod prorſus impoſſibile eſt. Quantitates negativas ſenſu maxime improprio nihilo minores vocari, oſtendit Magnus inter hodiernos Matheſeos Doctores Geometra, CEL. KAESTNERVS in *Arithm.* §. 95. Quod cum ita ſe habeat, extra omne dubium poſitum eſt aſſertum, quod denominator x adtingat limitem, ultra quem creſcere amplius nequit, ſi ipſa fractio limitem $=$ o adtingat. Atque ex his concludo ſequentes infinite parvi et infinite magni notiones. Infinite parvum eſt limes, ad quem quantitas decreſcendo perpetuo adpropinquat, quem vero non adtingit, quamdiu eſt determinata et aſſignabilis quantitas, ſed quocum quantitas eſſe deſinit. Infinite magnum eſt limes, ad quem quantitas continuo creſcendo perpetuo adpropinquat, quem vero non adtingit, quamdiu manet quantitas determinata, ſed quocum aſſignabilis eſſe deſinit.

Caeterum ſcientiae hujus dogmata mihi repetenda erant ex ipſis fontibus et ſcriptis originalibus tam VETERVM, quam RECENTIORVM immortalis memoriae Geometrarum, EVCLIDIS, ARCHIMEDIS, APOLLONII,

NIL THEODOSII, HAVSENII, SEGNERI, NEVTONI, EVLERI, KÆSTNERI, BERNOVLLIORVM, F. ÆPINI, CRAMERI, MACLAVRINI, D'ALEMBERT, aliorumque, qui horum inventa partim collegerunt, partim ipſi novis inventis et inventionum methodis hanc ſcientiam amplificarunt: „Praeparandus ad op„timorum lectionem per Inſtitutiones animus „juvenilis eſt: quod admodum inepte ſit, ſi „poſtquam vix prima principia, tanquam di„ſtans aliquod lumen obſcure perſpexit, a do„ctore deſeretur.„ Ita PERILL. SEGNERVS in Praef. ad *Analyſin Finitorum*. Hanc ob cauſſam omni ſtudio in id incubui, ut omnes inventionum methodi, quantum poſſibile erat, complete exponerentur, praeſertim in integralium calculo, quo abſtruſiſſimae quaeſtiones et problemata omnium intricatiſſima adeo felici ſolvuntur ſucceſſu, et quo fere ſolo ſcientiae Phyſico-Mathematicae ad tantum evectae ſunt perfectionis faſtigium, ut excelſis hisce coloribus

. . . . Er überſteigt das Ziel erſchaffner Geiſter,
Findt die Natur im Werk, und ſcheint des Weltbaus Meiſter,
Er wiegt die inre Kraft, die ſich in Körpern regt,
Den einen ſinken macht, und den im Kreis bewegt.
Er ſchlägt die Tafeln auf von ewigen Geſetzen,

PRAEFATIO.

Die die Natur gemacht, und nimmer wird verletzen.

pingatur Mathematicus a ſeculi noſtri poëta, qui nominis ſui gloriam monumentis conſecravit ampliſſimis. Sed quamvis tanta calculus integralis recludat myſteria; tamen hoc ſolum non ſufficit, ſi integrare quis noverit formulam $ax^n dx$, quod problema in omnibus fere apud nos uſitatis Compendiis univerſum calculum abſolvit integralem. Baſis quidem totius calculi hoc problema eſt. Sed cui prodeſt fundus abſque aedificio eidem ſuperſtruendo. Integrum quidem hujus calculi ſyſtema ſecundum ſcopum mihi propoſitum condere et omnia, quae huc ſpectant, inventa nova explicare non potui. Sed ea ſaltem cuncta tali, qua fieri poterat, brevitate et perſpicuitate expoſita ſunt, quae genuinas complectuntur inventionum methodos.

Analyſin finitorum ab analyſi infinitorum ſeparare, et utramque ſigillatim tanquam peculiares ſcientias pertractare, ut vulgo fieri ſolet, conſultum eſſe non putavi. Sat multa Analyſeos, ut dicitur, finitorum, dogmata hac via vel debita univerſalitate et evidentia demonſtrari prorſus nequeunt, vel adeo prolixi calculo et tantis ambagibus erui debent, ut patientiſſimum fatigent. Methodum meam non improbabit, qui animum advertet ad ſententiam KÆSTNERI optimi hujus rei judicis in Progr. *Theorema Binomiale univerſaliter demonſtratum*, *Götting.* 1758, *p.* 5. - - „judica-

„bunt

„ſunt ex ſpecimine hoc idonei arbitri, annon „in tanta diſcendorum copia proficuum ſit, analyſin infinitorum, quamprimum eius principia demonſtrari poſſunt, ad contrahendas demonſtrationes multo alias prolixiores adhibere. - - „Neque offendere debet haec quae „videtur Analyſeos finitorum et infinitorum „commixtio; nam infiniti conſideratione, nequidem in elementari geometria carere nos „poſſe recte monuit EVLERVS.„ His addere mihi liceat eam rationem, quod utraque ſcientia prorſus iisdem utatur principiis, a primis univerſae Matheſeos axiomatibus pendentibus, quod praeterea utraque ſcientia non niſi in quantitatibus finitis earumqve ad ſe invincicem relationibus inveniendis occupata ſit. Falſum enim eſt, quod Analyſis finitorum ſola quantitates finitas conſideret, Analyſis autem infinitorum quantitatibus infinite parvis vel infinite magnis inveniendis inſerviat. Nec infinite magna nec infinite parva ſunt Matheſeos objectum, niſi quatenus ad quantitates finitas earumque ad ſe invicem relationes inveſtigandas conducunt, quod methodo ſatis evidenti a me demonſtratum eſſe credo in *Anal. Math. Sect. VI.* Continet haec tractatio vera et genuina differentialis et integralis calculi principia, potiſſimum, ſi dicamus quod res eſt, NEUTONO debita, talia quidem, quae ſola Analyſi ſunt domeſtica, atque ex ipſis calculi principiis repetenda. CELEB. MACLAURIN aliique inter Anglos Geometrae, quando haec omnia ad menſuras celeri-

leritatum, quibus continuum creſcit, vel decreſcit, revocare coeperunt, non tantum principia minus domeſtica in Analyſin introducunt; ſed et eidem ſimul omnem concinnitatem, quae in methodi brevitate conſiſtit, eripiunt.

Quia denique errores omnes evitare, etiam maxime circumſpecto valde eſt difficile; ſi Benignus Lector obſervaverit, me humani aliquid paſſum eſſe, ſatis confido ipſius aequitati, ut potius excuſaverit, quam valde carperit errorem, qui oculis forſan meis ſe non ſubduxiſſet, ſi omnia, poſtquam typis excuſa erant, attente perlegere potuiſſem. Mathematica ſcripta in regionibus noſtris perquam raro typis excudi ſolent. Atque haec cauſſa eſt, cur durante typothetae opera cum litterarum minuſcularum, tum ſignorum defectu ſubinde laboraverit officina, ne dicam quod ipſi typothetae hoc genus ſcriptionis valde fuerit inconſvetum. Quare ab omnibus mendis purgare hoc opusculum fere impoſſibile fuit, quamvis omnis eum in finem cura adhibita ſit. Sub calcem hujus libri quasdam annotavi, integrum autem librum debita attentione perlegere non potui.

Vale B. L. mihique fave. Scribam Roſtochii Menſe Martio MDCCLX.

INDEX

INDEX
CONTENTORVM.

Geometria Elementaris.

Sectio I.

De lineis rectis et angulis planis rectilineis.

Sectio II.

De figurarum planarum et in ſpecie circuli perimetro generatim.

Sectio III.

De triangulis planis rectilineis et rectis parallelis.

Sectio. IV.

De parallelogrammis eorumque comparatione et inter ſe, et cum triangulis planis.

Sectio V.

De lineis rectis et angulis planis ad circulum relatis et circuli proprietatibus, quae inde pendent.

Sectio VI.

De comparatione extenſorum geometrica generatim.

Sectio VII.

De figurarum planarum rectilinearum ſimilitudine.

Sectio VIII.

De comparatione figurarum planarum, et quae hinc pendent, problematum planorum conſtructionibus.

Sectio XI.

De planorum atque rectarum linearum in reſpectu ad diverſa plana ſitu.

Sectio X.

De planis ad ſuperficiem ſphaerae relatis et ſphaerae proprietatibus, quae inde pendent.

Sectio XI.

De angulis ſolidis generatim et in ſpecie de triangulis ſolidis.

Sectio XII.

De figuris ſolidis earumque ſuperficiebus.

Arithmetica Elementaris.

Sectio I.

De numeris eorumque ſignis generatim.

Sectio II.

Sectio II.

Algorithmus numerorum integrorum et fractionum decimalium.

Sectio III.

Algorithmus fractionum.

Sectio IV.

De problematum quorundam arithmeticorum, quae poportionum theoria nituntur, ſolutione.

Sectio V.

Brevis introductio in Arithmeticam practicam.

Calculus extenſorum.

Sectio I.

De menſuratione longitudinum et angulorum planorum rectilineorum, vulgo, de longimetria et trigonometria plana.

Sectio II.

De menſuratione ſuperficierum et ſolidorum, vulgo de planimetria et ſtereometria.

Analyſis Mathematica.

Sectio I.

De algorithmo ſpecioſo.

Sectio II.

De ſolutione problematum ſimplicium.

Sectio III.

De calculo analytico-trigonometrico.

Sectio IV.

De aequationibus non ſimplicibus puris.

Sectio V.

De aequationibus quadraticis non puris.

Sectio VI.

De quantis variabilibus et limitibus rationum.

Sectio VII.

De proprietatibus radicum in aequationibus, quae ſunt quadratica altiores.

Sectio VIII.

De ſolutione problematum determinatorum ſecundo ordine altiorum arithmetica.

Sectio IX.

De functionum, quae unam vel plures involvunt variabiles, palmariis quibusdam proprietatibus.

Sectio X.

Sectio X.

De ſolutione problematum indeterminatorum et doctrinae ſerierum principiis.

Sectio XI.

De ſolutione problematum indeterminatorum geometrica.

Sectio XII.

De ſolutione problematum non ſimplicium determinatorum geometrica.

Sectio XIII.

De ſectionibus angulorum et arcuum circularium.

Sectio XIV.

De inveſtigatione radicum aequationis impoſſibilium.

Sectio XV.

De calculo differentiali functionum unius variabilis algebraicarum.

Sectio XVI.

De uſu Calculi differentialis in doctrina ſerierum.

Sectio XVII.

De maximis et minimis functionum unius variabilis.

Sectio XVIII.

De uſu calculi differentialis in aequationibus reſolvendis.

Sectio XIX.

De methodo tangentium directa.

Sectio XX.

De integratione differentialium unius variabilis algebraicorum incomplexorum et uſu ſerierum in calculo integrali.

Sectio XXI.

De logarithmis et quantis exponentialibus.

Sectio XXII.

De quantis transcendentibns, quae a circulo pendent.

Sectio XXIII.

De reductione integralium ad hyperbolae et circuli quadraturam.

Sectio XXIV.

De integratione differentialium algebraicorum unius variabilis complexorum.

Sectio XXV.

De integratione functionum unius variabilis transcendentium.

Sectio XXVI.

De calculo differentiali functionum, quae una plures involvunt variabiles.

Sectio XXVII.

De aequationibus differentialibus.

Sectio XXVIII.
De integratione functionum plurium variabilium et aequationum differentialium.

Sectio XXIX.
De integratione aequationum differentialium ſecundi et altiorum ordinum.

Sectio XXX.
De methodis quibusdam integrandi, quae ad aequationes differentiales primi et altiorum ordinum pari cum ſucceſſu adplicantur.

Geometria Sublimior.

Sectio I.
De ramis curvarum in infinitum extenſis eorumque aſymtotis.

Sectio II.
De diverſis linearum tertii ordinis ſpeciebus.

Sectio III.
De figuris curvarum in ſpatio finito.

Sectio IV.
De tangentibus et punctis multiplicibus curvarum.

Sectio V.
De curvatura curvarum.

Sectio VI.
De ſimilitudine, diametris et centris curvarum.

Sectio VII.
De inveſtigatione curvarum ex datis proprietatibus.

Sectio VIII.
De curvis tranſcendentibus.

Sectio IX.
De evolutione curvarum.

Sectio X.
De ſuperficiebus, ſolidis rotundis et curvis duplicis curvaturae.

GEOME-

GEOMETRIA ELEMENTARIS.

SECTIO I.

DE
LINEIS RECTIS ET ANGVLIS PLANIS RECTILINEIS.

§. 1.

Spatium quaquaverſum extenſum dicitur *Solidum* ſive *Corpus Geometricum*. *Superficies Geometrica* eſt extenſio ſolidorum ad terminos ſuos. Extenſio autem ſuperficierum ad terminos ſuos *Linea Geometrica* adpellatur.

§. 2.

Locus in extenſo ſimpliciſſimus, in quo ne mente quidem partes diſtingui poſſunt, eſt *Punctum Geometricum*.

COR. Termini linearum ſunt puncta, non autem lineae ex ejusmodi punctis ſunt compoſitae, nec ſuperficies ex lineis, vel ſolida ex ſuperficiebus; licet in linea, ſuperficie et ſolido ubique puncta concipi poſſint.

§. 3.

Linea, quae ubique ſecundum eandem directionem extenditur, *Recta* eſt: Linea autem, cujus nulla pars eſt recta, *Curva* vocatur.

COR. Quaelibet pars extenſa lineæ rectæ iterum eſt linea recta. Atque ſi data ſit directio unius partis lineæ rectæ, ſimul determinata eſt directio omnium ejusdem rectæ partium reliquarum, et totius rectæ quousque continuatæ.

§. 4.

Poſtulatur, *inter duo quaecunque puncta data rectam duci, et ductam utcunque prolongari poſſe.*

§. 5.

Si in ſuperficie utcunque ſumantur duo puncta, et recta, quae illa puncta connectit, tota cadat in ſuperficiem, quousque prolongetur, idque ſemper eodem modo contingat, ubicunque illa puncta ſumantur; *Superficies* vocatur *Plana*, ſive *Planum* ſimpliciter: *Curva* autem ſuperficies dicitur, cujus nulla pars plana eſt.

§. 6.

Superficies planae curvis ſunt ſimpliciores: ideo illae in Geometria prius conſiderandae veniunt, quam curvae. Hinc omnes lineae ſive rectae ſive curvae inpoſterum ducendae in eodem plano erunt concipiendae, donec expreſſe contrarium indicabitur.

§. 7.

Inter duo puncta data non niſi unica duci poteſt recta: et recta quaevis unico tandum modo verſus eandem partem prolongari poteſt. (§. 3. *cum Cor.*).

COR. Hinc per duo puncta data ſitus lineae rectae determinatur ita, ut pluribus rectis quocunque numero per eadem duo puncta ductis illae omnes in unam coincidant.

§. 8.

F. I. Duae rectae AB et AC diverſae in eodem plano ita duci poſſunt, ut idem punctum A ſit communis utriusque terminus. Situs duarum ejusmodi rectarum erga ſe invicem, quae idem punctum tanquam communem terminum agnoſcunt, *Angulus planus rectilineus*, punctum A vero, quod communis rectarum AB et AC terminus eſt,

eſt, *Apex* ſive *Vertex* hujus anguli dici ſolet. Ipſae rectae AB et AC vocantur *Crura* ſive *Latera* anguli.

§. 9.

Deſignatur ejusmodi angulus tribus litteris, quarum media apici adponitur, extremae autem lateribus, quae angulum comprehendunt. Saepe etiam una tantum littera indicatur apici adpoſita.

§. 10.

Intelligantur crura anguli BAC prolongari verſus oppoſitas partes ad D et E, quo facto ſeſe interſecant circa A ibique *communis eorum interſectio non eſt niſi unicum punctum.* (§. 7. Cor.). Quaevis vero recta ut EC planum in quo ducta eſt dividit in duas partes oppoſitas. Atque ſi in una earum partium ſumatur punctum quoddam D, in altera vero oppoſita punctum B; recta BD, quae haec puncta connectit, priorem EC, ſi opus eſt, productam certo in puncto quodam A ſecabit.

§. 11.

Res, quae pluribus partibus homogeneis conſtat, dicitur *Quantum* ſive *Magnitudo.*

COR. Omnis generis extenſa, ſolidum nimirum, ſuperficies et linea, ſunt quanta. Punctum autem Geometricum omnis magnitudinis eſt expers.

§. 12.

Quanta dicuntur *aequalia*, quae quoad multitudinem partium pro ſe invicem poſſunt ſubſtitui; quae vero quoad multitudinem partium pro ſe invicem non poſſunt ſubſtitui, *inaequalia* vocantur. Aequalia eſſe quanta hoc ſigno = indicatur collocato inter eadem ſequenti modo A = B.

§. 13.

Quodlibet quantum eſt ſibi ipſi aequale.

COR. I. Totum aequale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumtis.

COR. II. Aequalia eidem tertio, ut et aequalia aequalibus, inter ſe ſunt aequalia.

§. 14.

Extenſa *congruere* dicuntur, quorum extrema, per quae terminantur, omnia coincidunt; quae proinde tota inter hos terminos coincidentes continentur.

F. 2. COR. I. Linea recta CD congruet ipſi AB, ſi puncto C puncto A impoſito et tota recta CD in rectam AB cadente punctum D coincidat cum puncto B.

F. 3. COR. II. Angulus CAD congruit angulo EBF, ſi apice A apici B impoſito et crure AD in crus BF cadente crus AC cadat in BE. Congruit angulus CAD angulo EBF, licet crura AD et BF, AC et BE ſibi non congruant.

§. 15.

Extenſa, quae ſibi mutuo congruunt, ſunt aequalia.

COR. Recta CD, quae congruit rectae AB, eidem eſt aequalis. Angulus CAD angulo EBF, cui congruit, aequalis eſt.

§. 16.

Lineae rectae et anguli plani ſibi non congruentes ſunt quanta inaequalia.

F. 2. COR. I. Recta CD congruens parti AB rectae EB eidem eſt inaequalis. Angulus EBF inaequalis eſt angu-
F. 3. lo GAD, ſi ejus parti CAD congruit.

COR. II. Angulus CAD angulo EBF aequalis eſt, ſi eidem congruit. Congruit autem angulus CAD angulo EBF, licet crura ſibi impoſita invicem non congruant (§. 14. Cor. 2.). Hinc duo anguli æquales eſſe poſſunt, licet eorum crura ſint inaequalia; et proinde magnitudo anguli non dependet a magnitudine laterum.

§. 17.

Lineae rectae et anguli plani, ſi aequales ſunt, congruunt inter ſe.

F. 2. COR. I. Si recta CD rectae AB eſt aequalis, et punctum C puncto A ipſa CD autem rectae AB imponatur, punctum D neceſſario cadit in B.

COR. II.

COR. II. Si angulus EBF angulo CAD eſt aequalis, F. 3.
apice B apici A impoſitô, et crure BF crurí AD, neceſſario crus alterum BE cadit in AC.

§. 18.

Quantum, cujus pars alteri cuidam quanto toti aequalis eſt, dicitur *majus*, et hoc, quod totum parti alterius eſt aequale, eodem *minus*. Duo quanta eſſe inaequalia indicatur hoc ſigno, >, cujus apex verſus quantum minus et apertura verſus quantum majus ſpectare debet.

COR. I. Recta CD congruens parti AB rectae EB F. 2.
eadem minor eſt. Angulus EBF minor eſt angulo GAD,
ſi ejus parti CAD congruit. F. 3.

COR. II. Pars minor eſt toto et totum qualibet ſua parte majus eſt.

COR. III. Majus vel minus uno aequalium etiam majus vel minus eſt altero; et tanto magis, quod majus eſt majore inaequalium, etiam majus eſt minore, et quod minus eſt minore inaequalium, minus eſt majore.

§. 19.

Differentiam duorum quantorum inaequalium hoc loco vocabimus eam partem, qua majus quantum excedit quantum minus: quantum vero, quod duobus aliis A et B ſimul ſumtis aequale eſt, *Summa* quantorum A et B appellabitur.

COR. I. Recta EB eſt ſumma rectarum EA et AB vel F. 2.
CD, recta vero EA eſt differentia rectarum EB et AB vel CD.

COR. II. Angulus DAC eſt ſumma angulorum DAB F. 4
et BAC, et angulus DAB differentia angulorum DAC et BAC, prouti BAC eſt differentia angulorum DAC et BAD.

§. 20.

Unum quantum alteri *Addere* eſt invenire eorum ſummam. *Subtrahere* unum ab altero eſt invenire eorum differentiam. Addenda eſt quanta A et B ſigno +

 indi-

indicatur collocato inter eadem hoc modo $A + B$. Quanto autem B ab alio A ſubtrahendo praefigitur ſignum − ſequenti ratione $A - B$.

COR. Quantum, a quo idem aliud ſubtrahitur, quod eidem ante fuerat additum, non mutatur; pariter ac illud quantum idem manet, cui idem aliud additur, quod ab eodem ante fuerat ſubtractum.

§. 21.

Aequalibus quantis additis aequalibus vel ab iisdem ſubtractis inveniuntur ſummae vel differentiae aequales.

COR. Hinc et aequalium quantorum dupla tripla etc. ſunt aequalia.

§. 22.

Si aequalibus addantur inaequalia, majus eſt, quod per additionem majoris provenit eo, quod poſt minoris additionem invenitur.

COR. I. Hic tanto magis ſumma additione majoris ad majus inventâ major eſt ea, quae invenitur additione minoris ad minus.

COR. II. Quanti majoris duplum triplum etc. majus eſt duplo, triplo, etc. minoris quanti.

COR. III. Aequalium quantorum partes dimidiae, tertiae etc. ſunt aequales. Si vero quanto ſunt inaequalia; pars dimidia, tertia etc. majoris major eſt parte dimidia tertia etc. minoris.

§. 23.

Si ab inaequalibus aequalia ſubtrahantur, majus eſt id, quod relinquitur poſt ſubtractionem a majori eo, quod poſt ſubtractionem a minori relinquitur. Si vero ab aequalibus inaequalia ſubtrahantur, minus relinquitur ſubtractione majoris eo, quod ſubtractione minoris relinquitur.

DEM. 1.) Si fuerit $A > B$ et $C = D$, erit aut $A - C < B - D$, aut $A - C = B - D$, aut $A - C > B - D$. Priori caſu foret $A - C + C < B - D + D$ (§. 22.) id eſt $A < B$ (§. 20. Cor.) et ſecundo caſu eſſet $A - C + C = B$

$-D+D$ (§. 21.) id eſt $A=B$; utrum *contra hyp.* 2) Si vero ſit $A=B$ et $C>D$, erit aut $A-C>B-D$ aut $A-C=B-D$, aut $A-C<B-D$. Priori caſu eſſet $A-C+C>B-D+D$ (§. 22. Cor. 1.) i. e. $A>B$, et ſecundo caſu idem ſequeretur ex §. 22. Utrumque vero iterum eſt *contra hypotheſin.*

§. 24.

Duo anguli DAB et CAB, vel plures quocunque numero, quibus crus unum AB et apex A communis eſt, vocantur *anguli contigui.* Quodſi crura AD et AC angulis contiguis non communia in eadem directione jacent, ita ut CD ſit linea recta; (quod brevibus indicatur dicendo, AD et AB *jacere in directum*) anguli DAB et CAB dicuntur *contigui ſuper eadem recta.* F. 4.

COR. Cum ſit BAC ſumma angulorum BAE et EAC, hincque $BAC = BAE + EAC$, porro angulus DAC ſumma angulorum BAC et DAB, erit et DAC ſumma angulorum $DAB + BAE + EAC$. Hinc omnium angulorum contiguorum, quotcunque ſint numero, ſumma eſt angulus, quem duo crura extrema ipſis non communia comprehendunt.

§. 25.

Anguli contigui DBA et ABC ſuper eadem recta DC inter ſe aequales vocantur *Anguli Recti*, et recta AB, crus eorum commune, rectae DC *perpendicularis* eſſe dicitur. Anguli recto inaequales vocantur *obliqui*, quorum quidem illi, qui recto ſunt majores, *obtuſi*, qui autem recto ſunt minores, *acuti* appellantur. Angulus rectus in ſequentibus brevitatis gratia littera R denotabitur. Differentia anguli acuti ab angulo recto (conf. §. 19. Cor. 2.) illius *Complementum ad angulum rectum* vocari ſolet. F. 5.

COR. Angulus, cujus crura in directum jacent, duobus angulis rectis aequalis eſt. (§. 24. Cor.)

§. 26.

Omnes anguli recti inter ſe aequales ſunt.

DEM. Si anguli ABC et EBF ſunt recti; producantur crura BD et BF verſus D et G. Tum vero crus BF imponatur cruri BC, ut puncta B coincidant, atque BG cadit in BD et BE aut cum BA coincidit, aut non. Si poſterius ſtatuatur, erit ABC = ABD, ABC > EBC, ergo ABD > EBC. Cum igitur EBC = EBD, foret ABD > EBD, quod impoſſibile eſt. Prius igitur ſtatui debet, et proinde anguli ABC et EBF ſibi congruunt (§. 14.) et aequales ſunt (§. 15.).

COR. Per idem punctum B in recta DC datum non niſi unica duci poteſt eidem rectae perpendicularis (§. 18.).

§. 27.

F. 6. *Anguli contigui ſuper eadem recta, quotcunque ſint numero et quantumvis ſint inaequales, ſimul ſumti duobus angulis rectis aequales ſunt.*

DEM. Omnium ejusmodi angulorum DAF, FAE, EAG, GAC, ſumma eſt angulus DAC, (§. 25. Cor.) qui duobus angulis rectis aequalis eſt. (§. 25. Cor.).

COR. I. Ex ſuppoſitione contrarii patet, duorum vel plurium angulorum contiguorum crura extrema in directum jacere, ſi eorum ſimul ſumtorum ſumma duobus angulis rectis aequalis ſit. Quodſi enim fuerit EAC + EAD = 2R, atque AC et AD non in directum; producatur CA verſus A usque ad M ut non CAD ſed CAM ſit linea recta, eritque EAC + EAD + EAM = 2R = EAC + EAD, et proinde EAD + EAM = EAD, quod contra (§. 18. Cor. 2).

F. 6. COR. II. Ducta recta AM, erit angulus MAC ſumma angulorum MAD et DAC, hinc quia DAC = 2R, erit angulus MAC, quem crura AM et AC ad partes figurae ſuperiores comprehendunt, duobus angulis rectis major.

COR. III.

COR. III. Tres igitur ſunt claſſes angulorum obtuſorum. Dantur anguli obtuſi duobus angulis rectis minores, majores, ut et iisdem aequales.

§. 28.

Differentia anguli duobus rectis minoris ab angulo duobus rectis aequali dicitur ejus *complementum ad duos rectos.*

§. 29.

Invenire anguli dati duobus rectis minoris complementum ad duos rectos

SOL. Si detur angulus FAC, producatur unum ipſius crurium AC verſus plagam eidem ad alteram apicis partem oppoſitam in D, (§. 4.) eritque angulus EAD quaeſitum complementum. F. 6.

DEM. Angulus EAD eſt differentia anguli EAC ab angulo DAC (§. 19. Cor. 2.) et angulus DAC duobus rectis aequalis eſt (§. 25. Cor.) ideo EAD eſt complementum anguli EAC ad duos rectos. (§. 28.)

§. 30.

Si ex eodem puncto A quaquaverſum (ſed in eodem plano, quod perpetuo ſubintelligitur §. 6.) *ducantur rectae* AB, AC, AD, AE, AF, *quotcunque; omnes anguli circa punctum* A *ſimul ſumti quatuor angulis rectis aequales ſunt.* F. 7.

DEM. Prolongata una earum verſus partem oppoſitam in G ſunt GAF + FAE + EAD = 2R et GAB + BAC + CAD = 2R (§. 27.) hinc ſumma omnium = 4R (§. 21.) = FAB + BAC + CAD + EAD + FAE, ob GAF + GAB = FAB.

COR. Hinc angulo plano rectilineo cuicunque ad verticem opponitur alius, qui eſt prioris differentia a quatuor rectis (§. 19.) qui ideo vocatur ejus *complementum ad quatuor rectos.* Dato igitur angulo quocunque ejus complementum ad quatuor rectos ſimul eſt cognitum.

§. 31.

Si recta ſecet aliam rectam, anguli ad verticem oppoſiti aequales ſunt.

F. 1. DEM. Si recta BD ſecet rectam CE in puncto A, eſt DAC + CAB = 2R et CAB + BAE = 2R (§. 27.) ideo DAC + CAB = CAB + BAE (§. 13. Cor. 2.) et DAC = BAE. (§. 21.)

COR. I. Si unus angulorum circa A eſt rectus, quilibet trium reliquorum eſt rectus: generaliter dato uno ex quatuor his angulis data eſt magnitudo cujuslibet reliquorum.

COR. II. Si ad aliquam rectam lineam EC, atque ad ejus punctum A duae rectae lineae DA, AB non ad easdem partes ſumtae angulos ad verticem DAE et CAB aequales fecerint, ipſae rectae lineae AD et AB erunt in directum. Nam DAE + DAC = 2R = DAC + CAB, ergo AD et AB ſunt in directum (§. 27. Cor. 1.)

SECTIO II.

DE FIGVRARVM PLANARVM ET IN SPECIE CIRCVLI PRIMETRO GENERATIM.

§. 32.

Lineae plures concurrere et ſuperficiem quandam planam undique terminare poſſunt. Omne extenſum undique terminatum ſenſu generaliori dicitur *Figura*: ſuperficies autem plana, undique terminata, *Figura plana* ſive *Figura* ſimpliciter, quia de figuris ſolidis et non planis ſermo non erit, donec contrarium indicabitur. Magnitudo figurae planae ipſius *Area* vocari ſolet.

§. 33.

§. 33.

Termini figurarum ſunt lineae, (§. 1.) quae vocantur *figurae latera*: et latera figurae ſimul ſumta conſtituunt ejus *perimetrum* ſive *peripheriam*.

§. 34.

Figura plana, cujus perimeter unica tantum vel duabus lineis rectis conſtat, eſt impoſſibilis: figura autem plana vel unica curva terminata poſſibilis eſt,

§. 35.

Figura plana ſolis lineis rectis terminata vocatur *rectilinea*; quae autem linea quadam curva vel pluribus curvis terminatur, *curvilinea*. Figura plana, cujus perimeter nec ſolis rectis, nec ſolis curvis conſtat, *mixtilinea* dici ſolet.

§. 36.

Figurae planae rectilineae perimeter tot conſtat angulis, quot ſunt latera, quae figuram undique terminant.

§. 37.

Figurae planae generatim et ſpeciatim rectilineae nomina ſortiuntur a numero laterum vel angulorum, quibus terminantur. Sic dicuntur figuræ *trilaterae*, *quadrilaterae* etc. vel *triangulares*, *quadrangulares* etc. vel uno nomine *triangula*, *tetragona*, *pentagona*, *hexagona*, *heptagona*, etc. prouti tribus quatuor, quinque, ſex, ſeptem &c. lateribus terminantur.

§. 38.

Figurae planae rectilineae plurium quam quatuor laterum generali nomine dicuntur *Polygona*. Figura plana rectilinea quatuor laterum vocatur *Quadrilaterum planum rectilineum* ſive *Quadrilaterum ſimpliciter*. *Triangulum planum rectilineum* vel *Triangulum ſimpliciter* eſt figura plana rectilinea trium laterum.

§. 39.

Figurae planae rectilineae perimeter pluribus quam duabus conſtat lineis rectis, quarum quaelibet cum adjacente efficit angulum quendam planum et rectilineum.

Inte-

Integra autem perimeter ejusmodi figurae conſiderari poteſt tanquam unica linea in ſe rediens, (§. 1.) quae cum proprie non ſit linea curva, nec recta, *linea fracta* vocari poteſt.

COR. Hinc quoque quaelibet pars perimetri figurae rectilineae, ſi non ſit unicum latus, vel pars unici lateris ejusmodi linea fracta eſt: et generaliter plures lineae rectae ſub angulis quibuscunque ad puncta ſua extrema connexae, licet non terminent undique ſuperficiem quandam, efficiunt lineam fractam.

§. 40.

Figura plana mixtilinea duo ſaltem habet latera, quorum unum eſt linea recta, et alterum curva. Quotcunque autem et hujusmodi figurae ſint latera, iterum perimeter figurae integra, ut una conſiderari poteſt linea (§. 1.) quae cum nec linea recta, nec curva, nec fracta ſit, ſed ex rectis et curvis ſimul tanquam partibus conſtet, *linea mixta*, vocari ſicque a reliquis diſcerni poteſt.

COR. Easdem ob rationes etiam quaelibet pars perimetri figurae mixtilineae, niſi ſit unicum latus, vel ejus pars, vel ex ſolis conſtet rectis, ad linearum mixtarum claſſem referenda eſt.

§. 41.

Quaelibet linea recta per aliquod punctum intra figuram planam quamcunque ducta ſi, quoad opus eſt, producatur, in duobus ad minimum punctis figurae perimetrum ſecat.

COR. Si igitur figura illa eſt rectilinea, recta deſcripto modo ducta duo ſaltem ipſius latera interſecat (§. 10.). Atque ſi figura fuerit triangulum eademque recta tranſeat per apicem unius anguli, ea neceſſario latus huic angulo oppoſitum, quoad opus eſt producta, ſecabit.

§. 42.

Diſtantia puncti a puncto eſt recta, quae puncta illa connectit. *Diſtantia puncti a recta* eſt linea ex puncto

ad

ad rectam perpendicularis. *Diſtantia rectae a recta* eſt diſtantia alicujus puncti prioris rectae a poſteriori.

§. 43.

Circulus eſt planum unica linea curva ABD terminatum, in quo aſſignari poteſt punctum C ab omnibus punctis curvae illud terminantis aequaliter diſtans. Punctum C dicitur *Centrum* non tantum ipſius plani ſed et curvae illud ambientis. Ipſa enim haec curva quoque *Circulus* dici ſolet. Adcuratius autem *Linea circularis* ſive *Peripheria ſtricte*, et planum quod ambit, *Planum circularis* diceretur; brevitatis tamen gratia inpoſterum ad utrumque denotandum nomen generale retinebitur. *Arcus* circuli eſt pars quaecunque peripheriae: recta vero duo quaecunque peripheriae puncta A et B connectens dicitur *chorda* circuli, et quilibet eorum arcuum ADB et AEB, in quos peripheriam dividit, arcus illius chordae vocatur. F. 8.

§. 44.

Recta quaevis a centro circuli ad peripheriam ducta ejus *Radius* et chorda per centrum circuli tranſiens ejus *Diameter* vocatur.

COR. I. Diameter circuli eſt radii duplum. Hinc radius quoque *Semidiameter* vocatur.

COR. II. Omnes radii et omnes diametri ejusdem circuli aequales ſunt.

COR. III. Omne punctum, cujus diſtantia a centro circuli minor eſt radio, cadit intra circulum; et omne punctum cujus diſtandia a centro eſt radio major extra eundem ſitum eſt.

§. 45.

Poſtulatur *dato centro et radio circulum deſcribi poſſe*.

§. 46.

A dato quodam puncto C poſitione arbitraria ducere rectam datae aequalem. F. 8.

SOL. et DEM. Data recta EF pro radio et puncto dato C pro centro aſſumto deſcribatur circulus (§. 45.).

Tum

Tum vero ex C ad peripheriae punctum quoddam D pro lubitu aſſumtum ducatur recta CD (§. 4.), quae recta CD erit rectae EF aequalis (§. 41. Cor. I.).

§. 47.

Datae lineae rectae aliam rectam addere vel hanc ab illa ſubtrahere.

F. 9. SOL. Si datae rectae CD alia AB ad partes C eſt addenda, vel ab eadem ſubtrahenda, centro C et radio AB deſcribatur circulus, qui rectam datam DC ſecabit in G, eritque DG differentia rectarum DC et AB quaeſita. Producatur DC verſus F (§. 4.) eaque peripheriam denuo ſecabit in F (§. 41.) quo facto erit DF ſumma rectarum DC et AB quaeſita.

DEM. Quia $DC + CF = DF$ (§. 19. Cor. 1.) et $CF = AB$ (§. 44. Cor. 2.) erit $DC + AB = DF$. Deinde quia $DC - CG = DG$ (§. 19. Cor. I.) et $CG = AB$ (§. 44. Cor. 2.), eſt $DC - AB = DG$.

COR. Eadem operatione quaelibet recta data AB alteri DE ex puncto dato C imponitur, ita ut ſit CG vel $CF = AB$.

§. 48.

Perimeter figurae planae perimetrum alterius figurae planae *ſecare* dicitur, ſi eidem ita occurrit, ut partes quaedam prioris intra et reliquae ipſius partes extra poſteriorem perimetrum cadant.

COR. Perimeter igitur unius figurae perimetrum alterius ſecat, ſi tranſit per punctum quoddam intra alteram et per punctum extra eandem ſitum.

§. 49.

Si duae figurarum planarum perimetri ſeſe ſecant, in duobus ad minimum punctis concurrere debent, ita ut duo iſta puncta utrique perimetro ſint communia.

COR. Hinc circulus tranſiens per punctum intra alium circulum et per aliud punctum extra eundem aſſumtum (*conf.* §. 44. Cor. 2.) in duobus ad minimum punctis eundem ſecat.

§. 50.

§. 50.

Plana circularia, quorum radii aequales ſunt, ipſa ſunt aequalia, et eorum peripheriae.

DEM. Centro enim unius centro alterius impoſito, ipſa plana et peripheriae ſibi mutuo congruunt.

COR. I. Congruentia ejusmodi circulorum non tollitur, utcunque etiam circa centrum commune gyrari concipiantur. Hinc circuli curvatura in omnibus ſuis partibus eſt eadem.

COR. II. Circuli commune centrum et unum tantum in peripheriis punctum commune habentes prorſus coincidunt.

§. 51.

Diverſi circuli, quorum peripheriae non coincidunt, punctum tamen aliquod commune habent, non idem habent centrum.

DEM. Si idem centrum haberent, peripheriae eorum non eſſent diverſae, ſed prorſus coincidentes (§. 50. Cor. 2.) quod *contra hyp.*

§. 52.

Circuli diverſi idem habentes centrum, nunquam poſſunt concurrere.

DEM. Si enim concurrerent, non eſſent circuli diverſi (§. 50. Cor. 2.)

§. 53.

Circulus cum alio concurrens ſed ita ut eundem non ſecet, illum *tangere* dicitur. Circulus igitur alium tangit, ſi cum eodem concurrens aut totus intra eundem cadat, aut totus extra eundem. Si prius circulus alium *intus tangere*, ſi vero poſterius, eum *extus tangere* dicitur.

COR. Circuli ſe mutuo ſecantes, vel tangentes, non habent idem centrum (§. 52.).

§. 54.

Circuli qui idem centrum habent, *Concentrici* vocantur: *Excentrici* vero, quorum centra ſunt diverſa.

COR. I.

COR. I. Circuli ſe mutuo ſecantes vel tangentes ſunt excentrici. (§. 50. Cor.)

F. 10. COR. II. Circuli concentrici diverſi, ut AD et BE, ſeſe nec ſecare nec tangere poſſunt: alias enim eſſent excentrici, *contra hyp.* Ideo ejusmodi circuli vocantur *Circuli Paralleli*; plani vero circuli majoris differentia a plano minoris, inter peripherias AD et BE contenta *Annulus*, a quibusdam VETERVM *Corona* dici ſolet.

COR. III. Ducto radio CA majoris circuli, pars ejusdem BA, quae cadit intra annulum, eſt magnitudinis conſtantis.

§. 55.

GEOMETRIA eſt ſcientia inveniendi mutuam dependentiam unius extenſi ab alio, omniumque dependentiam ab extenſis quibusdam ſimpliciſſimis. Omnium extenſorum ſimpliciſſimum absque dubio eſt linea recta, hinc geneſis lineae rectae in univerſa GEOMETRIA poſtulatur. (§. 4.)

§. 56.

Curvarum omnium ſimpliciſſimam eſſe circulum jam VETERES GEOMETRAE cenſuerunt, tam ob deſcriptionis in plano quocunque facilitatem, quam ob plurimas ipſius proprietates menti facile capiendas. Ideo quoque geneſin circuli dato centro et radio poſtularunt. (§. 45.). Praeter circulum vero dantur innumerabiles aliae curvae, quae omnes una cum areis atque ſolidis inde genitis ſunt GEOMETRIAE objecta. Ea GEOMETRIAE pars, quae non niſi geneſin lineae rectae et circuli nec ullius aliae curvae poſtulat, et proinde geneſin figurarum et ſolidorum ex combinatione lineae rectae cum circulo docet, dicitur GEOMETRIA ELEMENTARIS. Altera pars, explicans geneſin extenſorum, quae ſolius rectae et circuli combinatione generari nequeunt, GEOMETRIA SVBLIMIOR vocata eſt.

COR. Figurarum igitur planarum non aliae pertinent ad Geometriam Elementarem, niſi rectilineae omnes,

plana

plana circularia et curvilineae omnes, quae ſolis arcubus circularibus terminantur. Denique et figurae mixtilineae, ſed illae tantum, quarum termini ſunt rectae et arcus circulares. Incipiamus a rectilineis quarum ſimpliciſſimae ſunt triangula.

SECTIO III.

DE
TRIANGVLIS PLANIS RECTILINEIS ET RECTIS PARALLELIS.

§. 57.

Dato angulo datisque duobus lateribus conſtruere ejusmodi triangulum, in quo latera data datum angulum includant.

SOL. et DEM. Sit angulus datus ABC latera data D et E. Uni cruri AB ipſius ABC imponatur ex apice B unum datorum laterum BF = D: alteri vero cruri BC (quolibet horum crurium, ſi opus eſt, producto (§. 4.) imponatur ex apice B alterum datorum laterum BG = E. (§. 47. Cor.). Ducatur recta FG et triangulum FBG erit ſecundum praecepta data conſtructum. F. III

§. 58.

Perinde eſt, quanta ſint latera D et E in praecedente problemate. Si duo illa latera ſumantur aequalia, triangulum, quod oritur, duo latera aequalia habet, et triangulum *aequicrurum* vocatur, cujus *crura* nominantur duo latera ipſius aequalia, et tertium latus ejus *baſis*. Si latera FB et BG ſunt aequalia, quantitas tertii FG a quantitate anguli oppoſiti B pendet. Si hoc quoque reliquis fiat aequale, orietur triangulum, cujus omnia latera ſunt

aequalia, quod vocatur triangulum *aequilaterum.* Triangulum cujus omnia latera ſunt inaequalia, dicitur *ſcalenum.*

§. 59.

Triangula, quae aliquem angulum aequalem habent, et duo latera eum angulum comprehendentia aequalia, ipſa ſunt aequalia, et reliqua eorundem latera, et anguli, qui ab aequalibus lateribus comprehenduntur.

F. 12. DEM. Angulus A trianguli ABC ſit aequalis angulo D trianguli DEF et latus AB = DE, pariterque AC = DF. Impoſitus concipiatur apex anguli A apici anguli D ita ut AC cadat in DF, quo facto quoque AB cadet in DE (§. 17. Cor. 2.) punctum B vero in E et punctum C in F (§ 17. Cor. 1.) ideoque et recta BC in EF (§. 7.). Latus igitur BC lateri EF, angulus B angulo E, angulus C angulo F et triangulum ABC triangulo DEF congruunt (§. 14.). Eſt igitur BC = EF, B = E, C = F, et triangulum ABC = DEF (§. 15.).

§. 60.

In omni triangulo aequicruro anguli lateribus aequalibus oppoſiti aequales ſunt.

F. 13. DEM. Producantur crura AB et AC trianguli aequicruri ABC ultra baſin, et ſumto puncto D pro lubitu in parte producta unius AB centro A et radio AD deſcribatur circulus, qui alterum crus AC productum ſecabit in E ita ut jam ſit AD = AE (§. 44. Cor. 2.). Ducantur rectae CD et BE, quo facto in triangulis ADC et ABE eſt AB = AC et AD = AE, angulus A autem in utroque triangulo a lateribus aequalibus comprehenſus ſibi ipſi aequalis (§. 13.). Eſt igitur ABE = ACD, AEB = ADC et BE = CD (§. 59.), hincque porro in triangulis BDC et BCE latus BE = CD (Dem.), latus BD = CE (§. 22.) et angulus comprehenſus ADC = AEB (Dem.), quare et angulus EBC = DCB, unde ABE — EBC = ACD — DCB (§. 21.) hoc eſt ABC = ACB.

COR.

COR. Omne triangulum aequilaterum ſimul eſt aequicrurum, quare ejus anguli omnes inter ſe aequales ſunt.

§. 61.

Si in triangulo quodam duo anguli aequales ſunt; latera angulis aequalibus oppoſita ſunt aequalia. F. 14.

DEM. In triangulo ABC ſit ABC = ACB, ergo erit aut AB = AC, aut AB < AC, aut AB > AC. Ponamus ſecundum, et producatur AB verſus D, donec ſit BD = AC. Hoc facto ducatur CD, et in triangulis BDC et ABC erit BD = AC (conſtr.) BC = BC et DBC = ACB (hyp.), ideo triangulum ABC = DBC, contra §. 18. Cor. 2. Ponamus tertium, et pars ipſius AB erit lateri AC toti aequalis. Quaecunque autem pars ut BE pro tali ſumatur erit iterum BE = AC (hyp.) BC = BC et angulus ABC = ACB (hyp.) hincque triangulum ABC = EBC contra §. 18. Cor. 2. Primum igitur verum eſt.

COR. Triangulum in quo omnes anguli aequales ſunt, eſt aequilaterum.

§. 62.

Recta biſecans baſin trianguli aequicruri ducta per apicem anguli baſi oppoſiti ſimul biſecat angulum baſi oppoſitum, totum triangulum, et inſuper baſi eſt perpendicularis.

DEM. In triangulo aequicruro ACB per apicem anguli C baſi oppoſiti tranſeat recta CD ita ut ſit AD = DB, erit praeterea CA = CB *hyp.* et angulus A = B, (§. 60.) ideo triangulum CAD congruit triangulo CBD ita ut ſit angulus ACD = DCB, et ADC = BDC (§. 59.) hincque CD ipſi AB perpendicularis. F. 15.

§. 63.

Recta circuli chordam AB *biſariam ſecans atque per centrum tranſiens eidem chordae perpendicularis eſt et biſecat angulum a radiis ad chordae extrema ductis comprehenſum.*

DEM. In circulo AFBG, cujus centrum eſt C ducta ſit chorda AB, atque recta CG biſecet chordam AB in puncto D. Ducantur radii CA et CB ad extrema chordae AB puncta A et B fietque triangulum CAB aequicru-

 quicru-

quicrurum, quia CA = CB (§. 44. Cor. 2.), cujus baſis eſt chorda AB. Proinde recta CD non tantum chordae AB eſt perpendicularis; ſed biſecat ſimul angulum ACB a radiis CA et CB comprehenſum (§. 62.).

§. 64.

Recta quae baſin trianguli aequicruri biſecat eique perpendicularis eſt, tranſit per apicem anguli baſi oppoſiti, atque hunc angulum biſecat.

DEM. Si recta DE baſin biſecans ponatur eidem baſi eſſe perpendicularis non autem tranſire per apicem anguli baſi oppoſiti, poteſt tamen per medium baſeos punctum alia duci recta DC ſimul per apicem hujus anguli tranſiens. Sed haec perpendicularis eſt baſi (§. 62.) ad idem punctum D cum recta DE contra §. 26. Cor. Tranſit igitur recta baſin perpendiculariter biſecans per apicem anguli ACB et proinde eundem ſimul biſecat. (§. 62.).

COR. Recta quae chordam circuli biſecat eique perpendicularis eſt, per centrum tranſit et biſecat angulum a radiis ad chordae extrema ductis comprehenſum.

§. 65.

Circulus alium circulum non niſi in duobus punctis ſecare poteſt.

DEM. Circuli ſeſe ſecantes certo duo puncta habent
F. 16. communia (§. 49.). Sint puncta iſta A et B, atque ponatur et tertium aliquod punctum D ipſis commune eſſe. Ducantur chordae AB et BD, quibus bifariam ſectis in E et F perpendiculares per E et F tranſeunt per centrum utriusque circuli, quod igitur unicum eſt §. 10. quare circuli eſſent concentrici contra §. 53. Cor.

COR. Per data tria puncta determinatur ſitus et magnitudo circuli.

§. 66.

Recta biſecans angulum trianguli aequicruri baſi oppoſitum

poſitum ſimul biſecat baſin et ipſum triangulum, atque ad baſin eſt perpendicularis.

DEM. Recta CD biſecet angulum C baſi trianguli aequicruri ABC oppoſitum, eritque in triangulis ACD et DCB latus AC = BC, CD = CD et praeterea anguli apud C aequales, (hyp.) ideo triangula ADC et DBC ſibi congruunt, ita ut ſit DB = AD, et anguli apud D aequales (§. 59.) proinde CD ipſi AB perpendicularis (§. 25.).

§. 67.

Producto latere quovis trianguli angulus extra triangulum a latere producto et adjacente comprehenſus major eſt utrolibet angulorum in triangulo eidem oppoſitorum.

DEM. Latus BC trianguli ABC productum ſit verſus D. Biſſectum intelligatur latus AC in E et BC in F. Ducantur BE et AF, eaeque producantur donec ſit EG = EB et FH = FA. Ducantur CG et CH, quo facto in triangulis ABE et EGC eſt AE = EC, BE = EG (conſtr.) AEB = GEC (§. 31.) quare angulus ACG = BAC (§. 59.). Sed eſt ACD > ACG (§. 18. Cor. 2.) ergo et ACD > BAC (§. 18. Cor. 3.). Deinde in triangulis ABF et FCH ex pari ratione eſt angulus BCH = CBA, quare producto quoque latere AC verſus I, cum ſi BCI > BCH, erit quoque BCI > CBA. Quia autem BCI = ACD, erit ACD > CBA. F. 17.

§. 68.

In omni triangulo major angulus opponitur lateri majori. F. 18.

DEM. In triangulo ABC ſit AC > AB, ideo pars quaedam lateris AC, quae ſit AD, aequalis erit lateri AB (§. 18.). Ducatur recta BD, quo facto eſt ABC > ABD, ſed ABD = ADB (§. 60.) hincque ABC > ADB. Sed ADB > C (§. 67.) ergo et ABC > C.

§. 69.

In omni triangulo majus latus opponitur angulo majori.

F. 18. DEM. In triangulo ABC ſit angulus $B > C$, eritque aut $AC = AB$, aut $AC < AB$, aut $AC > AB$. Si primum ſumatur, foret $B = C$ (§. 60.) ſi ſecundum; foret $C > B$ (§. 68.) utrumque contra hypotheſin. Ergo ultimum eſt verum.

§. 70.

Duo quaevis trianguli latera ſunt tertio majora.

F. 19. DEM. Producatur latus unum AB trianguli ABC donec ſit $AD = AC$, et erit angulus $D = ACD$ (§. 60.), ideoque $BCD > D$ (§. 18. Cor. 3.), quare $DB = AB + AC > BC$ (§. 69.).

COR. In omni triangulo aequicruro crus unum dimidio baſis majus eſt.

§. 71.

Si ſuper trianguli ABC uno latere BC a punctis extremis interius conſtitutae fuerint duae lineae rectae BD, CD in puncto D intra terminos trianguli ABC concurrentes, hae rectae reliquis duobus trianguli lateribus minores erunt, majorem vero quam illae angulum comprehendunt.

F. 20. DEM. Producatur una harum rectarum BD in E, atque erit $CE + ED > CD$ (§. 70.), proinde $CE + ED + BD > CD + BD$, id eſt $CE + EB > CD + BD$. Praeterea $BA + AE > BE$, et ideo $BA + AE + EC > BE + EC$, id eſt $BA + AC > BE + EC$. Cum igitur erat $BE + EC > CD + BD$, fiet $BA + AC > CD + BD$. Quod erat primum. Deinde eſt angulus $BDC > DEC$, et $DEC > A$, proinde $BDC > A$.

§. 72.

Si duorum triangulorum ABC, DEF, unum duo latera AB, AC, duobus lateribus alterius DE, DF aequalia habet, angulum vero A ab aequalibus lateribus comprehenſum majorem angulo EDF; etiam tertium latus BC prioris majus erit tertio latere EF poſterioris angulo minori oppoſito.

F. 21. DEM. Sit angulus $EDG = A$, et $DG = DF = AC$, tumque ducantur EG et FG. Quodſi jam

1) EG

1) EG cadit ſupra EF, ob AB = DE, AC = DG et A = EDG erit BC = EG, (§. 59.). Quia vero DF = DG, erit angulus DFG = DGF; et quia EGF < DGF, erit quoque EGF < DFG. Ideo ob EFG > DFG ſit angulus EFG > EGF et proinde EG vel BC > EF. Quodſi 2) EF cadat in EG, per ſe manifeſtum eſt fore EG vel BC > EF. Si denique 3.) EG cadat infra EF, erit DG + GE > DF + FE (§. 71.). Quia vero DG = DF, aequalibus hisce utrinque ſubtractis relinquitur GE vel BC > EF. F. 22.

§. 73.

Si duo triangula ABC et DEF duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF, aequalia habuerint, latus BC vero majus ſit latere EF, angulus A majori lateri oppoſitus major erit angulo EDF alterius trianguli ab aequalibus cum priore lateribus comprehenſo et minori lateri oppoſito.

DEM. Non enim eſt angulus A = EDF, quia foret BC = EF; nec A < EDF, quia foret BC < EF (§. 71.) utrumque *contra hyp.* Proinde eſt A > EDF. F. 22.

§. 74.

Datis tribus lateribus, quorum duo quaevis ſunt tertio majora, triangulum conſtruere.

SOL. et DEM. Sint data latera AB, C et D. F. 23.
Ex unius datorum laterum AB uno extremo A tanquam centro radio alterutro reliquorum C aequali deſcribatur peripheria GEH; ex altero extremo ipſius AB, nempe puncto B tanquam centro radio alteri laterum D aequali deſcribatur peripheria GFL, quae priorem ſecabit et quidem in duobus tantum punctis G et M. (§. 65.). Quodſi ducantur rectae AG et BG, vel AM et BM, erit triangulum AGB, vel AMB ſecundum praecepta conſtruendum. (§. 44. Cor. 2.).

COR. I. Si C = D, triangulum AGB erit aequicrurum. Dato autem C hoc caſu ſimul datur D, ideo triangulum

 aequi-

aequicrurum ſuper data qualibet baſi conſtruitur dato crure dimidio baſis majore.

COR. II. Si C = D = AB, triangulum ABG eſt aequilaterum. Ideo triangulum aequilaterum ſuper data qualibet recta conſtruitur, quia uno laterum dato dantur omnia.

§. 75.

Si duorum triangulorum tria latera ſigillatim ſumta aequalia fuerint, et ipſa triangula aequalia erunt, et anguli aequalibus lateribus interiacentes.

F. 24. DEM. In triangulis ABC et ABD ſit AC = AD,
F. 25. BC = BD et AB = AB. Crus unum alterutrius trianguli, quodcunque libuerit, ut AB imponatur cruri alterius AB ipſi aequali, ita vero ut angulus D hujus trianguli opponatur angulo C prioris. Hoc facto latera AC et AB aut jacent in directum aut non. Sit prius, atque triangulum CDB erit aequicrurum, proinde angulus C = D et ideo ex (§. 59.) conſtat propoſitum. Si AC et AD non jacent in directum, ducatur recta CD, quo facto ob ACD et BCD triangula aequicrura erit ACD = ADC, et BCD = BDC, hincque BCD + ACD = BDC + ADC (fig. 24) et BCD − ACD = BDC − ADC (fig. 25.) hoc eſt angulus ACB = ADB, ideoque triangulum ACB = ADB, ang. CAB = DAB et CBA = DBA (§. 59.).

COR. Datis ergo tribus lateribus determinantur et anguli trianguli, et ipſum triangulum, nec ſuper eadem recta ex iisdem lateribus eodem modo poſitis conſtruentur plura uno triangulo.

§. 76.

Ad datam lineam rectam datumque in ea punctum angulum conſtituere dato aequalem.

F. 26. SOL. et DEM. Ad punctum A rectae datae AB conſtituendus ſit angulus dato C aequalis. Sumantur in cruribus anguli dati C utcunque puncta D et E ductaque recta ED compleatur triangulum CDE (§. 57.). Fiat AF = CD et ſuper AF conſtruatur triangulum AGF,

in

in quo AG = CE et FG = DE (§. 74.) eritque angulus A = C (§ 75.).

COR. Eadem operatione invenitur ſumma duorum vel plurium angulorum datorum ut et duorum differentia.

§. 77.

Datum angulum in duos angulos aequales ſecare.

SOL. In cruribus dati anguli ABC ſumatur BD = BE ducaturque recta DE. Supra hac DE conſtruatur triangulum aequicrurum DEF (§. 74. Cor. 1.) ſumta magnitudine cruris arbitraria dummodo ſit majus dimidio baſis. Ex apice anguli F ad apicem B anguli dati ducatur recta FB, quae angulum ABC in duos angulos aequales ſecabit. F. 27.

DEM. Quia BD = BE et DF = EF (conſtr.) BF = BF, eſt angulus DBF = EBF. (§. 75.).

§. 78.

Per punctum in recta datum ducere aliam rectam priori perpendicularem.

SOL. et DEM. Data ſit recta AB in eaque punctum C Sumto puncto D utcunque in recta AB fiat CD = CE, tum vero ſupra DE conſtruatur triangulum aequicrurum DEF, quo facto recta per puncta C et F ducta ipſi AB erit perpendicularis (§. 62.). F. 28.

§. 79.

Datam lineam rectam in duas partes aequales ſecare recta eidem perpendiculari.

SOL. et DEM. Super data recta AB conſtruatur triangulum aequicrurum ACB, (§. 74. Cor. 1.) angulus C dividatur in duas partes aequales recta CD, (§. 77.) eadem et rectam AB in D bifariam ſecabit eique perpendicularis erit (§. 66.). F. 15.

§. 80.

In quovis triangulo ſumma duorum angulorum duobus angulis rectis minor eſt.

DEM. In triangulo ABC ſumma duorum angulorum quorumcunque ut CAB + ABC < 2R. Producto F. 29.

enim latere angulis illis interjacente in D eſt CAB < CBD (§. 67.) ideoque CAB + ABC < CBD + ABC (§. 22.) cum autem ſit CBD + ABC = 2R (§. 27.), eſt CAB + ABC < 2R (§. 18. Cor. 3.).

COR. I. In triangulo plures uno, anguli recti, vel plures uno anguli obtuſi, vel unus angulus rectus et unus obtuſus ſimul, ineſſe nequeunt.

COR. II. Si linea recta CA cum alia recta AD angulos inaequales faciat unum CAD acutum, et alterum CAF obtuſum perpendicularis CE ex quovis ejus puncto C ad aliam illam AD demiſſa cadet ad partes anguli acuti CAD.

COR. III. Omnes anguli trianguli aequilateri et duo anguli ad baſin trianguli aequicruri acuti ſunt.

COR. IV. Ab eodem puncto C extra rectum AD ſito ad eandem AD non niſi unica duci poteſt perpendicularis. Si enim CA et CE forent duae perpendiculares, in triangulo CAE duo anguli forent recti.

§. 81.

Triangulum, in quo unus angulus eſt rectus, vocatur *rectangulum*; tale, in quo angulus quidam eſt obtuſus, *obtuſangulum*. Triangulum in quo nec angulus rectus nec obtuſus habetur, cujus igitur anguli omnes ſunt acuti, vocatur *acutangulum*. Obtuſangula et acutangula triangula quoque generatim dicuntur *obliquangula*. In triangulo rectangulo latus angulo recto oppoſitum vocatur *hypothenuſa*, reliqua autem angulum rectum comprehendentia *catheti* dicuntur, quorum unum plerumque ſumitur pro *baſe* trianguli.

COR. In triangulo rectangulo hypothenuſa eſt latus maximum et in triangulo obtuſangulo id, quod angulo obtuſo opponitur (§. 69. et 80. Cor. 1.).

§. 82.

Si ab eodem puncto extra lineam rectam utcunque aſſumto ducantur ad eandem plures alias rectas, quotcunque libue-

libuerit; earum omnium minima eſt perpendicularis, et reliquae eo majores ſunt, quo magis a perpendiculari recedunt.

DEM. Si rectae CD recta AB eſt perpendicularis, et ex eodem puncto A ad CD ducatur alia recta quaecunque AE, erit triangulum ABE rectangulum, in quo AE > AB (§. 81. Cor.). Ducatur quaecunque alia AF magis a perpendiculari AB recedens, et triangulum AEF erit obtuſangulum, quia angulus AEF > ABF (§. 67.) quare eſt AF > AE (§. 81. Cor.). F. 30.

COR. Praeter unicam rectam AE nulla alia ex A duci poteſt ad CD ad eandem partem perpendiculi AB prius ductae AE aequalis. Quae enim intra crura anguli BAE cadunt, omnes recta AF ſunt minores, quae cadunt extra eundem angulum, ſunt recta AE majores.

§. 83.

Si ab eodem puncto extra lineam rectam aſſumto ducantur ad eandem una recta perpendicularis, et alia quaedam ſub angulo quocunque obliquo; ad alteram perpendiculi partem duci poteſt tertia priori obliquae aequalis.

DEM. Ex puncto A ad rectam CD cadat perpendicularis AB et alia AE obliqua. Fiat BG = BE et ducta AG erunt triangula ABG et ABE, ob angulos apud B aequales et latera comprehendentia aequalia, ſibi congruentia, et latus AE = AG. (§. 59.).

COR. I. Praeter hanc AG nulla alia ad eandem perpendiculi partem ex A ad CD duci poteſt recta priori AG aequalis (§. 82. Cor.). Hinc *generaliter plures duabus rectae inter ſe aequales ad rectam CD ex eodem puncto A duci nequeunt.*

COR. II. Ad *eandem partem rectae obliquae AE duci poſſunt* duae aliae invicem *aequales et recta AE minores*, quarum quidem una cadet intra angulum BAE, altera vero ad alteram perpendiculi partem intra angulum BAG.

COR. III. Ad eandem partem rectae obliquae AE *duci non poſſunt duae aliae rectae invicem aequales et recta AE majores*, quae enim inter angulum EAB cadunt rectae omnes eadem AE ſunt minores, et ideo quoque omnes, quae intra angulum BAG cadunt. Earum autem, quae magis a perpendiculo recedunt, et ideo recta AE majores ſunt, ſi una ſumatur, ut AF, altera huic aequalis cadit ad alteram perpendiculi partem verſus C, et proinde quoque ad alteram rectae AE partem.

§. 84.

Recta per punctum quoddam intra circulum ducta ſi producatur non niſi in duobus punctis peripheriae occurrit.

F.31. DEM. In circulo cujus centrum eſt D ducta ſit ejusmodi recta GF, concurrens cum peripheria in punctis G et F (§. 41.) eadem producta denuo concurrat cum peripheria in tertio puncto E, ducatur recta DE, quae erit radius, ideoque DF = DG = DE, contra §. 83. Cor. 1.

COR. I. Si ex puncto D radio DF, majore perpendiculo ex D ad EF deſcribatur peripheria, eadem ſecabit rectam EF non niſi in duobus punctis G et F, quorum utrumque ad eandem rectae DE partem cadit, ſi DF < DE: ſi vero DF > DE ad eandem rectae DE partem unum tantum horum punctorum cadere poteſt.

§. 85.

A puncto D extra rectam EF dato ad eandem ducere rectam perpendicularem.

F.31. SOL. et DEM. Ex dato puncto D ad rectam EF ducatur DG obliqua quaecunque atque radio DG deſcripto circulo, qui datam EF praeter G in F ſecat (§.84.), ducatur DF. Angulus GDF biſecetur recta DA, quae ipſi EF erit perpendicularis (§. 66.)

§. 86.

Dato angulo datisque duobus lateribus inaequalibus triangulum conſtruere, in quo laterum datorum majus ſit angulo dato oppoſitum.

SOL.

SOL. et DEM. Datus ſit angulus A, et praeterea latera B et C. Ad rectam indefinitam EF et punctum E in eadem pro lubitu aſſumtum conſtituatur angulus = A (§. 76.) in cujus uno crure ſumatur pars ED aequalis lateri minori B (§. 47. Cor.) tum vero centro D et radio C deſcribatur peripheria, quae rectam EF, ſi opus eſt productam, in duobus punctis quidem ſecabit, ſed eorum unicum tantum ad eandem cruris ED partem in F cadet (§. 83. Cor. 3.). Ducatur recta DF, quo facto EDF erit triangulum quaeſitum. F. 32.

COR. I. Si ſumatur ED > DF, duo illa puncta F et G interſectionis peripheriae cum recta EF ad eandem rectae DE partem cadunt. Ductis igitur DF et DG ex iisdem datis non determinatur triangulum unicum, ſed indifferenter duo triangula diverſa DEG vel DEF. His autem factis triangulum DGF eſt aequicrurum, ideoque DGF = F (§. 60.). Sed eſt DGE + DGF = 2R, hinc quoque DGE + F = 2R. In duobus igitur hisce triangulis eſt quilibet angulorum illorum, quorum apices non coincidunt, alterius complementum ad duos rectos. Hinc unus neceſſario acutus et alter obtuſus eſt. Si enim unus foret rectus et alter rectus eſſet, quod contra §. 80. Cor. 4. F. 33.

COR. II. Hinc porro concludi poteſt, ſi recta DF ſumatur aequalis perpendiculari ex D ad EF, iterum unum tantum determinari triangulum ita ut in eo caſu duo puncta G et F in unum coaleſcant. Sumta autem DF iſto perpendiculo minore ſolutio fit impoſſibilis, eo quod DF non attinget rectam EF, quia perpendicularis eſt breviſſima.

§. 87.

Duo triangula, quae unum angulum aequalem et praeterea duo latera angulum aequalem non comprehendentia aequalia habent, tota ſunt aequalia, ut et reliqui anguli et tertium latus, ſi latus angulo aequali oppoſitum majus eſt adjacente.

DEM.

F. 33. DEM. Habeant triangula ABC et AEF iſta requiſita, ut ſit angulus B = E, latus AB = AE, et AC = AF. Ponatur ABC in AEF ita ut punctum B in E et BC in EF cadat, quo facto latus BA in EA et punctum A in A cadere debet (§. 17. Cor. 1. 2.) praeterea vero aut AC cadit in AF aut minus. Poſteriori caſu ad eandem rectae AE partem ex A ad EF ductae ſunt duae rectae diverſae AC et AF recta AE majores et ſimul aequales contra §. 83. Cor. 3. Prius igitur eſt ſtatuendum, quare eſt angulus BAC = FAF, ideoque triangula ſibi congruunt, et angulus ACB = AFE, latus BC = EF (§. 59.).

COR. Omnia triangula rectangula, ut et obtuſangula in quibus anguli obtuſi aequales ſunt, ſi praeterea duo latera angulos rectos vel obtuſos non comprehendentia aequalia habent, ſibi congruunt, ita ut et reliqui eorum anguli aequales ſint, et reliquum latus aequale.

§. 88.

Si duae rectae lineae AB *et* CD *ſecentur a tertia quadam ita, ut angulus externus* EGB *interno* EHD *aequalis ſit; recta* AB *cum recta* CD, *licet verſus utramque partem quouſque libuerit producantur, concurrere nequit.*

F. 34. DEM. Quia eſt EGB = EHD, erit ſimul EGA = EHC. Concurrant igitur hae rectae vel verſus B et D, vel verſus A et C productae, atque orietur triangulum, in quo angulus externus lateri HG verſus E producto adjacens aequalis eſt interno oppoſito, quod eſt contra §. 67. Proinde nec verſus B et D, nec verſus A et C productae concurrere poſſunt.

§. 89.

Rectae in eodem plano ductae, quae non concurrere poſſunt, utcunque producantur, dicuntur *Rectae Parallelae.*

COR. I. Si EF ſecet rectas AB et CD ita, ut angulus externus EGB interno EHD aequalis ſit, rectae AB et

CD

CD ſunt parallelae (§. 86.). Duae igitur rectae eidem tertiae perpendiculares parallelæ ſunt.

COR. II. Per punctum G extra rectam CD datum ducitur alia AB ipſi CD parallela, ſumto puncto H quocunque in D et ducta HG, ad quam verſus E productam, conſtruatur angulus EGB angulo EHD aequalis.

§. 90.

Si recta EF *ſecet rectas* AB *et* CD *ita ut* 1) *anguli alterni* AGF *et* EHD *aequales ſint*, *vel* 2) *ſumma angulorum internorum* EHD + BGF = 2R; *recta* AB *et* CD *ſunt parallelae.*

DEM. Si primo AGF = EHD, erit ob AGF = EGB, ſimul EHD = EGB, ex quo patet, rectas AB et CD eſſe parallelas. (§. 89. Cor. 1.) Quodſi ſecundo ſit EHD + BGF = 2R, quia etiam BGF + AGF = 2R, erit EHD + BGF = BGF + AGF, et proinde EHD = AGF, atque rectae AB et CD parallelae (*per caſ.* 1.). F. 34.

§. 91.

Quodſi a puncto quodam A *rectae* EC *ad rectam* FD, *quae cum* EC *in eodem eſt plano, ducatur perpendicularis* AB *ita ut angulus* ABD *ſit rectus*, *atque hoc facto angulus* BAC *acutus et proinde* BAE *obtuſus ſit*: *omnes perpendiculares, quae a recta* EC *ad rectam* FD *duci poſſunt*, *erunt inaequales*, *et quidem verſus partes anguli acuti* BAC *decreſcent*, *verſus partes vero anguli obtuſi* BAE *creſcent*, *quo magis a perpendiculari* AB *decedunt.*

DEM. Quia eſt BAC angulus acutus, recta BG ex puncto B ad rectam EC perpendicularis ad partem hujus anguli acuti cadit, ita ut ſit GBD angulus acutus. Proinde et recta ex G ad FD perpendicularis ad partes anguli acuti GBD cadit (§. 80. Cor. 2.) atque hanc GH ipſa AB minorem eſſe ultro patet, Quia enim AB > BG, et BG > GH (§. 81. Cor.) erit et AB > GH (§. 18. Cor. 3.). Sumatur jam punctum aliquod Q, quod cadit intra puncta F. 35.

cta

cta A et G in recta EC et ducatur QR ad FD perpendicularis, erit QR < AB et QR > GH. Ductis enim rectis BQ et RG erit AQB > AGB proinde obtuſus et hinc AB > BQ, deinde BQ > QR, hincque AB > QR. Præterea cum et angulus QGR obtuſus ſit, erit QR > RG, RG > GH, proinde QR > GH. Simili modo patet, rectam AB majorem eſſe, quacunque alia normali qr inter AB et GH cadente, ſi punctum q puncto A quantumvis propinquum ſit. Tum vero iterum ſimili prorſus ratione patet, ipſam qr majorem eſſe ſequente normali QR, ſi etiam punctum Q puncto q quantumvis propinquum ſit. Ducta enim recta rQ, ea rectam BG ſecabit in p, ut pQG fiat triangulum apud G rectangulum. Proinde eſt pQG angulus acutus et pQA obtuſus. Hinc qr > rQ, rQ > QR, proinde qr > QR. Cum igitur ſic pergere liceat uſque ad GH, haec ipſa GH omnium earum, quae a termino A uſque G ad rectam FD cadunt perpendiculares, minima eſt.

Quia recta ex G ad FD perpendicularis ad partes anguli acuti GBD cadit, iterum angulus HGC acutus erit. Si igitur denuo ex H ad EC ducatur normalis HI, ea ad partes anguli acuti HGC cadit et angulus IHD erit acutus. Perpendicularis itaque ex I ad FD, nimirum IK, ad partes anguli acuti IHD cadit, et angulum KIC acutum efficit. Ita pergendo duci poſſunt perpendiculares KC, CD, etc. quae omnes ab AB magis recedent. Erit vero GH > HI, HI > IK proinde GH > IK. Porro IK > KC, KC > CD, proinde IK > CD. Sic argumentando quousque lubet pergere licet, atque tum eodem modo ut ante demonſtratur, omnes, quae cadunt inter GH et IK ex AC ad BD perpendiculares, ſibi invicem inæquales et eo minores eſſe, quo magis ad IK accedunt, ita ut IK omnium minor ſit. Idem argumentandi modus adplicatur ad perpendiculares inter IK et CD atque ſequentes omnes. Ex his igitur patet vera-

rim

primae partis illius, quae demonſtranda erat, propoſitionis.

Quod attinet ad perpendiculares, quae ex EC ad FD ad partes anguli obtuſi EAB cadunt; ſic ratiocinandum erit. Ex puncto A ad rectam EC erigatur perpendicularis, AL, quae intra crura anguli EAB cadet, atque rectam BF vel ſecabit, vel non. Si prius contingat, et interſectionis punctum ſit L, ex puncto L ſuper FB erigatur perpendicularis, quae iterum rectam AE in puncto quodam M ſecabit aut non. Contingat interſectio, atque ex puncto M ſupra AE erigatur perpendicularis MN. Sic ratiocinando pergatur, atque per N ducatur ad EB normalis NO, per O ad AE normalis OP, per P normalis PE, per E normalis EF etc. ubi ſemper ſupponitur, hasce normales utramque rectam EA et FB in punctis N, O, P, E, F etc. ſecare. Id quod ſi perpetuo contingat, fiet AL > AB, ML > AL, proinde ML > AB. Porro MN > ML, ON > MN, ergo ON > ML: ſimili modo OP > ON, EP > OP, proinde EP > ON, etc. F. 36.

Jam ſumatur punctum aliquod V puncto M valde contiguum atque ab eodem ducatur VX ipſi FB perpendicularis, et ducatur LV; erit MVL > MAL, proinde ML > VL, VL > VX, hincque ML > VX. Porro ſumatur aliud punctum S ipſi V quatumvis contiguum, et ex eodem ad FB ducatur perpendicularis ST; ſi jam ducatur SX, quae rectam AL in puncto quodam Z ſecabit; erit angulus ZSA acutus et hinc ZSM obtuſus. Proinde VX > SX, SX > ST, ideo VX > ST. Quoniam ita pergere licet, uſque ad AB, haec ipſa AB earum perpendicularium, quae inter ML et AB cadunt, minima, ML vero maxima erit. Idem argumentandi modus adplicari poteſt ad perpendicula inter ON et ML, inter EP et ON, et ſic porro cadentia.

Quodſi vero (quod in antecedentibus fieri ſupponitur) recta AL ad AE in A perpendicularis alteram BF non ſecet; ſumatur punctum S ipſi A utcunque contigu- F. 37.

 um,

um, atque ad BF ducatur perpendicularis ST et hoc facto etiam recta TA. Dico, angulum SAT neceſſario eſſe obtuſum. Quodſi enim SAT foret acutus, ipſa AL caderet inter AT et AB et ideo producta rectam BF ſecare poſſet, quia peripheriam trianguli ATB ſecat in apice A anguli TAB (§. 41. Cor.) quod contra hypotheſin eſt. Pari ex ratione angulus SAT nequidem rectus eſſe poteſt, quia alias AT in AL caderet, et producta rectam BF ſecaret contra hypotheſin. Eſt igitur SAT obtuſus, et proinde ST > AT, AT > AB, hincque ST > AB. Sumatur nunc aliud punctum V ab A magis quidem quam S remotum, ipſi vero quantumvis contiguum, atque ducatur VX ipſi BF normalis; erit ducta SX angulus VSX iterum obtuſus. Si enim VSX foret rectus, recta AL rectam BX ſecare poſſet, quia ſita eſt in figura quadrilatera SABX, cujus perimetrum ſecat in A, quod punctum tam in AS, quam in AB ſitum eſt, proinde AL cum hiſce rectis denuo non concurrit, neque etiam cum SX, quia poſita ſub hypotheſi cum eadem eſt parallela. Ergo AL producta ſecare debet BX, (§. 41. cum Cor.) quod eſt contra hypotheſin. Si angulus VSX foret acutus, fiet ASX obtuſus, et proinde nec hoc caſu AL cum SX concurreret (§ 80. Cor. 1.) ideo et hoc caſu rectam BX ſecare poſſet, contra hypotheſin. Angulus igitur VSX obtuſus eſt. Proinde VX > SX, SX > ST, hincque VX > ST. Sic ratiocinando progredi licet. Capiatur enim tertium perpendiculum YZ atque ducta VZ erit angulus YVZ obtuſus, quod eodem modo ut ante de angulo VSX demonſtratur. Proinde YZ > VZ, VZ > VX, ergo YZ > VX.

F. 36.

Quodſi AL quidem apud L ſecaret rectam BF, ſed vero LM cum AE non concurreret; omnia perpendicula ST, VX, etc. quae ex AE ad BF duci poſſent, inter puncta B et L cadere deberent. Quodſi enim unum eorum ut ON rectam BF in alio puncto N, extra interval-

lum

lum BL cadente, ſecet; orietur quadrilaterum ABNO, in cujus terminis LM ſita ſecaret latus BN et proinde adhuc aliud latus, quod eſſe deberet AE, quia ipſis AB et NO parallela eſt. Hoc autem aſſumto contrarium eſt. Omnia igitur perpendicula, quae ex AE ad BF duci poſſunt, inter puncta B et L cadunt, et proinde ducto perpendiculo ST quocunque ipſi AB propinquo, atque recta TA, fit SAT angulus obtuſus, et ideo $ST > AT$, $AT > AB$, proinde $ST > AB$. Capiatur punctum S magis ab A diſtans ab eoque ad BF ducatur perpendiculum ſequens VX, atque recta XS ſecabit rectam AL apud Z, ut fiat ZSA triangulum apud A rectangulum, in quo ZSA acutus ideoque ZSM obtuſus eſt. Ex quo erit $VX > SX$, $SX > ST$, proinde $VX > ST$. Similia ratiocinia adplicari poſſent ad omnia reliqua perpendicula, ſi LM non ſecaret rectam AE. Quodſi jam recta LM ſecaret rectam AE apud M, perpendiculum vero MN non ſecaret rectam BF; vel MN ſecaret quidem BF, NO autem non ſecet rectam AE, eodem prorſus modo ut ante demonſtrari poſſet, perpendicula verſus hanc anguli obtuſi CAB partem perpetuo creſcere, quo magis ab ML decedunt. Sicque etiam ſecunda propoſitionis demonſtrandae pars evidens eſt.

§. 92.

Quodſi ſupra rectam AB erigantur duo perpendicula aequalia AC et BD, atque eorum puncta extrema C et D connectantur recta CD, erunt anguli C et D recti.

DEM. Angulus C nec acutus nec obtuſus eſt. Si F. 38. enim C foret acutus, foret $BD < AC$: ſi C foret obtuſus, eſſet $BD > AC$, utrumque contra hypotheſin. Proinde C angulus rectus eſt. Pari ex ratione etiam D nec acutus eſt, nec obtuſus. Si enim D ſit acutus, foret $AC < BD$; ſi D obtuſus, eſſet $AC > BD$, quod utrumque contra hypotheſin eſt. Proinde et D angulus rectus eſt.

§. 93.

In quovis triangulo rectangulo ſumma duorum angulorum acutorum angulo recto aequalis eſt.

DEM. Si triangulum ABC fuerit apud A rectangulum, ex puncto B ad latus AB erigatur perpendiculum BD, quod fiat = AC. Ducatur CD, erit angulus D = R = ACD. Et quia in triangulis ABC et DBC apud A et D rectangulis habetur BC = BC, BD = AC, erit angulus ACB = CBD, ABC = BCD (§. 87. Cor.). Sed ABC + CBD = R, proinde et ABC + ACB = R.

COR. I. Hinc ſumma omnium angulorum trianguli rectanguli duobus angulis rectis aequalis eſt.

F. 39. COR. II. Quodcunque triangulum obliquangulum ABC in duo dividitur rectangula ABD et BDC, ſi ex apice anguli obtuſi B, ſi ſit obtuſangulum, vel cujuscunque pro arbitrio ſumti, ſi ſit acutangulum, ad latus oppoſitum AC ducatur perpendicularis BD (§. 80. Cor. 2.). Quia jam A + ABD = R, et C + DBC = R erit A + C + ABD + DBC = 2R, id eſt A + C + ABC = 2R. In quovis igitur triangulo ſumma omnium angulorum duobus angulis rectis aequalis eſt.

COR. III. Si latus quodcunque trianguli producatur erit angulus triangulo externus, quem latus productum cum adjacente comprehendit, aequalis ſummae duorum internorum eidem in triangulo oppoſitorum.

COR. IV. Si detur ſumma duorum trianguli angulorum A + B, erit tertius C = 2R − (A + B).

COR. V. Tres anguli cujusvis trianguli ſimul ſumti aequales ſunt tribus angulis ſimul ſumtis cujuscunque trianguli alterius.

COR. VI. Quodſi igitur in uno triangulo duo anguli aequales ſint duobus angulis in altero triangulo, etiam reliquus reliquo aequalis eſt. Atque ſi duo triangula unum angulum aequalem habent, reliquorum ſummae aequantur.

COR. VII

COR. VII. In omni figura rectilinea ſumma omnium angulorum aequalis eſt bis tot angulis rectis, quot ſunt figurae latera, demtis quatuor rectis. Intra figuram enim ſumi poteſt punctum quodcunque, a quo ſi ad omnium figurae angulorum apices ducantur rectae, obtinebuntur tot triangula, quod figura habet latera, ideoque bis tot anguli recti, a quibus autem auferri debet ſumma angulorum circa punctum in figura aſſumtum, quippe qui ad figuram non pertinent.

COR. VIII. In omnibus figuris rectilineis, quorum numerus laterum idem eſt, ſumma omnium angulorum ejusdem eſt magnitudinis.

§. 94.

Triangula, quae unum latus aequale habent, et duos angulos, tota ſunt aequalia, atque reliqua latera aequalia habent et reliquos angulos.

DEM. Si in duobus triangulis ABC et DEF duo anguli unius aequales ſint duobus angulis alterius, ſinguli ſingulis; etiam tertius prioris tertio alterius aequalis eſt (§ 93. Cor. 6.). Quodſi igitur fuerit latus $BC = EF$, angulus $B = E$, et $F = C$, erit $A = D$. Jam dico, etiam fore latus $BA = ED$. Ponatur enim BA non $= ED$, erit aut $BA > ED$, aut $BA < ED$. Si prius, erit $DE =$ parti ipſius BA, quae ſit BG ducaturque CG, et triangulum GBC congruet triangulo DEF (§. 59.) ita ut ſit $GCB = F = ACB$, quod contra §. 18. Cor. 2. Si poſterius, erit $BA =$ parti ipſius ED, ideo recta BA producta tandem fit $= ED$. Ponatur itaque $BH = ED$, ducaturque CH, iterum erit triangulum $HBC = DEF$ (§. 59.) et $HCB = F = ACB$ contra §. 18. Cor. 2. Ideo non poteſt non eſſe $BA = ED$, et proinde triangulum ABC triangulo DEF congruens (§. 59.). F. 40.

COR. I. Quodſi duo triangula ABC et GEF apud B et E rectangula cathetos BC et EF aequales habeant, angulus vero GFE major ſit angulo C, erit cathetus $GE >$

AB. Ad latus enim EF et punctum F conſtrui poteſt angulus $DFE = C$, cujus crus DF cadit intra crura FE et FG anguli GFE proinde intra terminos trianguli GFE, ideoque productum ſecat latus GE (§. 41. Cor.) in puncto quodam D intra G et E ſito, ut ſit $DE < GE$. Ob triangula vero ABC et DEF congruentia eſt $AB = DE$, proinde $AB < GE$.

II. 15. COR. II. Recta CD, quae ex apice C ducitur ad baſin AB trianguli aequicruri ABC perpendicularis, eandem biſecat. Quia enim in triangulis ACD et BCD anguli apud D aequales ſunt, et praeterea anguli A et B (§. 60.) latus $CA = CB$; triangula ACD et BCD ſibi congruunt.

COR. III. Recta per circuli centrum ducta, quae chordae ejusdem circuli perpendicularis eſt, eandem biſecat.

§. 95.

V. 81. *Si quantum aliquod DF minus fuerit alio quanto AB, atque quantum DF continuo ſibi ipſi addatur; tandem quantitatem ut DE, quae quanto AB major ſit, produci poſſe*, poſtulamus.

§. 96.

Duae rectae, quae a tertia quadam ita ſecantur, ut anguli interni ad eandem hujus rectae ſecantis partem poſiti ſummam duobus rectis minorem efficiant, concurrunt ad eas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores, ſi quoad opus eſt producantur.

V. 41. DEM. Quodſi recta AB ſecet duas alias AC et BD, atque ſit $CAB + ABD < 2R$, vel unus horum angulorum rectus erit, vel non. Sit primo unus eorum ut ABD rectus, eritque alter CAB acutus. In recta AC ſumatur punctum E quodcunque, ab eoque ad AB ducatur normalis EF. Fiat $FG = AF$, $GH = AG$, $HI = AH$, ſicque pergatur, donec inveniatur $AI > AB$, quod ſemper poſſibile erit (§. 95.). Deinde in recta AC fiat $EK = AE$, $KL = AK$, $LC = AC$, ſicque pergatur, donec in AC tot habeantur partes, quot ſunt in AI. Ducantur re-

ctae

ctae KG, LH, CI, etc. eaeque una cum FE producantur donec ſit EM = EF, KN = GK, LO = HL, etc. tum vero ducantur MK, NL, OC etc. atque triangula AFE et EMK, AGK et NKL, AHL et OLC etc. erunt congruentia ob angulos apud E, K, L, etc, aequales et latera comprehendentia aequalia. Proinde eſt MK = AF = FG, NL = AG = GH, CO = AH = HI et ita porro. Cum igitur anguli apud F et M ſint recti, et FG = MK; erunt et anguli G et MKG recti. Quia praeterea anguli G et N ſunt recti et GH = NL, etiam H et NLH recti ſunt, atque ob H et O rectos et HI = OC fiunt quoque I et OCI anguli recti (§. 92.). Oritur itaque triangulum AIC apud I rectangulum, intra quod cadit recta BD, quae proinde producta duo ſaltem hujus trianguli latera ſecabit. Quare cum ea latus AI ſecet, et latus IC ipſi parallelum (§. 89. Cor. 1.) ſecare non poſſit, ſecare debet rectam AC.

Quodſi jam neuter angulorum CAB et ABD ſit rectus; unus ſaltem eorum debet eſſe acutus quia ſi uterque obtuſus eſſet, eorum ſumma duobus rectis major eſſet, quod aſſumto eſt contrarium. Sit igitur ABD acutus, atque BAC vel acutus vel obtuſus erit. Et quia ABD + BAC < 2R et ABD + DBE = 2R, erit ABD + BAC < ABD + DBE, ideoque BAC < DBE. Ad BA in puncto A conſtruatur angulus BAF = DBE, atque AF ſupra AC cadet ob BAF > BAC, et recta AF ipſi BD ob angulum externum DBE aequalem interno BAF erit parallela. Ex A ad BD ducatur normalis AG, quae cadet ad partes anguli acuti ABD, atque angulus GAF ſit rectus. Si enim GAF foret acutus, recta AF cum GD concurrere poſſet (*per dem. caſ.* 1.) cum qua tamen parallela eſt. Si GAF eſſet obtuſus, GAH foret acutus atque FH concurreret cum DB verſus H et B, quae rectae vero ſunt parallelae. Proinde angulus GAF non poteſt non eſſe rectus. Cum igitur CAG < GAF, erit CAG angulus acutus, et proinde hoc quoque caſu AC producta F. 42.

cum recta GD concurrit. Quodſi AC non inter AF et AG, ſed inter AG et AB caderet, producta ſecaret rectam BG (§. 41. Cor.) proinde et hoc caſu veritas propoſitionis conſtat.

§. 97.

Dato latere datisque duobus angulis, quorum ſumma duobus rectis minor ſit, conſtruere ejusmodi triangulum, in quo anguli dati dato lateri adjacent.

F. 43. SOL. Si detur latus AB et anguli C et D, ad punctum A rectae datae ponatur angulus $A = C$, et ad punctum B angulus $B = D$. Producantur crura donec ſeſe in E ſecent.

DEM. Eſt enim $A = C$ et $B = D$ (*conſtr.*), cumque $C + D < 2R$ (*hyp.*) etiam erit $A + B < 2R$, quare rectae AE et BE ſeſe ſecando (§. 96.) triangulum quaeſitum terminabunt.

§. 98.

Dato latere et duobus angulis, quorum ſumma duobus rectis minor ſit, triangulum conſtruere, in quo unum datorum angulorum lateri dato adjacet, alterum vero eidem opponitur.

F. 44. SOL. Si detur latus AC et anguli D et F, quaeratur ſumma angulorum D et F (§. 76. Cor.) hujusque complementum ad duos rectos (§. 29). Inventum complementum $2R - (D + F) = E$ conſtituatur ad C (§. 76.) ad punctum A vero angulus D. Producantur latera, donec ſeſe ſecent in B.

DEM. Quia eſt $(D + F) < 2R$ et $2R - (D + F) = E$ (*conſtr.*) erit $E + D + F = 2R$, et $E + D < 2R$ quare rectae AB et CB ſeſe ſecabunt, (§. 96.) ac terminabunt triangulum ABC in quo $A = D$ (*conſtr.*) et $B = 2R - (A + C)$ (§. 93. Cor. 4.) $= 2R - (D + E) = F$.

§. 99.

Si duae rectae parallelae AB et CD ſecentur a tertia recta EF; erit ſumma angulorum internorum EHD et BGH ad easdem partes rectae ſecantis poſitorum aequalis duobus angu

angulis rectis; externus angulus EGB erit interno EHD, et AGF alterne poſito EHD aequalis.

DEM. Si foret $EHD + BGF < 2R$, rectae AB et CD ad partes B et D productae concurrerent et proinde non eſſent parallelae. Si vero ſit $EHD + BGF > 2R$, ob $EHD + BGF + AGF + EHC = 4R$, foret $AGF + EHC < 2R$, atque AB et CD verſus A et D productae concurrerent, ideoque iterum non eſſent parallelae, contra hypotheſin. Eſt igitur ſumma $EHD + BGF = 2R$. Praeterea quoque habemus $AGF + BGF = 2R$, ideo $AGF + BGF = EHD + BGF$, et $AGF = EHD$. Ex quo patet, ob $AGF = EGB$, fore etiam $EGB = EHD$. F. 34.

COR. I. Per idem punctum G extra rectam CD datum non niſi unica duci poteſt recta AB ipſi CD parallela. Quodſi enim praeter AB per G ducta foret IK ipſi CD parallela foret $KGF + EHD = 2R$ et $BGF + EHD = 2R$, proinde $KGF + EHD = BGF + EHD$, et $KGF = BGF$, pars aequalis toti, quod impoſſibile eſt.

COR. II. Hinc recta ſecans unam duarum parallelarum etiam ſecat alteram. Si enim AB fuerit ipſi CD parallela et EF ſecet rectam AB in G atque eadem producta non ſecat rectam CD, per idem punctum G ductae forent duae rectae diverſae eidem CD parallelae contra Cor. I.

COR. III. Recta igitur, uni duarum parallelarum perpendicularis, ſi producatur quoad opus eſt, etiam alteri perpendicularis erit.

§. 100.

Si duae lineae rectae AB et CD ducantur in eodem plano eidem tertiae EF parallelae, eaedem et inter ſe parallelae erunt.

DEM. Recta GH quae ſecat rectam EF in I, etiam ſecat ipſi parallelam CD in K, ut et alteram AB ipſi EF parallelam in L, (§. 99. Cor. 2.) ita quidem ut ſit $GLB = GIF$, et $GKD = GIF$ (§. 99.) ex quo apparet, eſſe $GLB = GKD$, et proinde rectam AB ipſi CD parallelam. F. 45.

§. 101.

Rectarum parallelarum diſtantiae a ſe mutuo omnes aequales ſunt.

f. 46. DEM. Si rectae AB et CD ſint parallelae atque EG fuerit diſtantia rectae AB in puncto E a recta CD, erit quaevis alia ipſius AB a CD diſtantia ut FH ipſi EG aequalis: Ducta enim recta EH, quia EG et FH quoque ſunt parallelae (§. 89. Cor. 1.) erit angulus HEG = EHF et FEH = EHG (§. 99.) quare triangula EHF et EHG ſibi mutuo congruunt, (§. 94.) eſtque EG = FH.

COR. I. Si duae diſtantiae EG et FH unius rectae AB ab alia CD in eodem plano ducta aequales ſunt, reliquae omnes aequales ſunt. Tum enim ſunt anguli FEG + EGH = 2R (§. 92.) et proinde AB et CD parallelae, hinc et omnes eorum diſtantiae aequales.

F. 47. COR. II. Si duae diſtantiae EF et GH unius rectae AB ab altera CD ſunt inaequales, reliquae omnes ſunt inaequales, atque rectae ſi producantur concurrunt ad eas partes ubi eſt diſtantia minor GH. Eſt enim angulus GEF non obtuſus, quia alias eſſet GH > EF (§. 91.) nec rectus, quia tum foret GH = EF, utrumque contra hyp. Proinde angulus GEF eſt acutus et ideo rectae verſus B et D concurrunt.

F. 48. COR. III. Omnia puncta E, F, G, quae ab aliqua recta aequaliter diſtant, ſunt in eadem recta. Si enim per duo eorum E et F ducatur recta AB, ea ſecabit diſtantiam GH tertii a CD vel in puncto G, vel in alio I. Si poſterius ſit, foret IH = FK = GH, quod imp.

SECT.

SECTIO IV.

DE PARALLELOGRAMMIS EORVMQVE COMPARATIONE ET INTER SE, ET CVM TRIANGVLIS PLANIS.

§. 102.

Si duae rectae AB et DC parallelae et aequales fuerint, atque earum puncta extrema connectantur rectis AD et BC, hae rectae AD et BC ſunt parallelae.

DEM. Ducta enim AC fiunt triangula ABC et ADC congruentia ob angulum BAC = ACD et latera comprehendentia aequalia. Ideo fiunt anguli ACB et DAC aequales, proinde rectae AD et BC parallelae (§. 90.). F. 49.

§. 103.

Ideo poſſibilis eſt figura quadrilatera, cujus duo quaevis latera oppoſita ſunt parallela. Ejusmodi quadrilaterum *Parallelogrammum* vocatur.

COR. Quadrilaterum igitur in quo duo latera ſibi oppoſita aequalia ſunt et parallela, eſt parallelogrammum.

§. 104.

In omni parallelogrammo duo quilibet anguli eidem lateri adjacentes ſimul ſumti duobus angulis rectis aequales ſunt. (§. 99.).

§. 105.

In omni parallelogrammo anguli oppoſiti aequales ſunt.

DEM. Sit figura BD parallelogrammum, et erit A + B = 2R = A + D (§. 104.) hincque B = D. F. 49.

COR. Si unus angulorum parallelogrammi eſt rectus; quilibet reliquorum eſt rectus. Si vero unus parallelogrammi angulus obliquus eſt; et reliqui omnes ſunt obliqui.

§. 106.

Parallelogrammum, in quo omnes anguli ſunt recti, vocatur *rectangulum*, cujus anguli autem obliqui ſunt, *obliquangulum* dicitur.

§. 107.

In omni parallelogrammo latera oppoſita ſunt aequalia.

DEM. In parallelogrammo BD ducta diagonali AC erit angulus BAC = ACD et BCA = CAD (§. 99.). Ideo triangula ABC et ADC ſibi congruunt ita ut ſit AD = BC et AB = DC. (§. 94.).

COR. Omne parallelogrammum a recta diagonali in duo triangula congruentia dividitur.

§. 108.

Dato angulo et duobus lateribus, quae angulum illum comprehendunt, conſtruere parallelogrammum.

SOL. Datus ſit angulus D et praeterea latera E et F. Fiat DA = E et DC = F et ducta recta AC ſuper eadem conſtruatur triangulum ABC, in quo AB = DC et BC = AD, quo facto erit quadrilaterum BD quaeſitum parallelogrammum.

DEM. Triangula ADC et ABC ſibi congruunt ita ut ſit angulus BAC = ACD et BCA = CAD (§. 75.) quare latera AB et CD, AD et BC ſibi ſunt parallela (§. 90.).

COR. I. Ex demonſtratione ſimul patet veritas hujus propoſitionis: Omne quadrilaterum, cujus latera oppoſita aequalia ſunt, parallelogrammum eſt.

COR. II. Si angulus D fuerit rectus, eadem operatione conſtruetur parallelogrammum rectangulum, (§. 105. Cor. et §. 106.).

COR. III. Si vero latera data E et F ſunt aequalia, conſtruetur parallelogrammum aequalium laterum.

§. 109.

Parallelogrammum aequalium laterum et rectangulum vocatur *Quadratum*. *Rhombus* autem eſt parallelo-

gram-

grammum aequalium laterum obliquangulum. Parallelogrammum obliquangulum inaequalium laterum vocatur *Rhomboides*, et parallelogrammum rectangulum inaequalium laterum ſimpliciter *Rectangulum* dici ſolet.

COR. Conſtructio Quadrati ex dato latere, Rectanguli ex datis duobus lateribus, Rhombi ex dato latere et angulo, et Rhomboidis ex dato angulo et duobus lateribus eum angulum comprehendentibus abſolvitur ope §phi 108. coll. cum §. 78.

§. 110.

Parallelogramma omnia, in quibus aequales anguli comprehenduntur a lateribus aequalibus, ſunt aequalia.

DEM. Congruunt enim inter ſe.

COR. I. Omnia Rectangula, in quibus duo latera angulum rectum comprehendentia aequalia ſunt, et omnia quadrata aequalium laterum ſunt aequalia.

COR. II. Quadrata inaequalium laterum ſunt inaequalia, ita ut quadratum ſit minus, cujus latera lateribus alterius minora, majus vero, cujus latera alterius lateribus majora ſunt.

COR. III. Aequalium quadratorum aequalia ſunt latera. Duorum autem quadratorum inaequalium majoris latera ſunt majora, et minoris minora.

§. 111.

Altitudo parallelogammi eſt diſtantia unius ejus lateris ab oppoſito. *Altitudo trianguli* eſt diſtantia apicis unius ejus angulorum a latere ei angulo oppoſito. Latera, ad quas altitudines referuntur, *baſes* dicuntur parallelogrammorum vel triangulorum.

COR. I. Si in rectangulo aliquod laterum ſumatur pro baſi, latus eidem adjacens erit altitudo (§. 101.): in quadrato autem, quodcunque latus pro baſi ſumatur, altitudo baſi aequalis erit.

COR. II. Omnia rectangula, quorum baſes et altitudines aequales ſunt, ipſa ſunt aequalia.

COR. III.

COR. III. Si triangula, quorum baſes ſitae ſunt in eadem recta, aequales habeant altitudines, recta quae tranſit per apices angulorum baſibus oppoſitorum, illi rectae, in qua baſes triangulorum ſitae ſunt, parallela eſt. (§. 101. Cor. 1.).

§. 112.

Quodlibet parallelogrammum obliquangulum aequale eſt rectangulo aequalis baſis et altitudinis.

F. 50. DEM. A punctis extremis B et C baſeos parallelogrammi obliquanguli BD erigantur perpendiculares BE et CF, atque producantur, donec baſin oppoſitam AD pariter productam ſecent in punctis E et F, eritque BF rectangulum (§. 105. 106.) ejusdem cum AC baſis et altitudinis, cujus latus BE aut latus DC parallelogrammi AC
F. 51. ſecabit, aut non. Si *poſterius* erit BE = CF et AB = DC (§. 105.) ideoque triangulum rectangulum ABE alteri DCF aequale, quare triangulo ABE ſubtracto ab AC et ejus loco addito DCF, erit rectangulum BF = AC (§. 21.). Si *prius*, iterum eſt BE = CF et AB = DC, hincque et triangulum ABE = DCF, quare utrinque ablato triangulo DGF et ejus loco BGC addito, hoc quoque caſu erit BF = AC (§. 21.).

§. 113.

Parallelogramma quaecunque aequalium baſium et altitudinum ſunt aequalia.

F. 52. DEM. Si parallelogramma ſunt rectangula, propoſitio patet ex §. 111. Cor. 2. Si unum eſt rectangulum et alterum obliquangulum, propoſitio vera eſt ex §. 112. Si denique propoſita fuerint duo parallelogramma obliquangula, AC et HK aequalium baſium et altitudinum, atque ex punctis extremis B et C baſis unius illorum erigantur perpendiculares BE et CF oppoſitae baſi AD ſi opus eſt productae occurrentes in punctis E et F; terminabunt hae rectae parallelogrammum rectangulum BF, cui parallelogrammum AC aequale eſt. Quare cum et

HK

HK eidem BF aequale ſit (§. 112.), erit etiam AC = HK.

COR. I. Si parallelogramma quaecunque ſuper eadem vel aequalibus baſibus in eadem recta ſitis conſtituta fuerint, et in eisdem parallelis ita, ut latera eorundem baſibus oppoſita cadant in rectam baſibus parallelam, erit et altitudo eorundem aequalis (§. 101. et 111.) proinde ipſa erunt aequalia.

COR. II. Dato parallelogrammo obliquangulo facile conſtruitur rectangulum, vel aliud quodcunque parallelogrammum ſub dato angulo ejusdem cum dato baſis et altitudinis, proinde dato aequale.

COR. III. Parallelogrammorum, ſi aequales habent altitudines, ſumma aequalis eſt parallelogrammo ejusdem illius altitudinis, et cujus baſis eſt baſium priorum ſumma.

§. 114.

Triangula aequalium baſium et altitudinum aequalia ſunt.

DEM. Si triangula ABC et DEF habent conditiones indicatas, lateribus AB et BC et angulo B comprehenſo compleatur pgr. BG, atque lateribus ED et EF et angulo E comprehenſo pgr. EH (§. 108.) erit pgr. BG = EH. Sed ABC = $\frac{1}{2}$BG et DEF = $\frac{1}{2}$EH (§. 105. Cor.) proinde eſt ABC = DEF (§. 22. Cor. 3.). F. 53.

COR. I. Idem de triangulis, quae ſuper eadem vel aequalibus baſibus conſtituta ſunt intra easdem parallelas verum eſt (§. 101. et 111.).

COR. II. Dato triangulo facile conſtruitur aliud ejusdem baſis altitudinis ſub angulo dato vel pro arbitrio ſumto quod dato proinde aequale fiet.

COR. III. Si triangula aequales habent altitudines et inaequales baſes, triangulum, cujus baſis major eſt, majus eſt eo, cujus baſis eſt minor: triangulorum vero, quae aequales baſes et altitudines inaequales habent, illud majus eſt, cujus altitudo eſt major. Si denique duo data

ta ſint triangula, quorum unius baſis major eſt baſe alt
rius et ſimul altitudo major altitudine hujus; prius tria
gulum poſteriore majus eſt. Hinc triangula aequal
aequalium baſium aequales habent altitudines.

COR. IV. Triangulorum aequalium altitudinum ſumn
aequalis eſt triangulo ejusdem illius altitudinis, et cuj
baſis eſt baſium priorum ſumma.

§. 115.

Si parallelogrammum et triangulum eandem habueri baſin, eandemque altitudinem, parallelogrammum triang duplum erit.

F. 54. DEM. Si parallelogrammum BD et triangulu EFG eandem habeant baſin et altitudinem, ducatur BD diagonalis AC, eritque BCA = ACD (§. 105.) ide que BD = 2ABC. Verum altitudo trianguli ABC aequalis altitudini parallelogrammi BD, cujus altitu aequalis eſt altitudini trianguli EFG, hinc et altitu triangulorum ABC et EFG eſt aequalis, ex quo ſequ tur eſſe triang. ABC = EFG (§. 112.) ergo eſt BD = 2EFG.

COR. Si triangulum cum parallelogrammo ſuper e dem vel aequalibus baſibus conſtitutum fuerit int easdem parallelas, idem ſequitur (§. 101. et 111.).

§. 116.

Dato triangulo ABC aequale parallelogrammum co ſtruere ſub dato angulo D.

F. 55. SOL. Per verticem A trianguli dati ducatur A baſi BC parallela (§. 89. Cor. 2.). Biſecetur BC in E atque EC in puncto E conſtituatur angulus FEC dato D aequ lis (§. 76.). Per C ducatur CG ipſi EF parallela, e factum, quod quaerebatur.

DEM. Eſt FC parallelogrammum (§. 103.) = 2AE (§. 115. Cor.) et triang. ABC = 2AEC (§. 112. et Cor. 4.). Ergo eſt FC = ABC. Praeterea angul FEC = D (*conſtr.*).

§. 11

§. 117.

Si in parallelogrammo BD ducatur diagonalis AC, et per punctum in eadem quodvis G rectae EF et HI lateribus parallelae, erit figura FI aequalis figurae GB.

DEM. Nam triangula ACD = ACB, CGH = F. 56.
CGF, atque AGE = AGI (§. 107. Cor.). Hinc aequalibus ab aequalibus ſubtractis relinquuntur figurae FI et GB aequales.

§. 118.

Ad datam rectam A conſtituere parallelogrammum aequale triangulo dato ABC ſub angulo D dato.

SOL. Dato triangulo ABC aequale parallelogram- F. 57.
mum FC in dato angulo D conſtruatur (§. 116.). Baſis EC parallelogrammi inventi producatur verſus H, et fiat CH = A. Per H ducatur recta lateri GC parallela, quae lateri FG producto occurret in I. Ducatur IC et producatur, donec cum latere FE pariter producto in K concurrat. Per K ducatur KL ipſi EH parallela, erit CL parallelogrammum, quod quaeritur.

DEM. Eſt enim CL = FC (§. 117.) = ABC (conſtr.) CH = A (*conſtr.*) et GML = FKL = FEC (§. 99.) = D (*conſtr.*).

COR. Hinc dato cuilibet triangulo aequale rectangulum conſtruitur ſuper qualibet recta data AB, ſumendo angulum FEC = D recto aequalem (§. 105. Cor.).

§. 119.

Ad datam rectam lineam FG conſtruere parallelogrammum FL aequale cuivis figurae rectilineae datae ABCD ſub angulo E vel dato vel pro arbitrio ſumto.

SOL. et DEM. Data figura rectilinea reſolvatur F. 58.
in triangula BAD, BCD. Fiat Pgr. FH = BAD ita ut ang. F = E. Producta FI ad HI applicetur Pgr. IL = BCD ſub eodem angulo E, erit Pgr. FL = FH + IL (§. 113. Cor. 3.) = ABCD.

§. 120.

In triangulo rectangulo quadratum hypothenuſae aequale eſt quadratis cathetorum ſimul ſumtis.

F. 59. DEM. Singulorum laterum trianguli ABC ad A rectanguli conſtruantur quadrata. Cum jam angulus BAC ſit rectus et BAK rectus, CA et AK jacent in directum (§. 27. Cor. 1.) et ob eandem rationem BA et AH cadunt in directum. Iungantur LC, AD, et per A ducatur AF ipſi BD parallela. Iam comparando triangula LBC et ABD, eſt AB = BL, BC = BD nec non ABD = ABC + R = LBC, quare triangulum ABD = LBC. Sed ABD = ½BGFD et LBC = ½LBAK (§. 115. Cor.) quare BGFD = LBAK. Eodem modo junctis BE, AI et conferendo triangula BCE, ACI, oſtenditur ACEH = GCIF, hincque BDIC = BGFD + GCIF = LBAK + ACEH (§. 21.).

COR. In triangulo rectangulo quadratum unius cathetorum aequale eſt differentiae quadrati alterius a quadrato hypothenuſae.

§. 121.

Si in triangulo quadratum unius lateris aequale eſt quadratis reliquorum ſimul ſumtis, angulus huic lateri oppoſitus eſt rectus.

F. 60. DEM. In triangulo ABC ſit BCq = ABq + ACq. Ducatur recta AD ipſi AC perpendicularis, et fiat AD = AB, ducta igitur CD erit CDq = ADq + ACq (§. 120.) = ACq + ABq = BCq (*hyp.*). Ergo eſt CDq = CBq et proinde CD = CB (§. 110. Cor. 3.) quare triangula BAC et DAC ſibi congruunt, eſtque angulus BAC = DAC (§. 75.) = R. (*conſtr.*).

§. 122.

Datis quotcunque quadratis unum omnibus aequale conſtruere.

F. 61. SOL. et DEM. Dentur quadrata tria quorum latera ſint AB, BC, CE. Ducantur duae rectae FB et BH ad angulos rectos ſeſe ſecantes in B. Cruribus anguli

guli recti B imponantur duo datorum laterum AB et BC, quaecunque ſint, et ducatur AC, erit ACq = ABq + BCq. Tum latus quadrati AC jam inventum transferatur ex B in G, et CE tertium latus datum ex B in E, quo facto, ſi ducatur EG, erit EGq = EBq (vel CEq) + BGq (vel ACq) = CEq + ABq + BCq.

§. 123.

Datis duabus rectis inaequalibus invenire quadratum, quo quadratum majoris excedit quadratum minoris.

SOL. Datae ſint AB et BC, quarum major ſit AB. F. 62.
Centro B intervallo BA deſcribatur circulus. Producatur AB, cui ad alteras centri B partes imponatur altera datarum rectarum BC. Ex C erigatur perpendicularis CE occurrens peripheriae in E, erit CE latus quadrati quaeſiti.

DEM. Ducatur enim BE, erit BE = BA (§. 44. Cor. 2) hincque BEq = BAq = BCq + CEq (120.) et ideo BAq - BCq = CEq.

SECTIO V.

DE

LINEIS RECTIS ET ANGVLIS PLANIS AD CIRCVLVM RELATIS, ET CIRCVLI PROPRIETATIBVS, QVAE INDE PENDENT.

§. 124.

Quaecunque linea recta ita circulo occurrens, ut eadem utrinque producta pars ejus intra circulum cadat, dicitur *Secans circuli*. Recta autem circulo occurrens, ſed ita ut eundem non ſecet, *Tangens circuli* vocata eſt.

COR. Recta circulum ſecans non niſi duo cum circuli peripheria puncta communia habet (§. 84.); hinc circuli peripheria per tria puncta in eadem recta poſita tranſire nequit.

§. 125.

Si recta quaecunque duo puncta cum circuli peripheria communia habet, pars ejus inter duo iſta puncta intercepta tota cadit intra circulum.

F. 15. DEM. Sit AB ejusmodi recta ejusque duo puncta A et B ſint in peripheria circuli. In parte iſtius rectae, quae cadit intra puncta A et B, ſumatur punctum quodcunque H et ducatur recta CH, praeterea quoque AC et CB, quo facto erit angulus CHB > CAB (§. 67.) ſed CAB = CBA (§. 60.) hincque CHB > CBA (§. 18. Cor. 3.) quare CB > CH (§. 69.). Punctum igitur H cadit intra peripheriam circuli (§. 44. Cor. 3.).

COR. Omnis igitur recta, quae duo puncta cum circulo communia habet, eſt ſecans circuli, et chorda quaevis tota intra circulum cadit. Hinc recta circulum tangens, tangit in unico puncto.

§. 126.

Per data tria puncta non in eadem recta ſita deſcribere peripheriam circuli.

F. 63. SOL. Data ſint tria puncta A, B, C. Ducantur rectae AB et BC. Biſſecentur eaedem rectis ipſis perpendicularibus DE et DF, (§. 79.) quarum punctum interſectionis D erit circuli quaeſiti centrum, et diſtantia hujus puncti a quolibet datorum punctorum ejus radius.

DEM. Ductis rectis DA, DB, DC oriuntur triangula ADE et BDE, in quibus AD = BD; praeterea triangula DBF et DCF, in quibus DB = DC (§. 59.). Ideo et AD = DC. Peripheria igitur centro D et diſtantia ejusdem ab uno datorum punctorum deſcripta, per data tria puncta tranſit.

§. 127.

§. 127.

Dati circuli diametrum et centrum invenire.

SOL. et DEM. Ducta chorda quacunque eaque recta eidem perpendiculari biſſecta (§. 79.) habetur diameter, ſi haec recta producatur, donec ad utramque ipſius partem peripheriae occurrat. Reperta hoc modo circuli diametro habetur centrum diametro biſſecta.

§. 128.

Duae circuli chordae ſeſe ſecantes, ſi non utraque tranſit per circuli centrum, ſeſe mutuo non biſſecabunt.

DEM. Ducantur primo duae ejusmodi chordae F. 64.
AB et CD, quorum una CD per centrum tranſeat, non vero altera AB et manifeſtum eſt, fore CF in = FD. Si nec CD tranſeat per centrum, ducatur recta EF per circuli centrum ad interſectionis punctum F. Quodſi jam eſſet AF = FB et CF = FD, foret EFD = R et EFB = R (§. 63.) quod contra §. 26. Cor.

§. 129.

Si in diametro circuli ſumatur punctum quodpiam a centro diverſum, ab eoque ducantur rectae quotcunque usque ad peripheriam; omnium earum maxima eſt ea pars diametri, in qua eſt circuli centrum, minima vero altera diametri pars. Reliquae omnes eo majores ſunt, quo maximae propiores ſunt, et eo minores, quo ab eadem ſunt remotiores.

DEM. In diametro AB ſumatur punctum D a centro C diverſum. Ducta ſit DE et praeterea radius CE eritque DC + CA = DC + CE > DE (§. 70.). Eodem modo oſtenditur rectam DA majorem eſſe reliquis omnibus. F. 65.

Deinde quoque ducta ſit DF, radius CF, ut et chorda EF, quo facto erit angulus CEF = CFE (§. 60.) ideoque DFE > CEF; et cum CEF > DEF erit DFE > DEF. Hinc DE > DF (§. 69.) quare DB eſt minima omnium.

§. 130.

Si duo circuli ſeſe intus contingant; recta, quae cadit inter eorum centra, producta in contactum circulorum cadit.

F. 66. DEM. Duo circuli ADE et ABC quorum centra ſunt F et G ſeſe intus contingant, et recta FG centra illa jungens producta ſecet circulos extra contactum, ſic ut non FGA ſed FGDB ſit linea recta. Ducatur ex G recta GA ad contactum, quo facto erit $GB < GA$, (§. 129.) ſed $GA = GD$, eſt igitur $GB < GD$, *quod imp.*

§. 131.

Si duo circuli ſeſe extus contingant, recta eorum centra connectens per contactum tranſit.

f. 67. DEM. Si AB jungens centra circulorum ſeſe extus tangentium per contactum non tranſit, cadere debet contactus extra AB, e. gr. circa C. Ducantur rectae AC et BC, quo facto erit $AC + CB = AE + BD < AE + ED + BD$ hincque $AC + CB < AB$ contra §. 70.

§. 132.

F. 66. *Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam in unico, ſive intus ſive extus eum tangat.*

DEM. Circulus ADE interius tangat circulum ABC et punctum A ſit in contactu. Quodſi ponatur praeter A dari adhuc aliud punctum contactus, hoc ita erit comparatum, ut, ducta recta GF per centra, ea cadat in punctum contactus A, ut et in aliud, quod praeter hoc aſſumitur (§. 130.). Sit igitur hoc alterum punctum E vel C, ita ut puncta E et C coincidant, eritque $CE > FE$, $FE = FA$ ideo $GF > FA$; ſed $GE = GA$, hincque $GA > FA$ *quod imp.*

Si circulus HIK extus tangat circulum ABC in duobus punctis H et I, ducaturque chorda HI ea in utroque circulo erit, quare circuli ſeſe ſecant (§. 48.) *contra hyp.*

§. 133.

§. 133.

In eodem circulo aequales chordae a centro circuli aequaliter diſtant: et chordae a centro in circulo eodem aequaliter diſtantes aequales ſunt.

DEM. Ex centro circuli E ducantur chordis AC et BD perpendiculares EF et EG, quo facto erit AF = FC et BG = GD. Ducantur praeterea radii EA et EB. Iam ſumatur F. 68.

1) eſſe AC = BD, et erit AF = BG (§. 22. Cor. 3.) ſed et EA = EB. Ergo FEq = EAq − AFq = EBq − BGq = EGq (§. 120. Cor.) quare eſt EF = EG. (§. 110. Cor. 3.

2) eſſe EF = EG; ergo eſt AFq = EAq − EFq = EBq − EGq = GBq, et AF = GB (§. cit.) proinde AC = BD (§. 21. Cor.).

§. 134.

Diameter eſt circuli chorda maxima.

DEM. In circulo ducta ſit diameter AD et praeterea chorda alia quaecunque BC, ad cujus extrema B et C ſi ducantur radii GB, GC erit GB + GC = AD > BC (§. 70.). F. 69.

§. 135.

Chordarum ejusdem circuli centro propinquior major eſt remotiore a centro.

DEM. Diſtantia GN chordae KL minor ſit diſtantia GI chordae BC a centro, erit GNq < GIq (§. 110. Cor. 2). Ductis vero GK et GB erit GKq = GBq (§. 44. Cor. 2. et §. 110. Cor. 1.) ideo GKq − GNq > GBq − GIq (§. 23.) id eſt KNq > BIq (§. 120. Cor.) ex quo porro ſequitur, eſſe KN > BI (§. 110. Cor. 3.) proinde KL > BC (§. 94. Cor. 3. et 22. Cor. 2.). F. 69.

§. 136.

Chordarum ejusdem circuli major minori intervallo a centro diſtat, quam chorda minor.

DEM. Chorda KL ſit major chorda BC, et ducantur diſtantiae GN, et GI, erit KN > BI (§. 94. Cor. 3. et §. 22. F. 69.

 Cor. 2.)

Cor. 2.) KNq > BIq (§. 110. Cor. 2.). Ductis vero radiis GK et GB, eſt GKq = GBq (§. 44. et 110. Cor. 1.) proinde GKq − KNq < GBq − BIq (§. 23.) id eſt GNq < GIq (§. 120. Cor.) et GN < GI (§. 110. Cor. 3.).

§. 137.

F. 15. Chorda AB circuli planum dividit in duas partes, quarum quaelibet, ut AFB vel AGB inter chordam et ejus arcum intercepta dicitur *Segmentum* circuli. Ductis vero duobus radiis CA, CB, pars plani circularis inter eosdem et arcum AGB vel AFB intercepta circuli *Sector* vocatur.

§. 138.

Ejusdem vel aequalium circulorum ſectores, quorum radii aequales comprehendunt angulos, ipſi ſunt aequales, et arcus, quibus terminantur.

F. 70. DEM. In circulis aequalibus dati ſint ſectores ABC et DEF, quorum anguli apud centrum BAC et D aequales. Imponatur ſector DEF ſectori ABC ita ut punctum D in A et recta DF in AC cadat, quo facto cadet DE in AB, punctum E in A et F in C (§. 17. cum Cor.). Si jam arcus EKF non cadat in arcum BGC, ſed aliter in BHC, ducto radio AH, foret AH = AB = AG (§. 44. Cor. 2.) quod impoſſibile. Congruit igitur ſector ſectori et arcus arcui.

COR. I. Duae ejusdem circuli diametri quarum una alteri eſt perpendicularis, circuli planum ut et ejus peripheriam in quatuor partes aequales ſecant, quae *quadrantes* vocantur. Arcus igitur inter crura anguli recti radio quocunque ex ejus apice tanquam centro deſcriptus quadrans eſt.

COR. II. Diameter circuli peripheriam et ipſum planum circulare in duas partes aequales dividit: et, ſi peripheria in duas partes aequales diviſa ſit, recta diviſionis puncta connectens, eſt diameter.

COR. III. Angulo in quotcunque partes aequales diviſo productisque lineis eum dividentibus, in totidem partes

tes aequales ſecatur arcus inter ejusdem crura ex apice tanquam centro radio quocunque deſcriptus.

§. 139

Arcum circuli quemcunque datum in duas partes aequales ſecare

SOL. Ducatur chorda AB arcus dati AGB, eaque bifariam dividatur perpendiculari FD (§. 79.) quae producta et arcum in G bifariam ſecabit. F. 15.

DEM. Recta FD tranſit per centrum C, et biſecat angulum ACB (§. 64. Cor.) hinc et arcum AGB (§. 138. Cor. 3.).

COR. I. Recta ex centro chordae perpendicularis biſecat arcum chordae utrumque.

COR. II. Ejusdem circuli arcus inter chordas parallelas intercepti ſunt aequales. Si enim chordae KL et BC ſunt parallelae; recta GN ex centro uni KL perpendicularis producta etiam alteri BC in I perpendicularis eſt (§. 99. Cor. 3.). Biſecat igitur arcum utriusque chordae, ita ut ſit KM = ML et BM = MC, proinde KM — BM = ML — MC (§. 21.) id eſt KB = LC. F. 69.

§. 140.

Sectores aequalium circulorum, quorum anguli ad centrum ſunt inaequales, ipſi ſunt inaequales, et eorum arcus ita quidem, ut ſector vel arcus ſectoris, in quo angulus ad centrum eſt major, quoque major ſit ſectore vel arcu ſectoris, in quo angulus ad centrum eſt minor.

DEM. Si angulus A in ſectore IACG major eſt angulo D in ſectore EDFK, ad radium AC in puncto A conſtituatur angulus BAC angulo D aequalis (§. 76.) hic erit pars anguli IAC (§. 18.). Crus igitur BA hujus anguli cadet intra crura anguli IAC, et punctum B, in quo arcus IGC ab hoc crure ſecatur, cadere debet intra puncta I et C, hincque ſector BACG eſt pars ſectoris IACG et arcus BGC pars arcus IGC. Sed vero ſector EDFK aequalis eſt ſectori BACG et arcus BGC arcui EKF, (§. F. 70.

 138.)

138.) proinde eſt ſector EDFK minor ſectore IACG, et arcus EKF minor arcu IGC (§. 18. Cor. 3.).

COR. I. Arcus inter crura anguli obtuſi radio quocunque ex ejus apice deſcriptus quadrante major eſt, et arcus inter crura anguli acuti quadrante minor (§. 138. Cor. 1.).

COR. II. Si arcus inter crura anguli plani ex ejus apice deſcriptus quadrans eſt, angulus eſt rectus, ſi major quadrante, obtuſus, ſi minor, acutus.

COR. III. In aequalibus circulis ſectorum aequalium anguli apud centrum ſunt aequales et eorum arcus.

COR. IV. Si arcus ſectorum aequalium circulorum aequales ſunt, etiam anguli ſectorum apud centrum ſunt aequales, et ipſi ſectores: ſi vero arcus ſunt inaequales, angulus ad centrum illius ſectoris, cujus arcus eſt major, quoque major eſt angulo ad centrum alterius ſectoris, cujus arcus minor eſt.

COR. V. Arcu inter crura anguli plani ex ejus apice radio quocunque deſcripto, eoque in partes aequales quocunque numero diviſo, ſi a punctis diviſionis ad anguli apicem ducantur rectae, in totidem partes aequales ſecatur angulus.

F. 53. COR. VI. Recta GF biſecans arcum circuli quemcunque AGB et tranſiens per centrum ſimul biſecat chordam AB hujus arcus eique eſt perpendicularis. Ductis enim radiis CA et CB biſecat angulum ACB, ideo quoque chordam AB et quidem ad angulos rectos (§. 66.).

§. 141.

Aequales chordae eosdem vel aequales circulos eorumque peripherias dividunt in aequalia ſegmenta et aequales arcus.

F. 70. DEM. In circulis aequalibus chordae BC et EF ſint aequales. Ducantur radii AB, AC, DE, DF, quo facto erit angulus BAC = EDF (§. 75.) hinc arcus BGC = EKF et ſector BACG = ſectori EDFK (§. 138.), proinde

inde demtis utrinque triangulis aequalibus erunt ſegmenta BGC et EKF aequalia. Quare et ſegmentum BMC aequale ſegmento ELF atque arcus prioris arcu poſterioris (§. 21.).

§. 142.

Dato circulo EFL accommodare chordam EF aequalem rectae cuidam BC datae, quae circuli diametro non major eſt.

SOL. et DEM. Puncto E in circuli dati EFL peripheria vel dato vel pro arbitrio aſſumto, ducatur diameter EP. Fiat EQ = BC, tum vero puncto E tanquam centro et radio EQ = BC deſcribatur circulus, qui datum circulum ſecabit in F et N (§. 65.). Ducatur EF vel EN, quae erit chorda quaeſita (§. 44. Cor. 2.).

COR. Hinc a data peripheria EFL auferri poteſt arcus EF aequalis dato arcui ejuſdem peripheriae, vel peripheriae BCM datae aequalis, ducta chorda BC arcus BGC dati et peripheriae EFL accommodata chorda FE chordae BC aequali.

§. 143.

In aequalibus circulis chordae aequalium arcuum ſunt aequales.

DEM. Si arcus BGC et EKF ſunt aequales, ducantur eorum chordae BC et EF, ut et radii AB, AC, DE, DF, quibus factis erit angulus BAC angulo EDF aequalis (§. 140. Cor. 4.) proinde et BC = EF. (§. 59.).

§. 144.

Duorum inaequalium arcuum ejuſdem vel aequalium circulorum, ſi uterque ſemiperipheria minor ſit, majoris chorda major eſt chorda minoris.

DEM. Si in circulis BMC et ELF arcus IGC major eſt arcu EKF, etiam angulus IAC major eſt angulo EDF (§. 140. Cor. 4.) praeterea eſt AI = DE, et AC = DE, ductis igitur chordis IC et EF erit IC > EF (§. 72.). F. 70.

Cor. I.

COR. I. Chorda igitur majoris arcus minori intervallo a centro circuli diſtat quam chorda arcus minoris (§ 136.) ſi uterque arcus ſemiperipheria minor ſit.

COR. II. Arcus chordae majoris major eſt arcu chordae minoris, ſi intelligantur arcus ſemiperipheria minores (§. 140. Cor. 4. coll. cum §. 73.).

§. 145.

Si in eodem circulo duae chordae comprehendant angulum, cujus apex ſit punctum in peripheria, et duo radii alium angulum, cujus apex ſit centrum circuli, praeterea vero anguli ipſi aequales ſint; arcus inter crura anguli ad peripheriam interceptus duplum eſt arcus, cui angulus ad centrum inſiſtit.

F. 71. DEM. Si in circulo AMH angulus MDN = BAC ducantur diametri EF, GH, cruribus AB, AC, anguli BAC parallelae, eritque figura AD parallelogrammum. Angulus igitur FDH = GDE (§. 31.) = BAC (§. 105.) = MDN (§. 13. Cor. 2.) et arcus FH = MN (§. 138.) Praeterea quoque FH = GE (§. cit.) et 2 FH = FH + GE, (§. 21.) ſed GE = GA + AE, GA = HC, et AE = BF (§. 139. Cor. 2.), proinde 2FH vel 2MN = FH + HC + BF = arcui BFNHC.

§. 146.

Angulus ad centrum aequalis eſt angulo ad peripheriam, qui inſiſtit arcui duplo majore eo, cui angulus ad centrum inſiſtit.

F. 72. DEM. Si arcus BEFC cui angulus ad peripheriam BAC inſiſtit eſt = 2EF, quod eſt duplum arcus, cui angulus ad centrum EDF inſiſtit, et angulus EDF inaequalis angulo BAC; ponatur alius angulus EDG ad centrum aequalis angulo BAC. Hoc poſito erit BEFC = 2EG (§. 145.) et BEFC = 2EF, (*hyp.*) hincque 2EG = 2EF et EG = EF, quod impoſſibile. Eſt igitur angulus EDF = BAC.

COR. I. Si angulus ad centrum et angulus ad peripheriam eidem arcui inſiſtunt; ille hoc, duplo major eſt.

COR. I

COR. II. Anguli ad peripheriam eidem arcui inſiſtentes aequales ſunt, ut et anguli in aequalibus ejusdem circuli ſegmentis.

COR. III. Angulus ad peripheriam eſt rectus, ſi ſemicirculo, obtuſus, ſi arcui ſemicirculo majori, et acutus, ſi arcui ſemicirculo minori inſiſtit. Hinc angulus in ſemicirculo eſt rectus, angulus in ſegmento ſemicirculo majore acutus, et angulus in ſegmento ſemicirculo minore obtuſus.

§. 147.

Ad punctum extremum lineae rectae date perpendicularem erigere.

SOL. et DEM. Ad punctum B rectae AB ſit erigenda perpendicularis. Sumatur punctum C utcunque extra rectam AB et radio CB deſcribatur peripheria, quae ſecabit rectam datam in D. Ducatur CD eaque producatur, donec peripheriae iterum in E occurrat. Ducatur EB, quae erit perpendicularis quaeſita (§. 146. Cor. 3.). F. 73.

§. 148.

Figura aequilatera eſt figura rectilinea, cujus latera omnia aequalia ſunt; *Figura aequiangula* dicitur figura rectilinea, cujus latera omnia aequales angulos comprehendunt. *Figura regularis* eſt figura aequilatera et aequiangula. Poſſibile igitur eſt triangulum, quadrilaterum, pentagonum, hexagonum etc. regulare. (conf. §. 37.).

§. 149.

Figura rectilinea *circulo inſcripta* eſſe dicitur et *circulus eidem circumſcriptus*, ſi apices omnium ipſius angulorum ſunt puncta in peripheria circuli.

COR. Quadrilateri ABHC circulo inſcripti anguli oppoſiti A et H vel B et C ſimul ſumti duobus angulis rectis ſunt aequales.

§. 150.

§. 150.

Dato circulo inſcribere polygonum regulare dati numeri laterum, conceſſa indefinita peripheriae diviſione.

F. 74. SOL. Inſcribendum ſit circulo octogonum regulare. Dividatur peripheria in tot partes aequales, quot figurae deſcribendae ſunt latera, uti hoc caſu in octo. Arcuum hoc modo inventorum ducantur chordae AB, BC, CD, etc. quae polygonum deſideratum terminabunt.

DEM. Latera polygoni deſcripti ſunt chordae aequalium arcuum (*conſtr.*) et anguli aequalibus arcubus inſiſtunt. Eſt igitur polygonum regulare (§. 143. 147. Cor. 2. et §. 148.).

COR. I. Aucto numero laterum polygoni deſcripti in duplum latera fiunt minora, et diſtantia laterum a centro circuli, cui figura inſcripta eſt, augetur (§. 144. cum Cor. 1.).

COR. II. Omne polygonum circulo inſcriptum minus eſt circulo, cui inſcribitur. Duplicato autem numero laterum ipſius minuitur differentia polygoni a circulo, nimirum ſumma ſegmentorum, quae latera polygoni a circulo abſcindunt; ita tamen, ut latera polygoni nunquam extra circulum cadant, nec polygonum circulo aequale evadat (§. 125. Cor.).

§. 151.

Dato circulo hexagonum regulare inſcribere.

F. 75. SOL. Dati circuli ducatur diameter AD, centro D eodem radio DG deſcribatur circulus datum ſecans in duobus punctis C et E (§. 65.). Per C et E ducantur diametri CF, EB et puncta ita terminata A, B, C etc. jungantur rectis AB, BC, CD etc. quae terminabunt hexagonum regulare quaeſitum.

DEM. Triangula CGD et DGE ſunt aequilatera et ſibi congruentia. Ideo ang. CGD = DGE (§. 75.) = AGF = BGA (§. 31.) = GDC = DCG (§. 60. Cor.).

Prae-

Praeterea AGB+BGC+CGD = 2R = CGD + GDC + DCG (§. 93. Cor. 2.), ideo ob AGB+CGD=GDC+DCG (§. 2.) erit quoque BGC = CGD (§. 21.) = FGE (§. 31.). Proinde ſex anguli circa punctum G omnes aequales ſunt, hinc et omnes arcus, in quos peripheria diviſa eſt (§. 138.), ex quo patet, hexagonum deſcriptum eſſe regulare (§. 150.).

COR. Ex demonſtratione patet, latus hexagoni regularis aequale eſſe radio circuli, cui inſcribi poteſt.

§. 152.

Quodlibet polygonum regulare biſecando omnes ipſius angulos in triangula aequicrura ſibi mutuo congruentia dividitur.

DEM. Biſecetur angulus ABC figurae regularis recta BG, eique proximus BCD recta CG, quae rectae producantur donec ſe apud G interſecent. Erunt igitur anguli GBC et GCB aequales (§. 21. Cor. 2.) hincque triangulum BGC eſt aequicrurum. Eodem modo demonſtratur, etiam quodlibet reliquorum triangulorum CGD et DGE etc., quae biſſectione angulorum D, E, F, A, determinantur, fore aequicrurum. Omnia autem iſta triangula baſes habent aequales (§. 48.) et duos angulos aequalibus baſibus adjacentes (*conſtr.*) proinde ſibi mutuo congruunt (§. 94).

COR. Circuli centro G per A deſcripti peripheria per apices omnium angulorum figurae tranſit. Ideo cuilibet figurae regulari circulus circumſcribi poteſt, cujus centrum biſectione duorum angulorum figurae reperitur.

§. 153.

Quodlibet polygonum regulare aequale eſt triangulo, cujus baſis aequalis eſt perimetro polygoni, altitudo vero diſtantiae laterum a centro circuli, qui polygono circumſcribi poteſt.

DEM. Sit polygonum regulare ABCDE et F centrum circuli polygono circumſcripti. Ductis radiis AF, BF, etc. polygonum dividetur in triangula ABF, BCF, F. 76.

etc.

etc. aequalium baſium (§. 152.) et altitudinum, quae ſunt diſtantiae laterum a centro (§. 133.). Erunt ergo ſimul ſumta aequalia uni triangulo GHF ejusdem altitudinis, et cujus baſis GH aequalis eſt ſummae baſium omnium (§. 114. Cor. 4.) id eſt perimetro polygoni.

§. 154.

Si recta circulum tangat, radius ad punctum contactus tangenti eſt perpendicularis.

F. 77. DEM. Recta AD tangat circulum in D, ducaturque BD. Quodſi ea tangenti non eſt perpendicularis, alia tamen ut BF ex B eidem duci poteſt perpendicularis. Quo facto erit angulus BFD rectus, et ideo BD > BF (§. 81. Cor.). Sed BD = BE, hinc BE > BF. *quod imp.*

§. 155.

Si ex centro ad tangentem circuli ducatur perpendicularis, ea in punctum contactus cadit.

DEM. Ex centro circuli B ad tangentem AD ducatur perpendicularis, quae ſi non cadat in punctum D, ſed in aliud F, ducatur etiam BD, eritque haec quoque tangenti perpendicularis contra §. 80. Cor. 4.

§. 156.

Per datum punctum lineam rectam ducere, quae circulum tangat.

SOL. 1. Si in peripheria detur punctum D, ducatur radius BD, et ad ejus punctum extremum erigatur perpendicularis DA (§. 147.) quae erit tangens quaeſita.

2. Si vero extra peripheriam detur punctum A ex centro B circuli dati ad A ducatur recta BA, qua in C biſecta radio CA = CB deſcribatur circulus ADB, qui ſecabit circulum datum in D et G. Ducatur AD vel AG utraque circulum in D vel G continget.

DEM. Concurrit AD utroque caſu cum circulo et angulus apud D vel G utroque caſu eſt rectus (§. 146. Cor. 3.) Ducatur praeterea recta BF, eritque BF > BD, ſed BD = BE hinc BF > BE et punctum F cadit extra circulum

Cum

Cum idem de omnibus reliquis rectae AD punctis valeat, ea circulum non ſecat, ideoque eſt ejusdem tangens.

§. 157.

Figura rectilinea *circulo circumſcripta* eſſe dicitur et *circulus eidem inſcriptus*, ſi latera figurae ſunt rectae circulum tangentes.

§. 158.

Dato circulo circumſcribere polygonum regulare conceſſa indefinita diviſione peripheriae.

SOL. Circulo centro C deſcripto ſit circumſcribendum polygonum regulare quodcunque e. g., octogonum. Dividatur peripheria in tot partes aequales, quot figura deſcribenda habet latera. Per quodcunque diviſionis punctum ducantur rectae circulum tangentes, quae ſeſe mutuo ſecabunt et terminabunt polygonum quaeſitum. F. 78.

DEM. Ducantur radii ad puncta contactus CO, CS, CP etc. et erunt anguli apud O, S, P, etc. recti. Ducantur praeterea rectae ex centro ad apices polygoni CB, CD etc., eruntque in triangulis CBO et CBS anguli OCB, BCS aequales, (§. 87. Cor.) i. e. OCB $= \frac{1}{2}$OCS $=$ BCS. Eandem ob rationem eſt SCD $= \frac{1}{2}$SCP $=$ DCP, Sed OCS $=$ SCP (§. 140. Cor. 4.) ideo BCS $=$ SCD. Simili modo demonſtratur, omnes angulos circa C aequales eſſe. Hinc omnia triangula rectangula in quae figura diviſa eſt ſunt congruentia. Quare omnes polygoni anguli A, B, D, etc. et omnia ejus latera ſunt aequalia.

COR. I. Duplicato numero laterum polygoni circulo circumſcripti, latera fiunt minora. Loco quadrati enim KLMN eidem circulo circumſcribatur octogonum regulare ABDEFGHI, erit SN dimidium lateris quadrati, et SB dimidium lateris octogoni. Jam radio CO in N producto triangula rectangula NCS et BCS aequales habent baſes, ſed angulus NCS $>$ BCS, ideo eſt NS $>$ BS (§. 94. Cor. 1.) et IK $>$ BC.

COR. II. Duplicato numero laterum polygoni diſtantia punctorum, quae ſunt apices angulorum polygoni, a centro minuitur. Eſt enim NCq = NSq + SCq, et BCq = BSq + SCq. Cum autem ſit BSq < NSq, erit BSq + SCq < NSq + SCq hincque BCq < NCq et BC < NC (§. 110. Cor. 3.).

COR. III. Omne polygonum circulo circumſcriptum eodem majus eſt. Sed aucto laterum polygoni numero in duplum, minuitur ejus differentia a circulo, quia ſumma figurarum trilinearum, ZAO, OBS, SDP, PET, etc, quibus polygonum dupli numeri laterum a circulo differt, longe minor eſt ſumma figurarum trilinearum ZNS, SKT, TLV, VMZ, quibus polygonum ſimpli numeri laterum a circulo differt.

COR. Polygonum regulare circulo circumſcriptum aequale eſt triangulo, cujus baſis eſt perimetro polygoni et altitudo radio circuli inſcripti aequalis (§. 153.).

§. 159.

Duplicato numero laterum polygoni circulo inſcripti ejus differentia a circulo minuitur ultra dimidium.

F. 79. DEM. Circulo cujus centrum eſt A inſcriptum ſit quadratum, cujus latus eſt CB, eritque ſegmentum CDBR unum ex quatuor illis, quibus quadratum a circulo differt. Dividatur arcus CDB biſariam radio AD, qui ſimul biſariam dividet chordam CB in R, eique erit perpendicularis (§. 66. coll. §. 140. Cor. 5.). Ducantur chordae BD, DC, quae erunt latera octogoni inſcripti. Per punctum D ducatur tangens, quae chordae CB erit parallela (§. 89. Cor. 1) quo facto etiam per C et B ductis ipſi RD parallelis complebitur parallelogrammum BCFE, cujus dimidium eſt triangulum CDB. Sed BCFE > CSTBR, ideo $\frac{1}{2}$BCFE > $\frac{1}{2}$CSTBR (§. 22. Cor. 3.) hinc CDB > $\frac{1}{2}$CSTBR et 4CDB > 4 $\frac{1}{2}$CSTBR.

§. 160.

Duplicato numero laterum polygoni regularis circulo cir-

circumſcripti ejus differentia a circulo ultra dimidium minuitur.

DEM. Circulo, cujus centrum eſt A, circumſcriptum ſit quadratum, cujus latera ſunt IG, GH, circulum in K et L tangentia. Chorda LK arcus LOK dividatur bifariam recta perpendiculari, quae et arcum LOK dividet bifariam in O. Eadem haec perpendicularis producta per punctum G tranſit (§. 64.) quia eſt $LG = KG$. (*per dem.* §. 158.). Praeterea per punctum O ducatur tangens NM, quae erit latus octogoni circumſcripti. Jam $OM = MK$, (*per dem.* §. 158.). $GM > OM$ (§. 81. Cor.) et ideo $GM > MK$. Hinc triang. $GOM >$ triang. MOK (§. 114. Cor. 3.) atque adeo $GOM > \frac{1}{2}GOK$. Sed trilineum $GOQKM < GOK$ et proinde $\frac{1}{2}GOQKM < \frac{1}{2}GOK$, quare et $GOM > \frac{1}{2}GOQKM$. Eadem argumentatione demonſtratur, eſſe $GNO > \frac{1}{2}GOPLN$, hincque $GOM + GON = GNM > \frac{1}{2}GOQKM + \frac{1}{2}GOPLN = \frac{1}{2}GLPOQK$, et $4\,GNM > 4\frac{1}{2}GLPOQK$. F. 80.

§. 161.

Duabus magnitudinibus inaequalibus propoſitis, ſi a majore auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur majus quam dimidium, et hoc ſemper fiat; relinquetur tandem magnitudo, quae minor erit propoſita minore magnitudine.

DEM. Sit recta AB major recta C. Ducatur tertia recta indefinita, in eaque a puncto D ponatur C toties, donec producta ſit recta ED majorem AB proxime excedens (§. 95.), ita ut ſit $DF = FG = GE = C$. Ex AB demantur plus quam dimidium AH, et a reliquo HB plus quam dimidium HI, et ſic porro, donec partes AH, HI, IB aeque multae ſint partibus DF, FG, GE. Jam $DE > AB$ (*conſtr.*) ideo $\frac{1}{2}DE > \frac{1}{2}AB$. Praeterea FE non minor eſt, quam $\frac{1}{2}DE$, ergo $FE > \frac{1}{2}AB$, ſed $\frac{1}{2}AB > HB$, hinc $FE > HB$, et $\frac{1}{2}FE > \frac{1}{2}HB$. Denique GE non minor eſt, quam $\frac{1}{2}FE$, ideo $GE > \frac{1}{2}HB$, proinde cum $\frac{1}{2}HB > IB$, erit $GE > IB$, id eſt $IB < C$. F. 81.

COR. Idem demonſtrabitur, ſi ex AB auferatur dimidium AH, et ex reliquo HB rurſus dimidium HI, et ita deinceps.

§. 162.

Si ſit figura plana quaecunque A circulo IB minor inſcribi poteſt circulo polygonum regulare, quod figura A majus eſt.

F. 82. DEM. Si circulus B figura A major eſt, excedere debet eandem differentia quadam, quae ſit aequalis figurae G, ſitque adeo A + G = B. Inſcribatur circulo B quadratum CDEF, quod ſi majus eſſet figura A, factum eſſet, quod deſideratur: ſi vero ſit minus eadem, differentia, qua circulus idem excedit, major eſſe debet figura G, dividantur arcus, CD, DE, EF, FC bifariam in H, I, K, L, ducanturque chordae CH, HD, etc, quae terminabunt octogonum regulare, quod ſi adhuc minus eſt magnitudine A, ſimili operatione circulo inſcribatur polygonum regulare ſedecim laterum, et ſi hoc non ſufficiat, fiat polygonum triginta duorum laterum et ita deinceps. Jam vero octogoni differentia a circulo plus quam dimidio minor eſt differentia quadrati a circulo: differentia polygoni inſcripti ſexdecim laterum a circulo, cui inſcribitur, plus quam dimidio minor eſt differentia octogoni ab eodem circulo, et ita in reliquis (§. 159.). Ideo hac operatione continuata a differentia, qua circulus excedit polygonum eidem inſcriptum aufertur majus quam dimidium, ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahitur plus quam dimidium, et hoc ſemper fit, quamdiu numerus laterum polygoni circulo inſcripti duplicatur. Proinde neceſſe eſt, ut tandem perveniatur ad polygonum, cujus differentia a circulo minor eſt figura G (§. 161.). Factum ſit, atque ſi ea differentia littera Q denotetur, et polygonum, quod magnitudine Q a circulo differt, littera P, erit P + Q = B, erat vero et A + G = B, quare eſt P + Q = A + G. Eſt vero Q < G, (*conſtr. et dem.*) proinde P > A (§. 23.).

§. 163.

Si detur figura plana A circulo B major poterit circuli circumſcribi polygonum regulare, quod figura data minus eſt.

DEM. Si figura A major eſt circulo B, excedere debet eundem differentia quadam, quae ſit aequalis figurae C, atque ideo B + C = A. Circulo B circumſcribatur quadratum DEFG, quod quadratum ſi minus eſt figura A, factum eſt, quod quaeritur: Si vero adhuc majus eſt, differentia, qua illud excedit circulum B, major eſt figura C. Dividantur arcus HK, KM, OM, MO bifariam in I, N, etc, per quae puncta ſi ducantur tangentes OR, etc., illae terminabunt octogonum regulare circulo circumſcriptum. Si et hoc octogonum majus eſt figura A, iterum duplicetur numerus laterum polygoni circumſcripti, qua duplicatione continuo repetita tandem invenietur polygonum deſideratum. Octogoni enim differentia a circulo ultra dimidium minor eſt differentia quadrati a circulo, idem valet comparando differentiam polygoni ſexdecim laterum cum differentia octogoni a circulo, ſicque deinceps (§. 160.). Proinde neceſſe eſt, ut tandem perveniatur ad polygonum, cujus differentia a circulo minor eſt figura C (§. 161.). Factum ſit, atque denotetur ea differentia littera Q, polygonum vero, quod magnitudine Q a circulo differt, littera P, et erit B + Q = P. Erat vero B + C = A et Q < C (*conſtr. et dem.*), ideo eſt B + Q < B + C (§. 22.), id eſt P < A. F. 83.

§. 164.

Omnium linearum eosdem terminos habentium minima eſt recta. Reliquae omnes, ſi ad eandem lineae rectae partem inter eosdem cum illa terminos ita ductae ſint, ut ſe invicem non ſecent, ad partes illius rectae cavae ſint, nec habeant flexus contrarios, ſunt inaequales, atque eo majores, quo magis a recta recedunt.

COR. I. Quaevis circuli chorda minor eſt arcu, quen ſubtendit; hinc perimeter polygoni regularis circulo in ſcripti minor eſt peripheria circuli.

COR. II. Si ab eodem puncto G extra circulum aſſum to ducantur duae rectae GL et GK circulum tangente (§. 156.) et inter duo contactus puncta L et K ducatu
80. chorda LK; duo iſta contactus puncta ſunt termin communes chordae LK, arcus hujus chordae LOK et lineae fractae LGK, quam duae iſtae tangentes effi ciunt, ultima vero cum chorda includit arcum huju chordae, quare eodem arcu major eſt. Hinc perime ter polygoni circulo circumſcripti major eſt hujus cir culi peripheria.

§. 165.

84. *Circulus A aequalis eſt triangulo, cujus altitudo aequ lis eſt radio AB, et baſis peripheriae BCD hujus circuli.*

DEM. Triangulum illud, quod brevitatis grati littera T denotabimus, non eſt majus circulo A, qui poſſet eidem circulo circumſcribi *polygonum regulare tri angulo T minus* (§. 163.) *quod tamen majus eſſet illo*; nem pe aequale eſſet triangulo, cujus altitudo radius et baſ perimeter polygoni circumſcripti (§. 158. Cor,) quae pe rimeter circuli peripheria major eſt (§. 164. Cor. 2.) consequenter major baſe trianguli T eandem altitudine habentis, quare polygonum majus eſt triangulo T (§ 114. Cor. 3.). Idem igitur polygonum eodem tria gulo majus et ſimul eodem minus foret, quod abſu dum eſt. *Porro* triangulum T circulo A non eſt mi nus, *quia* inſcribi poſſet circulo *polygonum regulare ma jus illo triangulo* (§. 162.) *et quod ſimul eodem mini eſſet* (§. 114. Cor. 3.) nempe aequale triangulo cujus a titudo eſſet perpendicularis ducta a centro ad latus unun quae minor eſt radio (§. 125. Cor.) atque cujus baſ perimeter polygoni inſcripti, quae minor eſt circu peripheria (§. 164. Cor. 1.). Simile igitur abſurdu

ſtatu

ſtatuitur, ſi triangulum T ponitur circulo A minus eſſe. Proinde, cum nec majus nec minus ſit circulo, eidem aequale erit.

SECTIO VI.

DE COMPARATIONE EXTENSORVM GEOMETRICA GENERATIM.

§. 166.

Comparatio extenſorum generatim abſolvitur inveſtigando eorum aequalitatem vel inaequalitatem. Haec inveſtigatio duplici modo inſtitui poteſt. Comparatio nimirum *Arithmetica*, ut vulgo dici ſolet, conſiſtit in inveſtigatione differentiae quantorum: *Geometrice* autem comparari dicuntur duo extenſa A et B, ſi inquiratur, F. 85. quaenam magnitudo uni extenſo A in reſpectu ad alterum B ſit tribuenda. Comparatio arithmetica non eſt hujus loci.

COR. Comparatio geometrica duorum extenſorum inſtitui nequit, niſi eorum unum creſcendo vel decreſcendo alteri aequale atque tum ulterius creſcendo vel decreſcendo majus vel minus altero evadere poteſt. Quod vero ſi fieri poſſit, etiam geometrica comparatio eſt poſſibilis.

§. 167.

Ratio extenſi A ad extenſum B eſt magnitudo, quae uni extenſo in reſpectu ad alterum eſt tribuenda; ipſa extenſa A et B, de quorum reſpectiva magnitudine quaeſtio eſt, vocantur *Termini rationis*. *Ratio*, quae inter

inter

A et B intercedit, deſignatur hoc ſigno (:) collocato inter terminos rationis hoc modo A : B.

COR. I. Inter duo quaecunque extenſa, quorum unum creſcendo vel decreſcendo alteri aequale atque tum ulterius creſcendo vel decreſcendo majus vel minus eodem evadere poteſt, ratio intercedit (§. 166. Cor.). Quare cum extenſa, ſi ſint homogenea, deſcriptas habeant conditiones, ſequitur, inter duo quaecunque extenſa homogenea rationem quandam locum invenire.

COR. II. Ratio non intercedit, niſi inter ejusmodi extenſa, quorum unum creſcendo vel decreſcendo alteri aequale, atque tum ulterius creſcendo vel decreſcendo hoc altero majus vel minus evadere poteſt (§. 166. Cor.). Extenſa autem heterogenea his requiſitis carent. Proinde inter duo extenſa heterogenea ratio concipi nequit.

§. 168.

Rationes iterum inter ſe comparari poſſunt. Si nimirum extenſo A in reſpectu ad B eadem tribuenda eſt quantitas, quae extenſo C in reſpectu ad D tribuitur, ratio ipſius A ad B *ſimilis* ſive *aequalis* eſſe dicitur rationi ipſius C ad D, quae rationes oppoſito caſu dicuntur *inaequales*. *Proportio* ſive *Analogia* eſt aequalitas duarum rationum, et termini rationum aequalium vocantur *quanta proportionalia*. Aequalitas duarum rationum indicatur ſigno aequalitatis (=) ita ut expreſſio A : B = C : D ſignificet, quanta A, B, C, D eſſe proportionalia.

COR. I. Si fuerit A = B, et C = D, proporrio A : B = C : D vera eſt; et viciſſim, ſi vera eſt proportio A : B = C : D, atque A = B, debet eſſe C = D.

COR. II. Si vera eſt proportio A : B = C : D, et A > B, erit quoqne C > D; ſi vero A < B, eſſe debet C < D.

COR. III. Si fuerit A : B = C : D, erit quoque B : A = D : C, vel D : C = B : A.

§. 169.

§. 169.

Quaevis ratio ſibi ipſi eſt aequalis; et quanta aequalia in rationibus ſibi ſubſtituta easdem non mutant.

COR. I. Proinde ſi in proportione A : B = C : D fuerit B = C, erit A : B = B : D, vel A : C = C : D; quo caſu *proportio* vocatur continua, B vero vel C *terminus medius proportionalis.*

COR. II. Quodſi quanta A et B atque C et D inter ſe comparando, inveniatur, eſſe A = C, atque B = D, certo concluditur, quatuor illa quanta eſſe proportionalia.

§. 170.

Duae rationes eidem tertiae aequales et inter ſe aequales ſunt.

COR. Duae rationes, quae aequalibus rationibus ſunt aequales, etiam inter ſe aequales ſunt.

§. 171.

Duarum rationum A : B et C : D prior dicitur poſteriore *major*, eſt poſterior priore *minor* ſi termino A in reſpectu ad terminum B major competit quantitas, quam termino C in reſpectu ad terminum D tribuenda eſt.

COR. I. Si igitur eſt B = D eſt A > C, erit ratio A : B major ratione C : D; atque ſi A = C, et B < D, iterum ratio A : B ratione C : D major eſt.

COR. II. Si proportio A : B = C : D vera ſit, atque B = D, erit quoque A = C. Si enim foret A > C, eſſet A : B > C : D atque ſi A < C, foret ratio B : A major ratione D : C, utrumque *contra hyp.*

COR. III. Proinde ſimul patet, ſi duarum rationum aequalium B : A = D : C prioris terminus primus B aequalis ſit poſterioris termino primo D, ſimul fore prioris terminum ſecundum A aequalem termino ſecundo C poſterioris.

§. 172.

Si A : B = C : D, et quanta A et B homogenea quantis C et D; erit B > D, ſi A > C.

DEM. Si A > C, erit aut B = D, aut B < D aut B > D. Si prius, nimirum ſi B = D, erit ratio A : B major ratione C : D, *contra hyp.* Si B < D, idem ſequitur. Quo minor enim ſit unus rationis terminus, eo major ſit alter terminus, eo major ſit alter terminus reſpectu hujus, et ideo ipſa ratio eo major. Quare cum ratio A : B jam major ſit ratione C : D, ſi B = D, tanto magis hoc ſtatui debet, ſi B < D. Proinde cum neque ſit B = D neque B < D, eſſe debet B > D.

COR. I. Hinc ſimul ſequitur, ſi duarum rationum aequalium C : D = A : B prioris terminus primus C minor fuerit poſterioris termino primo A, ſimul fore prioris terminum ſecundum D minorem termino ſecundo B poſterioris.

COR. II. Si cum his conferantur, quae §. 171. Cor. 2. et 3. ſunt demonſtrata, patet, in omni proportione A : B = C : D fore generaliter B > = < D, ſi ſit A > = < C.

§. 173.

Si fuerit A : B = M : N, et praeterea B : C = O : P; magnitudo ipſi A in reſpectu ad C tribuenda innoteſcit inveſtigando primo quantitatem, quae ipſi A competit in relatione ad B, deinde inquirendo, quaenam ſit magnitudo ipſi B in relatione ad C tribuenda. Proinde ratio ipſius A ad C reſolubilis erit in duas alias rationes ipſius A ad B et quanti B ad C, ſive quod idem eſt, in rationes ipſius M ad N et O ad P. Quare cum generatim id, quod in varia reſolubile eſt, vocetur compoſitum; ratio inter A et C intercedens *compoſita* eſſe concipitur *ex rationibus M : N et O : P.* Pari ratione ſi fuerit.

A : E

A : B = M : N
B : C = O : P
C : D = Q : R
D : E = S : T, etc.

ratio A : E dicitur *compoſita ex rationibus A : B, B : C, C : D, D : E;* vel quod idem eſt, ex rationibus M : N, O : P, Q : R, S : T; atque hoc reſpectu rationes componentes M : N, O : P, Q : R, S : T, concipiuntur ut *ſimplices.*

§. 174.

Si rationes componentes ſimplices ſunt eaedem, ita ut ſit

A : B = M : N
B : C = M : N
C : D = M : N, etc.

ratio compoſita A : C, vel A : D, et ſic alia ſimilis, vocatur *Multiplicata* rationis M : N, et quidem A : C praecise *Duplicata*, quae componitur ex M : N bis ſumta; A : D *Triplicata*, quae componitur ex M : N ter ſumta; ſicque porro. Ratio A : B etiam vocari ſolet *Subduplicata* reſpectu duplicatae ſuae, *Subtriplicata* reſpectu ſuae triplicatae, et ita porro, ſi loco rationis A : B jam ipſius duplicata vel triplicata etc ut ſimplex ſpectetur, atque generaliter ejusmodi ratio dicitur *ſubmultiplicata* reſpectu multiplicatae ſuae. Rationem A : B componi ex pluribus aliis K : L, M : N, O : P, etc. ſequenti modo

ſcribitur $A : B = \left\{\begin{matrix} K : L \\ M : N \\ O : P \text{ etc.} \end{matrix}\right\}$. Si igitur ratio A : B eſt multiplicata quaevis rationis M : N, hoc indicari

poteſt ſequenti modo $A : B = \left\{\begin{matrix} M : N \\ M : N \\ M : N \text{ etc.} \end{matrix}\right\}$ ſcripta ratione M : N toties, quoties ad componendam rationem A : B fuit aſſumta.

§. 175.

Si fuerit $A : B = C : D$, *et* $B : E = D : F$ *erit* (or dinatim, ex aequo uti Veteres loqui ſolent) $A : E = C : F$.

DEM. Sit ratio $A : B$ aequalis rationi $P : Q$, e ratio $B : E$ aequalis rationi $K : S$, erit $A : E = \left\{\begin{array}{l} P : Q \\ R : S \end{array}\right.$ Quia vero eſt $A : B = C : D$, erit quoque $C : D = P : Q$ et quia $B : E = D : F$, erit $D : F = R : S$. Proind etiam $C : F = \left\{\begin{array}{l} P : Q \\ R : S \end{array}\right\}$. Quia jam ratio, quae ex duabus rationibus $P : Q$ et $R : S$ componitur, ſibi ipſi eſ aequalis, (§. 169.) et duae rationes eidem tertiae aequa les etiam inter ſe aequales ſint (§. 170.) eſſe debet $A : E = C : F$.

COR. Quodſi igitur fuerit

$$\begin{array}{l} A : B = G : H \\ B : C = H : I \\ C : D = I : K \\ D : E = K : L \end{array}$$

erit primo $A : C = G : I$. Deinde quia etiam $C : D = I : K$ habetur quoque $A : D = G : K$, ex quo iterum o $D : E = K : L$ fluit $A : E = G : L$, quae ratiocinia, quo uſque lubet, poſſunt continuari. Proinde rationes e eodem numero rationum ſimplicium aequalium eoden ordine compoſitae ſunt rationes aequales.

§. 176.

p. 88. Si quantum aliquod C totum ex alio A aliquotie ſumto componi poteſt, ita ut A aliquoties ſumtum ip C fieri poſſit aequale; quantum A dicitur *menſura* ſe *pars aliquota* ſeu *ſubmultiplum* quanti C, et ipſum quan tum C ipſius A *multiplum* vocatur. Pari ex ratione quan tum B erit menſura ſeu pars aliquota ſive ſubmultiplu quanti D et B ipſius D ſubmultiplum, ſi quantum B to tum aliquoties poſitum ipſi D fieri poteſt aequale. A

qu

que ſi quantum A toties ſibi ipſi addendum eſt ad producendum quantum C, quoties B ſibi ipſi debet addi, ut quanto D fiat aequalis, quanta A et B dicuntur *ſimiles partes aliquotae* ſeu *aequeſubmultipla* quantorum C et D, haecque quanta C et D priorum A et B aequemultipla.

§. 177.

Si quantum aliquod ut C ſpectetur ut tale, quod ex pluribus partibus, quae vel aequales ſunt, vel quorum inaequalitas non ſpectatur, compoſitum eſt, quantum illud *per numerum exprimi dicitur*. Multitudo enim earum partium, ex quibus compoſitum eſſe cogitatur, dicitur *Numerus integer* ſeu *Numerus* ſimpliciter et quaevis earum partium *Unitas* vocatur. Numeri, qui ex ſuis unitatibus eodem modo componuntur, vocantur *numeri aequales*. Proinde numeri poſſunt aequales eſſe, licet unitates, ex quibus componuntur, diverſae ſint: et quantum ut C exprimi poteſt per numerum ſcilicet integrum ex aſſumta unitate A, ſi ex eadem aliquoties ſibi addita componi poteſt.

§. 178.

Si duorum quantorum A et B capiantur aequemultipla C et D, ita ut A ſit talis pars aliquota ipſius C, qualis pars aliquota eſt B ipſius D; erit $A : C = B : D$.

DEM. Quantum A toties continetur in quanto C, quoties B continetur in quanto D. Proinde magnitudo ipſius C eodem modo determinatur ex magnitudine ipſius A, quo magnitudo ipſius D ex magnitudine ipſius B determinari poteſt; ex quo patet, eſſe $A : C = B : D$ (§. 168.).

COR. I. Quantum C exprimi poteſt per numerum ex unitate A, atque D exprimi poteſt per numerum ex unitate B, qui numeri iidem erunt (§. 177.). Si igitur numerus, per quem C ex unitate A exprimitur, denotetur per *m*, etiam numerus per quem D ex unitate B exprimitur littera *m* indicari debet. Ideo erit $C = mA$ et $D = mB$.

$= m$B. Ex quo patet, hanc proportionem generalite veram eſſe A : mA $=$ B : mB, denotante nimirum m nume rum quemcunque integrum.

COR. II. Si quantum aliquod E exprimi poſſit per nu merum ex unitate A a numero m diverſum, isque ind cetur littera n, praeterea vero aliud quantum F exprimi po ſit per numerum ex unitate B aequalem numero n, er quoque A : E $=$ B : F, ſeu A : nA $=$ B : nB, quae pro portio eadem eſt cum iſta nA : A $=$ nB : B (§. 168. Cor. Si cum hac comparetur analogia prior A : mA $=$ B : mB exinde deducitur nA : mA $=$ nB : mB (§. 175.), vel E C $=$ F : D (§. 175.), ubi n et m numeros integros de notant.

§. 179.

Duo quanta ut C et E, vel D et F, quae expri poſſunt per numerum integrum ex eadem unitate A v B, dicuntur *commenſurabiles*, quia aliquam menſura habent communem; et ratio inter ejusmodi quanta co menſurabilia dicitur *Ratio rationalis*. Quodſi dentu duo quanta talia, quae nullam plane menſuram commu nem admittant, eadem *incommenſurabilia* vocabuntur, ratio inter ejusmodi quanta incommenſurabilia *Ratio i rationalis* dicetur.

COR. I. Commenſurabilia quanta inter ſe rationem h bent, ut numerus ad numerum; ſeu ratio duorum qua torum commenſurabilium per duos numeros exprimi p teſt. Atque ſi duo quanta ſint inter ſe ut numerus alium numerum, ipſa quanta erunt commenſurabilia.

COR. II. Incommenſurabilia quanta ſi dantur, eade inter ſe rationem non habent, ut numerus ad numerun atque ſi duo quanta inter ſe non habent rationem, qua numerus habet ad numerum; eadem quanta incomme ſurabilia erunt.

COR. III. Si quatuor quanta A : B $=$ C : D fueri proportionalia, atque A et B ſunt commenſurabilia, eti

C et D commenſurabilia erunt. Si vero A et B ſunt incommenſurabilia, idem de quantis C et D verum erit.

COR. IV. In *Cor. 2. §. praec.* habetur criterium proportionalitatis quantorum commenſurabilium.

§. 180.

Si duo quanta C et E ſunt commenſurabilia, atque unum eorum ut C totum non poſſit eſſe menſura alterius E, ſeu unitas, ex qua E ut numerus integer exprimitur; poteſt tamen E ex parte quadam ipſius C aliquota, ea nimirum, quae eſt ipſorum C et E communis menſura, aliquoties repetita componi, et proinde ut numerus ex hac communi menſura tanquam unitate exprimi, qui numerus dicitur *fractus* ſeu *fractio*, ſi C ſpectetur ut unitas, quia eſt multitudo partium unitatis aliquotarum, non vero multitudo ipſarum unitatum. Proinde ut fractionis obviae magnitudo cognoſcatur, innoteſcere debet primo numerus partium aequalium, in quas unitas diviſa eſſe concipitur, qui *Denominator* fractionis audit: deinde innoteſcere debet, quoties ejusmodi pars ad fractionem componendam eſt repetita, et numerus exprimens, quoties hoc factum ſit, *Numerator* fractionis vocatur. Si litterae alphabeticae, *a*, *b*, *c*, etc., denotent numeros integros; fractus numerus ſcribitur ducta linea transverſa, et numeratore ſupra eam denominatore infra collocato, hoc modo $\frac{a}{b}$. Fractio cujus numerator eſt minor denominatore, dicitur *Fractio vera*. *Fractio ſpuria* eſt, cujus numerator denominatori aequalis, vel eodem major eſt. *Fractiones aequales* ſunt, quae eodem modo ex ſuis unitatibus componuntur.

COR. I. Si numerus partium aliquotarum, ex quibus componitur C exprimatur littera *m*, et numerus earundem partium, ex quibus E componitur, littera *n*, numerus per quem exprimitur E ex unitate C erit $\frac{n}{m}$, at-

que

que ideo ipſum quantum E erit $= \frac{n}{m} C$. Simili e

ratione erit quantum $F = \frac{n}{m} D$ ſi D ſumatur pı

unitate. Cum igitur ſit $E : C = F : D$ (§. 176. Cor. 2.

fiet $\frac{n}{m} C : C = \frac{n}{m} D : D$. Pari autem ex ration

denotante $\frac{\nu}{\mu}$ numerum fractum quemcunque ab $\frac{n}{m}$

diverſum, erit $\frac{\nu}{\mu} C : C = \frac{\nu}{\mu} D : D$, vel C

$\frac{\nu}{\mu} C = D : \frac{\nu}{\mu} D$; atque ex hac analogia cum pri

ri comparata habetur $\frac{n}{m} C : \frac{\nu}{\mu} C = \frac{n}{m} D$

$\frac{\nu}{\mu} D$.

COR. II. Si quantum A ipſi B eſt incommenſurabil quantum B ex A tanquam unitate nec ut numerus inte ger, nec ut numerus fractus poterit exprimi.

§. 181.

Quantum B diviſum ſit in certum numerum partiu aequalium, quarum quaelibet ſit a, *ita ut* a *ſit menſu quanti B. Numerus partium* a, *quae in B continentur, ſit* m. *S aliud quantum A ipſi B incommenſurabile atque ab eodem d trahatur* a *toties, quoties fieri poteſt, et reſiduum ſit* d, *quod m nus erit menſura* a. *Numerus exprimens, quoties menſura* a ı $A - d$ *continetur, ſit* n; *erit* $A - d = na$, *et* $A = na + $(*Quodſi jam fuerit quantum, aliquod* $F < A$; *effici poteſ ut fiat* $na > F$.

DEN

DEM. Si fuerit $F < A$, quantum A excedere debet quantum F differentia quadam, quae ſit c, ita ut ſit $F + c = A$. Praeterea eſt $na + d = A$, et proinde $F + c = na + d$. Jam vero ſemper eſt $d < a$, in quotcunque partes aequales diviſum ſit B. Atque ſi fuerit $a > c$; quaelibet partium in B biſſecetur ita ut a jam ſit dimidio minor, quam ante, atque proinde et quaelibet partium in $A - d$ dimidio minor erit, quam ante. Semper vero ſupponitur partem a, quae eſt menſura quanti B, non eſſe menſuram quanti A, ut ſemper maneat $d < a$. Si adhuc fuerit $a > c$; biſſectio repetatur, ſicque tandem fiet $a < c$ (§. 161. Cor.). Quare cum perpetuo ſit $d < a$, jam quoque erit $d < c$. Eſt vero ſemper $F + c = na + d$, quare nunc erit $na > F$. F. 88.

§. 182.

Si fuerit quantum A *quanto* B *incommenſurabile, atque tertium quantum* C *incommenſurabile quarto* D; *quanta vero* B *et* D *diviſa concipiantur in certum numerum partium aequalium, qui ſit* m, *quaelibet vero partium in* B *ſit* a, *et quaelibet partium in* D *ſit* b, *ita ut totidem partes* a *ſint in* B, *quot partes* b *ſunt in* D; *his vero poſitis ſemper ſit* $A > na$ *et* $A < (n+1)a$, *atque ſimul* $C > nb$ *et* $C < (n+1)b$, *quemcunque numerum integrum litterae* n *et* m *denotent; littera* n *nimirum ſemper exprimente, quot partes* a *ipſius* B *actu contineantur in* A, *atque ſimul quot partes* b *ipſius* D *contineantur in* C: *dico, quatuor quanta* B, A, D, C, *vel* A, B, C, D, *eſſe proportionalia.*

DEM. Quodſi proportio $B : A = D : C$ vel $ma : A = mb : C$ falſa ſit, quantum C non erit quarta proportionalis ad quanta ma, A, et mb. Proinde quarta proportionalis ad ma, A, et mb eſſe debet vel minor vel major quanto C. Utrumque autem impoſſibile eſt.

Sit enim primo $E < C$, atque proportio $ma : A = mb : E$ ſupponatur vera eſſe. Quia eſt $E < C$ biſſectione ipſius b effici poteſt, ut fiat $nb > E$ (§. 181.). Factum

ſit, atque tum erit $na : ma = nb : mb$ (§. 178. Cor. 2.) e qua analogia cum priori $ma : A = mb : E$ comparata flu $na : A = nb : E$. Jam vero ſemper eſt $na < A$, proin foret $nb < E$ (§. 168. Cor. 2.) cum tamen ſimul ſit $nb >$ E. Impoſſibile igitur eſt, ut ſit quarta proportional ad ma, A, et mb, quanto C minor.

Secundo ſit quantum $G > C$, atque ſumatur pr portio $ma : A = mb : G$ vera eſſe; dico hoc pariter im poſſibile eſſe. Primo enim ſtatim patet per demonſtrat veram non eſſe proportionem $mb : C = ma : F$, ſi ſit $F < A$. Tum vero, ſi fuerit H quarta proportional ad quanta G, C, et A, ita ut ſit $G : C = A : H$; fore $H < A$, ob $C < G$. Ex duabus vero analogiis $ma : A = mb : G$ et $A : H = G : C$ conſequitur $ma : H = m$ C, vel $mb : C = ma : H$, (§. 175. et 136.). Haec ve proportio impoſſibilis eſt, quia $H < A$. Proinde impoſſibile eſt, ut quarta proportionalis ad ma, A et quanto C major ſit. Ipſa igitur proportio $ma : A =$: C, vel $B : A = D : C$ vel $A : B = C : D$ vera eſt.

§. 183.

Quodſi quatuor iſta quanta A, B, C, D *inter ſe comp rando, quantisque* B *et* D *in* m *partes aequales diviſis ut* $B = ma$ *et* $D = mb$, *inveniatur* $A = na$, *et* C *in* $= n$ *vera non eſt proportio* $A : B = C : D$.

DEM. Quodſi enim vera eſſet proportio $A : B$ $C : D$, vel $na : ma = C : mb$; etiam hæc proportio n $ma = nb : mb$ eſſet vera (§. 178. Cor. 2.) ex qua c priori collata conſequeretur $C : mb = nb : mb$ (§. 17 et proinde $C = nb$ (§. 171. Cor. 2.) quod eſt contra hy

COR. Data proportione rationali $A : B = C : D$, que terminis B et D in m partes aequales diviſis, ut $B = ma$ et $D = mb$, ſi fuerit $A = na$; ſimul erit C nb. Poſito enim C in $= nb$, ponitur vera non eſſe p portio $A : B = C : D$ contra hyp.

§. 184.

Comparando quatuor quanta A, B, C, D *inter ſe, atque diviſis quantitatibus* B *et* D *in* m *partes aequales, ut ſit* B = ma *et* D = mb, *ſi inveniatur* A > na *et* A < (n+1) a; C *vero intra limites* nb *et* (n+1) b *non contineatur: vera non eſt proportio* A : B = C : D.

DEM. Quodſi C intra limites *nb* et (*n*+1) *b* non contineatur, aliud quantum E ipſi C inaequale intra ejusmodi limites continebitur; atque hæc proportio vera eſſet A : B = E : D (§. 182.). Poſito igitur A : B = C : D, foret C : D = E : D (§. 136.) et proinde C = E (§. 171. Cor. 2.) contra hypotheſin.

COR. Data proportione irrationali A : B = C : D, atque terminis B et D in *m* partes aequales diviſis, ut ſit B = *ma* et D = *mb*, ſi A contineatur intra limites *na* et (*n*+1) *a* ſimul C intra limites *nb* et (*n*+1) *b* continebitur. Ex oppoſita enim theſi fluit, proportionem A : B = C : D non eſſe veram, contra hypotheſin.

§. 185.

Si fuerit a + b *ſumma quantorum* a *et* b, *erit* n (a + b) *hujus ſummae multiplum quodcunque* = na + nb.

DEM. Quodſi enim partes *a* et *b* ſibi ipſi addantur, atque ex ſumma (*a*+*b*) toties ſibi addita, quoties in numero *n* eſt unitas, componatur quantum *n* (*a*+*b*) hoc ipſum quantum *n*(*a*+*b*) compoſitum erit ex omnibus quantorum *na* et *nb* partibus ſimul ſumtis, proinde *n* (*a*+*b*) quantis *na* et *nb* ſimul ſumtis erit aequale, ſeu quod idem eſt, fiet *n* (*a*+*b*) = *na* + *nb*.

COR. Quodſi fuerit *a* − *b* differentia quantorum *a* et *b*, erit *n*(*a*−*b*) = *na* − *nb*. Sit enim *a* − *b* = *d*, erit *a* = *d*+*b* et *na* = *nd* + *nb* (*dem.*) ex quo fit *nd* = *na* − *nb* (§. 21.) = *n* (*a*−*b*).

§. 186.

Si fuerit A : B = C : D *et quanta* C *et* D *quantis* A *et* B *homogenea; erit quoque* A ± C : B ± D = C : D.

 DEM.

DEM. Proportio $A:B=C:D$ vel rationalis e[st] vel irrationalis. Quodſi primo ſit rationalis, poſiti[s] $= ma$ et $D = mb$, exiſtente a quantorum A et B, b v[ero] quantorum C et D communi menſura, erit $A = na$, ſimul $C = nb$, (§. 183. Cor.) proinde $na : ma = nb : [mb]$. Addantur jam harum rationum aequalium termini an[te]cedentes et conſequentes, vel ſubtrahantur C ab A D a B, erit $A \pm C = na \pm nb$, et $B \pm D = ma [\pm] mb$. Quia jam eſt $na \pm nb = n(a \pm b)$ et $ma \pm mb [=] m(a \pm b)$; (§. *praec.*) erit $A \pm C = n(a \pm b)$, et [B] $\pm D = m(a \pm b)$. Ex §. [illegible] Cor. 2.) vero patet, e[sse] $n(a \pm b) : m(a \pm b) = na : mb$, quae proportio [e]adem eſt cum ſequente $A \pm C : B \pm D = C : D$.

Si proportio $A : B = C : D$ eſt irrationalis, poſi[to] $B = ma$ et $D = mb$, quemcunque numerum denotat[;] ſi $A > na$ et $A < (n+1)a$, erit ſimul $C > nb$ et C [<] $(n+1)b$ (§. 184. Cor.). Ex his deducitur $B \pm D [=] ma \pm mb = m(a \pm b)$, $A \pm C > na \pm nb$ et $A \pm [C] < (n+1)b \pm (n+1)b$, ſimul vero $C > nb$ et C [<] $(n+1)b$; id eſt $A \pm C > n(a \pm b)$ et $A \pm C < (n+[1])(a \pm b)$, ſimulque $C > nb$ et $C < (n+1)b$. Ex quo i[te]rum patet, eſſe $A \pm C : B \pm D = C : D$.

COR. Quodſi igitur fuerint plures analogiae hujusm[o]di $A : B = C : D$, $E : F = C : D$, $G : H = C : [D]$, $I : K = C : D$ etc, erit $A + E + G + I +$ etc, $: B + [F] + H + K +$ etc, $= C : D$.

§. 187.

Duorum quantorum A *et* B *aequemultipla et aeque ſu[b]multipla ſunt inter ſe ut ipſa quanta* A *et* B.

DEM. 1) Quia eſt $A : B = A : B$ (§. 169.) erit [A] $+ A : B + B = A : B$ (§. 186.), id eſt $2A : 2B = A : [B]$. Atque ſi fuerit $nA : nB = A : B$, erit quoque $(n+1) A [:] (n+1) B = A : B$ (§. 186.). Quia igitur eſt $2A : 2B [=] A : B$, erit quoque $3A : 3B = A : B$, et ideo porro 4A

$nB = A : B$ ſicque porro in infinitum. Quare generaliter eſt $nA : nB = A : B$.

2) Quodſi praeterea tam A quam B diviſa fuerint in partes aequales quotcunque numero m, ita ut quaelibet harum partium in A ſit $\frac{1}{m}$ A et quaelibet earum partium in B fiat $\frac{1}{m}$ B; erunt A et B aequemultipla quantorum $\frac{1}{m}$ A et $\frac{1}{m}$ B, proinde *per caſ. I.* eſt $A : B = \frac{1}{m} A : \frac{1}{m} B$.

COR. I. Prior §phi propoſitio etiam ſic exprimi poteſt. Si duo quanta A et B ſumantur pro unitatibus, ex iisque componantur duo alia quanta nA et nB ut numeri integri, ita quidem, ut numeri illi iidem ſint, haec quanta unitatibus ſuis erunt proportionalia.

COR. II. Ex propoſitione demonſtrata quoque ſequitur, hanc proportionem veram eſſe $n \frac{1}{m} A : n \frac{1}{m} B = \frac{1}{m} A : \frac{1}{m} B$. Proinde quia $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} B = A : B$, exinde deducitur ſequens analogia $n \frac{1}{m} A : n \frac{1}{m} B = A : B$ (§. 170.). Quia igitur $n \frac{1}{m}$ A ex A componitur ut numerus fractus ex unitate pariter ac $n \frac{1}{m}$ B ex B, ita quidem ut ſumtis A et B pro unitatibus, $n \frac{1}{m}$ A et $n \frac{1}{m}$ B per eundem exprimantur numerum

merum fractum $\frac{n}{m}$, non tantum expreſſio $n\frac{1}{m}$ coincidit cum ea $\frac{n}{m}$A, ſed etiam iſta exinde deducitur p... poſitio. Si ex duobus quantis A et B componantur duo a... quanta $\frac{n}{m}$ A et $\frac{n}{m}$ B ut numeri fracti, ita quide... ut numeri illi fracti iidem ſint; erunt iſta quanta unitati... ſuis proportionalia.

COR. III. Quodſi igitur generaliter n et m denot... duos numeros diverſos quoscunque, vel integros, ... fractos; erit $nA : nB = mA : mB$. Eſt enim $nA : n$B... $A : B$ et $mA : mB = A : B$, proinde $nA : nB = mA :$... (§. 179.).

§. 188.

In proportione geometrica, cujus termini omnes ſ... homogenei, eſt (permutando) *terminus primus ad terti... uti ſecundus ad quartum.*

DEM. Si primo fuerit proportio $A : B = C :$ ... rationalis, atque a quantorum A et B, b vero quantor... C et D communis menſura, ut $A : B = C : D$ eadem cum iſta analogia $na : ma = nb : mb$; ſtatim patet, pr... portionem $na : nb = ma : mb$ veram eſſe ex *Cor.* 3. §. *pr*... quae eadem eſt cum iſta $A : C = B : D$. Quodſi ve... proportio $A : B = C : D$ ſit irrationalis, atque term... B et D diviſi fuerint in partes aequales quotcunque, q... rum numerus ſit m, ita ut fiat $B = ma$ et $D = mb$; e... $A > na$ et $A < (n+1)\, a$, et praeterea $C > nb$ et C... $(n+1)\, b$. Dico et hoc caſu proportionem $A : C = B :$ ... vel $A : C = ma : mb$, vel quod idem eſt $ma : mb =$ ... C veram eſſe. Si enim falſa ſit, quarta proportion... ad quanta ma, mb, et A vel major vel minor eſſet qu... to C, quod tamen impoſſibile eſſe ſic demonſtro. Sit p... mo $E < C$, et proportio $ma : mb = A : E$ vera, at...

bi

biſſectione ipſius b continua effici poteſt, ut fiat $nb > E$ (§. 181.). Factum ſit, eritque perpetuo $ma : mb = na : nb$ (*per dem.*), ex qua analogia cum priori $ma : mb = A : E$ collata conſequitur $na : nb = A : E$. Eſt vero perpetuo $na < A$, proinde foret $nb < E$, quod pugnat cum hypotheſi $nb > E$.

Quodſi ſecundo fuerit $E > C$ atque proportio $ma : mb = A : E$ vera eſſe ſumatur, ſimile abſurdum ſequitur. Primo enim patet proportionem $mb : ma = C : F$ eſſe falſam, ſi $F < A$ (*per dem.*). Deinde ſi quartum proportionale ad quanta E, A et C ſit F, ita ut proportio $E : A = C : F$ vera ſit, ob $C < E$, debet eſſe $F < A$. Ex hac vero analogia cum priori $ma : mb = A : E$ vel $mb : ma = E : A$ collata deducitur $mb : ma = C : F$, quam falſam eſſe ob $F < A$ jam demonſtratum eſt. Quartum igitur proportionale ad quanta ma, mb et A non aliud eſt niſi C, et proinde proportio $ma : mb = A : C$ vel $A : C = ma : mb$, vel $A : C = B : D$ eſt vera.

§. 189.

Ex proportione $A : B = C : D$ *etiam ſequitur proportio* $nA : B = nC : D$ *vel* $A : nB = C : nD$, *pro* n *ſcripto numero integro vel fracto quocunque.*

DEM. Si fuerit $A : B = C : D$, erit quoque $A : C = B : D$, et quia $A : C = nA : nC$ (§. 118. cum Cor.): erit $nA : nC = B : D$ (§. 170.), proinde $nA : B = nC : D$ (§. 188.). Deinde quoque eſt $B : D = nB : nD$, hincque $A : C = nB : nD$, ergo quoque $A : nB = C : nD$ (§. 188.). Loco n etiam numerum fractum poni poſſe ex Cor. 3. §. 187. apparet.

COR. Ex proportione igitur $A : B = C : D$ iſta quoque conſequitur $nA : mB = nC : mD$.

§. 190.

In omni proportione $A : B = C : D$ *eſt ſumma termini primi et ſecundi ad terminum ſecundum, uti ſumma termini tertii et quarti ad terminum quartum. Atque ſi fue-*

 rit

rit B $<$ A, *et proinde quoque* D $<$ C; *erit* A $-$ B : B $=$ C $-$ D : D.

DEM. Ex proportione A : B $=$ C : D fluit A : C $=$ B : D (§. 188.) atque ex hac denuo A $+$ B : C $+$ D $=$ B : D (§. 186.) et A $-$ B : C $-$ D $=$ B : D (§. 186.). Proinde habetur A $+$ B : B $=$ C $+$ D : D et A $-$ B : B $=$ C $-$ D : D (§. 188.).

§. 191.

Si dentur duae proportiones A : B $=$ C : D *et* E : F $=$ G : H, *et termini earundem ordine ad ſe invicem addantur, vel poſterioris termini a terminis prioris ordine ſubtrahantur; ſummae vel differentiae iterum ſunt in proportione geometrica.*

DEM. 1) Si utraque proportio ſit rationalis ut loco prioris habeatur $na : ma = nb : mb$ et loco poſterioris $nc : mc = nd : md$; ſtatim patet, eſſe $na \pm nc : ma \pm mc = nb \pm nd : mb \pm md$, vel $n(a \pm c) : m(a \pm c) = n(b \pm d) : m(b \pm d)$ (§. 178. Cor. 2.).

2) Si una earum eſt rationalis $na : ma = nb : mb$ et altera irrationalis E : mc $=$ G : md; erit A $= na$ et A $<$ $(n+1)\,a$, C $= nb$ et C $<$ $(n+1)\,b$, B $= ma$, F $= mc$, D $= mb$, H $= md$. E $> nc$ et E $<$ $(n+1)\,c$, G $> nd$ et G $<$ $(n+1)\,d$. Ex his deducitur B $\pm$ F $= ma \pm mc$ et D $\pm$ H $= mb \pm md$. A $\pm$ E $> na \pm nc$ et A $\pm$ E $<$ $(n+1)\,a \pm (n+1)\,c$. Denique C $\pm$ G $> nb \pm nd$ et C $\pm$ G $<$ $(n+1)\,b \pm (n+1)\,d$. Ergo et hoc caſu eſt A $\pm$ E : B $\pm$ F $=$ C $\pm$ G : D $\pm$ H (§. 182.).

3) Si utraque harum proportionum eſt irrationalis reliquis manentibus ſit A $> na$ et A $<$ $(n+1)\,a$, C $> nb$ et C $<$ $(n+1)\,b$, atque ideo et hoc caſu eſt B $\pm$ F $= ma \pm mc$, D $\pm$ H $= mb \pm md$, A $\pm$ E $> na + nc$, A $\pm$ E $<$ $(n+1)\,a \pm (n+1)\,c$, atque ſimul C $\pm$ G $> nb \pm nd$, C $\pm$ G $<$ $(n+1)$ b $\pm$ $(n+1)\,d$. Proinde A $\pm$ E : B $\pm$ F $=$ C $\pm$ G : D $\pm$ H (§. 182.).

COR. Hinc et pluribus proportionibus datis

$$A : B = C : D$$
$$E : F = G : H$$
$$I : K = L : M, \text{ etc.}$$

habetur $A + E + I : B + F + K = C + G + L : D + H + M$.

§. 192.

Si fuerit ratio quaedam A : C *compoſita ex duabus rationibus* M : N et O : P; *ratio, quae ex iisdem rationibus* O : P et M : N *ſed inverſo ordine componitur, priori* A : C *erit aequalis.*

DEM. Si fuerit $A : B = M : N$, et $B : C = O : P$, ratio A : C, ex rationibus M : N et O : P erit compoſita. Si praeterea fuerit $A : D = O : P$ et $D : E = M : N$, ratio A : E ex iisdem ſimplicibus ſed inverſo ordine componitur. Dico rationem A : C aequalem eſſe rationi A : E, quod erit demonſtratum, ſi oſtenſum fuerit, eſſe $E = C$. Eſt vero ex hypotheſi $A : B = M : N$, et $D : E = M : N$; proinde $A : B = D : E$. Deinde $B : C = O : P$ et $A : D = O : P$, ideo $A : D = B : C$ (§. 170.) et $A : B = D : C$ (§. 188.) ex qua analogia cum priori $A : B = D : E$ collata patet, eſſe $D : C = D : E$, et proinde $C = E$. Ratio igitur A : C rationi A : E aequalis eſt.

COR. Ideo generaliter duae rationes ex eodem numero rationum ſimplicium aequalium quocunque ordine compoſitae ſunt rationes aequales.

§. 193.

Si fuerit $A : B = M : N$ *et* $B : C = O : M$, *erit* (perturbate et ex aequo) $A : C = O : N$.

DEM. Ratio A : C compoſita eſt ex rationibus M : N et O : M, atque ratio O : N ex iisdem compoſita eſt rationibus ſed inverſo ordine. Proinde ratio A : C rationi O : N aequalis erit (§. *praec.*).

COR. I. Si dentur duæ proportiones, $A : B = M : N$ et $C : B = M : O$, ita ut termini medii in utraque proportione ſint iidem, erit quoque $A : C = O : N$. Ultima enim proportio ſic ſcribi poteſt $B : C = O : M$. Tum vero, ut demonſtratum eſt, ſequitur proportio $A : C = O : N$.

COR. II. Si in duabus proportionibus $B : A = N : M$ et $B : C = O : M$ termini extremi ſint iidem, ſequitur haec proportio $A : C = O : N$, cujus conſequentiae veritas patet, proportionis primae terminis ita transpoſitis $A : B = M : N$.

§. 194.

Si fuerit ratio $A : C$ *compoſita ex duabus rationibus* $M : N$ *et* $O : P$; *eadem ratio quoque compoſita erit ex rati-nibus* $O : N$ *et* $M : P$, *vel* $M : P$ *et* $O : N$, *quae oriuntu terminis rationum ſimplicium primis vel ſecundis ſolis tran poſitis.*

DEM. 1) Sit enim $A : B = M : N$ et $B : C = O$ P, atque erit $A : C = \begin{pmatrix} M : N \\ O : P \end{pmatrix}$. Deinde ſit $A : I$ $= O : N$ et $D : E = M : P$, erit $A : E = \begin{pmatrix} O : N \\ M : P \end{pmatrix}$. Ja dico eſſe $A : C = A : E$, quod demonſtrabitur oſtenden do, eſſe $C : E$, ſic argumentando. Quia eſt $O : N =$ $A : D$, et $M : N = A : B$, erit $O : N = B : D$ (§. 19 Cor. 1.), ex proportione vero $B : C = O : P$ ſequitur $: O = C : B$ (§. 168. Cor. 3.) quae cum priori compara dat $P : M = C : D$; atque cum hac comparata $D : E =$ $M : P$ vel $P : M = E : D$ habetur $C : D = E : D$ (§. 107 unde concluditur $C = E$.

2) Quodſi deinde fuerit $A : B = M : N$ et $B : C$ $O : P$, vel $A : C = \begin{pmatrix} M : N \\ O : P \end{pmatrix}$, praeterea $A : D = N$ P et $D : E = O : N$, id eſt $A : E = \begin{pmatrix} M : P \\ O : N \end{pmatrix}$, dico i

ri

rum fore A : C = A : E, quod patebit demonſtrando eſſe C = E ſequentem in modum. Ex analogia A : D = M : P vel P : M = D : A comparata cum analogia A : B = M : N, vel M : N = A : B fluit P : N = D : B (§. 192.) atque cum hac analogia ſi comparetur O : P = B : C, habemus O : N = D : C (§. 192.) quare cum ſit O : N = D : E fiet D : C = D : E (§. 170.) et proinde C = E (§. 171. Cor. 3.).

COR. Si igitur generaliter fuerit $A : X = \begin{cases} M : N \\ O : P \\ Q : R \\ S : T \text{ \&c.} \end{cases}$; terminis primis M, O, Q, S, et ſecundis N, P, R, T, utcunque inter ſe permutatis ratio A : X non mutabitur.

SECTIO VII.

DE FIGVRARVM PLANARVM RECTILINEARVM SIMILITVDINE.

§. 195.

Triangula aequalium altitudinum ſunt in ratione baſium.

DEM. Si altitudines triangulorum ABC et DEF aequales ſunt, in baſe majori fiat EG = BC et ducatur DG, eritque △ DEG = △ ABC. Tum vero EG et DF erunt aut commenſurabiles, aut incommenſurabiles. Si prius ſit, atque EH fuerit earum communis menſura, haec EH ab E verſus F ponatur toties, quoties fieri poteſt, F. 90.

atque

atque EG et EF exprimi poterunt per numerum quendam integrum ex unitate EH, ita ut ſit EG $= na$ et EF $= ma$, poſito EH $= a$. Ducatur DH atque triangulum DEH fiet communis menſura triangulorum DEG et DEF, quod ultro patet, ſi a D ad omnia puncta diviſionis in EF ducantur rectae. Hoc enim facto triangulum DEG dividetur in tot triangula ipſi DEH aequalia, quot partes habet EG ipſi EH aequales, et DEF dividetur in tot triangula ipſi DEH aequalia, quot partes habet EF ipſi EH aequales, ſic ut poſito DEH $= b$, fiat DEG $= nb$, et DEF $= mb$. Proportionem vero $na : ma = nb : mb$, quae eadem eſt cum EG : EF = DEG : DEF, veram eſſe, ex §. 178. Cor. 2. patet, ex qua ob DEG = ABC et EG = BC fluit BC : EF = ABC : DEF.

Si EG et EF forent incommenſurabiles, EF dividatur in partes aequales quocunque numero, qui ſit m, atque EG harum partium numerum quendam n ſuperabit, ſed numero $n + 1$ earum partium minor erit, quicunque numerus ſit m. Tum vero ſi a D ad omnia diviſionis puncta in EF ducantur rectae, fiet DEF $= m$DEH, DEG vero $> n$DEH et $< (n+1)$ DEH. Quare cum etiam perpetuo ſit EG $> n$EH et EG $< (n+1)$ EH, hoc quoque caſu proportio EG : EF = DEG : DEF vel ABC : EF = ABC : DEF obtinet (§. 182.).

F. 91. COR. I. Ideo triangula ABC et DEF aequalium baſium ſunt ut altitudines AG et DH. Fiat enim GL = C et HI = EF. Ducantut rectae AL et DI, eritque $\triangle$AB : $\triangle$DEF = $\triangle$ALG : $\triangle$DHI = AG : DH.

COR. II. Parallelogramma aequalium altitudinum ſunt in ratione baſium et parallelogramma aequalium baſium ſunt in ratione altitudinum, quia ſunt ejusmodi triangulorum dupla (§. 187.).

§. 196.

Si in triangulo ABC ducatur DE lateri BC parallela erit AD : DB = AE : EC.

DE

DEM. Ductis enim rectis DC et EB fiunt triangula DBE et DEC aequalia (§. 114. Cor. 1.). Ideo eſt ADE : DBE = ADE : DEC (§. 169. Cor. 2.). Praeterea eſt ADE : DBE = AD : DB, hincque ADE : DEC = AD : DB. Denique et ADE : DEC = AE : EC (§. 194.) proinde AD : DB = AE : EC (§. 170.). F. 92.

COR. I. Hinc datis duabus rectis F et G vel tribus F, G et H reperitur tertia vel quarta proportionalis, faciendo angulum quemcunque BAC et capiendo AD = F. BD = G, atque in priori caſu AE = G, in poſteriore vero AE = H, tum vero ducta recta DE et huic parallela BC: quo facto erit EC quaeſita.

COR. II. Ex propoſitione AD : DB = AE : EC porro ſequitur, fore AD + DB : DB = AE + EC : EC (§. 190.) id eſt AB : DB = AC : EC. Deinde quoque DB : AD = EC : AE, et DB + AD : AD = EC + AE : AE, id eſt AB : AD = AC : AE.

§. 197.

Trianguli ABC lateribus AB et AC ita diviſis in D et E, ut ſit AD : DB = AE : EC, ſi ducatur recta DE; ea lateri BC erit parallela.

DEM. Quia AD : DB = AE : EC (*hyp.*) et triang. ADE : DBE = AD : DB, triang. ADE : ECD = AE : EC, erit triang. ADE : DBE = ADE : ECD, ideoque triangulum DBE = ECD (§. 171. Cor. 3.) proinde rectae BC et DE ſunt parallelae (§. 114. Cor. 3. et 111. Cor. 3.).

§. 198.

In triangulo ABC ducta linea recta DE baſi BC parallela, ſi BD dividatur bifariam in G atque EC in H, ducaturque tertia intermedia GH; erit haec GH = ½DE + ½BC.

DEM. Recta DE in F atque BC in I bifariam dividatur, ducanturque rectae GF, BE, IH. Iam in triangulo DBE eſt DF : FE = DG : GB, ergo GF et EB ſunt rectae parallelae. In triangulo CBE eſt CI : IB F. 93.

=

$=CH:HE$, atque adeo rectae IH et BE parallelae. Praeterea, quia eſt DE ipſi BC parallela, erit $AD:DB = AE:EC$, (§. 196.), $AD:\frac{1}{2}DB = AE:\frac{1}{2}EC$ (§. 189. et ideo $AD:DG = DE:EH$. Proinde et DE et GH parallelae ſunt, atque FGKE eſt parallelogrammum, u et KHIB, hincque $GK = EF = \frac{1}{2}DE$, $KH = BI = \frac{1}{2}BC$ et $GH = GK + KH = \frac{1}{2}DE + \frac{1}{2}BC$.

§. 199.

Si trianguli ABC angulus BAC bifariam ſectus ſit recta autem AD angulum ſecans ſecuerit et baſin in D, ſegmenta baſis BD et CD proportionalia ſunt reliquis trianguli lateribus AB et AC: Et vice verſa ſi baſis ſegmenta BD et DC eandem habeant rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera, recta AD ex vertice ad punctum D ducta bifariam ſecat angulum baſi oppoſitum.

F. 94. DEM. Producatur BA, et fiat $AE = AC$. Ducta jam recta CE, erit

1. $BAC = ACE + E$ (§. 93. Cor. 3.) $= BAD + DAC$. Eſt vero $ACE = E$ (§. 60.) et $BAD = DAC$ (*hyp.*) ergo $E = DAC$, (§. 21.) atque recta DA ipſi CE parallela. Proinde $BA:AE$ vel $AC = BD:DC$.

2. $BA:AC$ vel $AE = BD:DC$ (*hyp.*) hincque recta DA rectae CE parallela (§. 197.) ergo ang. $BAD = E$ (§. 99.). Praeterea eſt angul. $DAC = ACE$ (§. 99.) et $ACE = E$ (§. 60.) quare $DAC = BAD$ (§. 13. Cor. 2.).

§. 200.

Datam rectam AB in ea ratione ſecare, in qua ſecta eſt data quaevis alia AC.

F. 95. SOL. Lineae datae AC et AB connectantur ſub angulo quocunque, ducaturque recta BC. Per data diviſionis puncta in AC ducantur rectae DF, EH rectae BC parallelae, quae rectam AB, ut poſcitur, divident.

DEM. Eſt enim $AF:FG = AD:DE$ (§. 196. Per punctum D ducatur DI ad AB parallela, quo fact

ei

erit DE : EC = DH : HI, et quia FG = DH, et GB = HI (§. 107.) etiam DE : EC = FG : GB.

COR. Simili operatione recta quaevis data in partes quotcunque aequales dividitur.

§. 201.

Aequiangulorum triangulorum ABC, DCE *proportionalia ſunt latera, quae reſpectu angulorum aequalium eodem modo ſunt poſita.*

DEM. Statuatur latus BC in directum lateri CE et producantur ED, BA, donec ſibi mutuo in F occurrant. Quia angul. ABC = DCE (*hyp.*) erunt DC et FA parallelae, et quia angul. ACB = DEC (*hyp.*) etiam AC et FD parallelae erunt (§. 89. Cor. 1.) proinde eſt DC = AF, et FD = AC (§. 107.). Eſt vero AB : AF = BC : CE (§. 195.) ſive AB : DC = BC : CD (§. 169.). Praeterea EC : BC = ED : DF vel AC (§. *cit.*), ſive AC : ED = BC : EC (§. 168. Cor. 3.) hincque et AC : ED = AB : DC. F. 96.

§. 202.

Figurae planae rectilineae dicuntur *ſimiles*, ſi aequiangulae ſunt, et latera reſpectu aequalium angulorum eodem modo poſita proportionalia habent. Geometrae ſequenti ſigno (∽) utuntur ad denotandam figurarum ſimilitudinem.

COR. I. Figurae planae rectilineae, quae ſibi mutuo congruunt, ſunt figurae ſimiles.

COR. II. Omnia triangula aequiangula ſibi ſunt ſimilia (§. 201.) et omnia polygona regularia, quorum numerus laterum idem eſt, quia angulus, quem duo quaevis latera eiusmodi figurarum includunt, eſt conſtantis magnitudinis. Nimirum denotante *n* numerum laterum polygonorum angulus ille aequalis eſt ſummae omnium angulorum $2nR - 4R$ (§. 93. Cor. 8.) in *n* partes aequales diviſae (§. 148.). Laterum proportionalitas evidens eſt.

COR. III.

F. 92. COR. III. Si in triangulo ABC ducatur recta DE lateri BC parallele, triangulum ADE, quod reſecat erit toti ABC ſimile.

§. 203.

Quodſi punctum quoddam A ſumatur vel intra vel ext circulum atque per idem ducantur duae rectae circulum cantes, quarum una circulo in punctis B *et* C, *altera punctis* D *et* E *occurrat; erunt partes unius harum rectarum ſecantium inter punctum* A *et puncta interſectionis circulo interceptae mediae proportionales inter partes terius interceptas inter punctum* A *et puncta interſection cum circulo.*

F. 97. DEM. Ductis lineis rectis BE et DC fiunt ang BCD et BED aequales, (§. 146. Cor. 2.). Cum er et triangulorum ABE et ADC anguli apud A aequal ſint (§. 31. et 13.) erunt iſta triangula ſimilia (§. 203. C 1. coll. cum §. 93. Cor. 3.) ideoque AB : AD = A : AC.

COR. Si punctum A extra circulum fuerit aſſumtu atque angulus A creſcat, differentia DE mediarum int AB et AC proportionalium decreſcit, atque evaneſc quando AE degenerat in rectam circulum tangentem, pu ctaque D et E in idem coincidunt: quo caſu AD vel A fit media proportionalis inter AB et AC.

§. 204.

Figurae rectilineae ſimiles eidem tertiae et inter ſunt ſimiles.

F. 98. DEM. Si figurae ABC et DEF ſimiles ſunt fig rae GHI, erit angul. A = G = D, angul. C = H = et angul. B = I = F. Deinde AB : AC = GI : GH DF : DE, praeterea AC : CB = GH : HI = DE : E et denique AB : BC = GI : IH = DF : FE. Ergo gurae ABC et DEF ſunt ſimiles.

§. 205.

Datis duabus rectis AE, EB *invenire mediam p portionalem.*

SOL. Fiat AB = AE + EB, atque ſuper eadem F. 99.
deſcribatur ſemicirculus. Erigatur ex E perpendicularis eaque producatur usque ad peripheriam in F, quae recta EF erit media proportionalis quaeſita.

DEM. In triangulis AFE et AFB eſt AFB = R = AEF, A = A, hinc triang. AFE ∽ triang. AFB. Deinde etiam in triangulis AFB et FEB eſt angul. AFB = R = FEB, B = B, ideoque triangul. AFB ∽ triang. FEB. Proinde quoque triang. AFE ∽ triang. FEB (§. 204.), et AE : EF = EF : EB (§. 202.).

COR. I. Si in triangulo rectangulo ex apice anguli recti ad latus oppoſitum ducatur perpendicularis, triangulum dividitur in duo alia et inter ſe et toti ſimilia.

COR. II. Linea recta, quae in circulo a quovis puncto diametri ipſi diametro perpendicularis ducitur usque ad peripheriam, media eſt proportionalis inter duo diametri ſegmenta.

§. 206.

Triangula ABC et DEF, quorum ſingula latera homologa ſunt proportionalia, ſimilia ſunt.

DEM. Fiat angulus FEG = B et EFG = C, quo F. 100.
facto erunt ABC et EFG triangula aequiangula (§. 93. Cor. 6.) hincque AB : BC = EG : EF, et AC : CB = FG : EF (§. 202. Cor. 2.). Sed eſt AB : BC = DE : EF et AC : CB = DF : EF (*hyp.*) ergo EG : EF = DE : EF et FG : EF = DF : EF (§. 170.) proinde EG = DE, et FG = DF (§. 171. Cor. 2. 3.). Ex hoc autem ſequitur, fore angulum DEF = GEF et DFE = EFG (§. 75.) ideoque *per conſtr.* DEF = ABC atque DFE = ACB, proinde et BAC = EDF, atque triang. ABC ∽ triang. DEF (§. 202. Cor. 2.).

§. 207.

Triangula, quae unum angulum aequalem habent, et latera angulum aequalem comprehendentia proportionalia, ſunt ſimilia.

DEM. Si in triangulis ABC et DEF fuerit B =

DEF, et AB : BC = DE : EF, conſtruatur angulu FEG = B et EFG = C, eritque G = A (§. 93. Cor. 6.) praeterea vero GE : EF = AB : BC (§. 202. Cor.) hinc que GE : EF = DE : EF (§. 170.) et GE = DE (§ 171. Cor. 2.). Denique eſt DEF = ABC = FEG (*conſtr.* et FE = FE, proinde angulus D = G = A, et DFI = EFG = C, quare triang. ABC ∽ triang. DEF.

§. 208.

Triangula, quae unum angulum aequalem habent, e praeterea duo latera angulum aequalem non comprehenden tia proportionalia, quorum illud, quod angulo aequali oppo nitur, majus eſt adjacente, ſunt triangula ſimilia.

F.101. DEM. Si in triangulis ABC et DEF eſt B = DEF praeterea vero AB : AC = ED : DF, fiat angulus DEC = B et EDG = A, eritque et EGD = C. Porro au tem DE : GD = AB : AC (§. 202. Cor. 2.) = ED : DF (*hyp.*) hinc eſt GD = DF (§. 171. Cor. 3.). Cum prae terea ſit DE = DE, DF > DE (*hyp.*) hincque et GI > DE, et angulus GED = B = DEF (*conſtr.*) erit quo que EGD = C = EFD et GDE = A = FDE (§. 87.) ex quo ſequitur, eſſe triangulum ABC ∽ DEF (§. 20: Cor. 2.).

COR. Omnia triangula rectangula et obtuſangula, qua angulum obtuſum aequalem habent, ſimilia ſunt, in qui bus latera angulum rectum vel obtuſum non comprehen dentia ſunt proportionalia.

§. 209.

Figurae rectilineae ſimiles reſolvuntur in triangula ſ milia, ſi apices angulorum aequalium eodem modo per line rectas connectantur.

F.102. DEM. Nam angulus B = G, et AB : FG = BC GH, (*hyp.*) ideo eſt triang. ABC ∽ triang. FGH (§. 207. ex quo fluit BC : GH = CA : HF. Praeterea eſt BC GH = CD : HI, proinde CA : HF = CD : HI, et BC − BCA = ACD = GHI − GHF = FHI, ergo trian ACD ∽ triang. FHI, et CD : HI = AD : FI. Deniqu

CD

CD : HI = DE : IK, hincque AD : FI = DE : IK, et CDE - CDA = HIK - HIF = ADE = FIK. Ideo quoque triang. ADE ∽ triang. FIK.

COR. Si ea, quae hucusque §. §. 195 - 209. ſunt explicata conferantur cum §§. 57. 74. 86. 97 et 98. ex iis ſequuntur ſolutiones problematum: Dato triangulo vel generatim alia figura plana rectilinea conſtruere figuram datae ſimilem.

SECTIO II.

DE COMPARATIONE FIGVRARVM PLANARVM, ET, QVAE HINC PENDENT, PROBLEMATVM PLANORVM CONSTRVCTIONIBVS.

§. 210.

Triangula quaevis ſunt in ratione compoſita ex rationibus baſium et altitudinum.

DEM. Si propoſita fuerint duo triangula ABC et DEF, cum iis comparetur tertium triangulum GHI, *cuius altitudo GM ſit aequalis altitudini AK, baſis autem HI aequalis baſi EF*, et erit ABC : GHI = BC : (HI = EF) GHI : DEF = (GM = AK) : DI, id eſt ABC : DEF = $\left\{\begin{array}{l} BC : EF \\ AK : DI \end{array}\right\}$ (§. 173.).

COR. I. Quia eſt 2ABC : 2DEF = Pgr. AC : Pgr. DF = ABC : DEF (§. 187.), erunt quoque parallelogramma quaevis in ratione compoſita ex rationibus baſium et altitudinum.

COR. II. Si altitudines parallelogrammorum vel triangulorum fuerint ut eorum baſes, parallelogramma vel triangula erunt in ratione duplicata baſium vel altitudinum.

COR. III. Omnia quadrata ſunt in ratione duplicata laterum hincque figurae planae quaevis, quae ſunt in ratione duplicata aliquorum laterum, ſunt uti quadrata eorundem laterum.

§. 211.

Triangulorum ſimilium altitudines ſunt in ratione baſium.

F.104. DEM. In triangulis ſimilibus ABC et DEF ſint anguli B et E, C et F aequales, ſumtisque BC et EF pro baſibus erunt ad has demiſſae altitudines AG et DH. Jam triang. ABG ∽ triang. DEH et triang. AGC ∽ triang. DHF (§ 202. Cor. 2.) inde ſequuntur analogiae BG : EH = AG : DH et GC : HF = AG : DH, unde BG + GC :
F.105. EH + HF (vel BG − GC : EH − HF, ſi perpendiculares AG et DH cadant extra triangula) = AG : DH (§. 186.) id eſt BC : EF = AG : DH.

COR. I. Triangula ſimilia ſunt in ratione duplicata laterum homologorum (§. 210. Cor. 2.). Duae enim quaecunque triangulorum ſimilium latera homologa ſumi poſſunt pro eorundem baſibus.

F.102. COR. II. Omnes figurae rectilineae ſimiles ſunt in ratione duplicata homologorum laterum AB et FG vel diagonalium AC et FH. Diviſis enim figuris in triangula ſimilia erit ratio cujuslibet trianguli in figura ABCDE ad triangulum illi ſimile in figura FGHIK duplicata rationis AB : FG, vel AC : FH. Ergo et ſumma triangulorum in priori ad ſummam in poſteriori figura, id eſt, ipſa figura prior ad poſteriorem, eſt in eadem ratione (§. 186. Cor.).

COR. III. Figurae regulares ſimiles circulo inſcriptae ſunt in ratione duplicata radiorum vel diametrorum illi

rı

rum circulorum, quibus ſunt inſcriptae. Figurae enim regulares ſimiles circulo inſcriptae dividuntur in triangula ſimilia, ſi ex centro circuli ad apices angulorum ducantur rectae, quae erunt radii ejus circuli, cui inſcripta eſt figura. Ratio autem cujuslibet trianguli in una figura ad triangulum illi ſimile in altera figura erit duplicata rationis illorum radiorum. Quia praeterea ratio radiorum eadem eſt cum ratione diametrorum, (§. 186.) etiam duplicata ratio radiorum eadem eſt cum duplicata ratione diametrorum (§. 170.).

COR. IV. Sic et mutatis mutandis demonſtrabitur de figuris regularibus ſimilibus circulo circumſcriptis, quod earum ratio ſit duplicata radiorum vel diametrorum illorum circulorum, quibus ſunt circumſcriptae. A centro enim circuli ad apices angulorum ejusmodi figurarum atque ad puncta contactus laterum cum circulo ſi ducantur rectae, polygona reſolvuntur in bis tot triangula rectangula ſimilia quot ſunt latera polygonorum. Ratio autem cujuslibet trianguli in una figura ad triangulum in altera figura eſt duplicata rationis illorum radiorum vel diametrorum.

§. 212.

Parallelogrammorum BD et BF aequalium et unum angulum ABC uni EBG aequalem habentium latera, quae angulos aequales comprehendunt, ſunt reciproce proportionalia: Et parallelogramma unum angulum ABC uni EBG aequalem habentia, quorum latera hunc angulum aequalem comprehendentia ſunt reciproce proportionalia, aequalia ſunt.

DEM. Si parallelogramma BD et BF talem habeant ſitum, ut latera AB et BG ſint in directum, etiam BE et BC in directum jacebunt (§. 31. Cor. 2.). Producantur FG et DC donec in H concurrant et terminent parallelogrammum BH. F. 106.

1. Jam AB : BG = BD : BH et BE : BC = BF : BH (§. 195. Cor. 2.). Sed BD = BF (*hyp.*) hinc BE :

BC = BD : BH, et AB : BG = BE : BC (§. 170).

2. AB : BG = BD : BH et BE : BC = BF : BH (§. 195. Cor. 2.) praeterea AB : BG = BE : BC, proinde BD : BH = BF : BH (§. 170.) et BD = BF (§. 17 Cor. 2.).

§. 213.

Triangulorum ABC et DBE aequalium, et unum angulum ABC uni DBE aequalem habentium latera, quae angulum aequalem comprehendunt, ſunt reciproce proportionalia: Et triangula unum angulum ABC uni DBE aequalem habentia, quorum latera angulum aequalem comprehendentia ſunt in proportione reciproca, aequalia ſunt.

F.107. DEM. Latera CB, BD, circa aequales angulos ſtatuantur ſibi in directum, et ABE erit linea recta (§. 31. Cor. 2.). Ducatur CE. Jam erit AB : BE = triang. ABC : triang. CBE, et DB : BC = triang. DBE : triang. CBE. Si igitur

1. fuerit ABC = DBE, erit AB : BE = DB : BC. Si vero

2. fuerit AB : BE = DB : BC, erit ABC : CBE = DBE : CBE (§. 170.), hincque ABC = DBE (§. 171. Cor. 2.).

COR. Triangulorum rectangulorum aequalium catheti ſunt in reciproca proportione, et triangula rectangula, quorum catheti ſunt in reciproca proportione, aequalia ſunt.

§. 214.

Si quatuor lineae rectae AB, FG, EF, CB proportionales fuerint; rectangulum AC, quod ſub extremis AB, CB comprehenditur, aequale eſt rectangulo EG, quod ſub mediis EF et FG comprehenditur. Et vice verſa, ſi fuerit rectangulum AC aequale rectangulo EG, erit AB : FG = EF : CB.

F.108. DEM. Anguli B et F recti, et proinde aequales ſunt (§. 26.) praeterea ex

1.

1. *hyp.* eſt AB : FG = EF : CB, hincque rectang. AC = EG (§. 212.).

2. *hyp.* AC = EG, proinde AB : FG = EF : CB (§. *cit.*).

COR. Si duae mediae proportionales EF et FG aequales fuerint, quadratum lateris FG, vel EF, aequale erit rectangulo, quod ſub extremis AB et CB comprehenditur. Ac ſi fuerit rectang. ſub AB et CB = FGq, erit AB : FG = FG : CB.

§. 215.

Si altitudines parallelogrammorum vel triangulorum baſibus reciproce proportionales fuerint, parallelogramma vel triangula erunt aequalia: Et parallelogrammorum vel triangulorum aequalium baſes altitudinibus reciproce proportionales ſunt.

DEM. 1. Loco parallelogrammorum AC et FH conſtruantur rectangula DI et LH ipſis reſpective aequalia (§. 113. Cor. 2.), atque ſi fuerit 1. *AD* : *EH* = *HM* : *DK*, erit rectang. DI = LH, hinc et Pgr. AC = FH. Si vero ſit 2. *Pgr.* AC = FA, et ideo rectang. DI = LH, erit AD : EH = HM : DK. F. 109.

2. Loco triangulorum ABC et DEF conſtruantur triangula rectangula AGC et DFH ipſis reſpective aequalia (§. 114. Cor. 2.) quo facto ſit fuerit 1. AC : DF = FH : CG, eſſe debet triang. ACG = DFH, hinc et triang. ABC = DEF. Si vero fuerit 2. ABC = DEF, et ideo ACG = DFH, eſſe debet AC : DF = FH : CG. F. 110.

§. 216.

Quadrare figuram planam eſt conſtruere quadratum, quod datae figurae planae aequale eſt.

§. 217.

Quadrare rectangulum.

SOL. Datum ſit rectangulum AC, unum ipſius laterum ut AB prolongetur verſus E et fiat BE = BC. Super AE in G bifariam diviſa deſcribatur ſemicirculus F. 111.

atque producatur latus BC, donec ſemicirculo occurrat in F. Recta BF erit latus quadrati quaeſiti.

DEM. Recta BF eſt media proportionalis inter AB et BE vel BC (§. 205. Cor. 2.) quae ſunt rectanguli dati latera, proinde BFq = rectangulo dato AC (§. 214. Cor.).

COR. Cuilibet parallelogrammo obliquangulo (§. 113. Cor. 2.) ut et triangulo (§. 116.) aequale rectangulum conſtrui poteſt. Conſtructo igitur quadrato huic rectangulo invento aequali habetur parallelogrammi obliquanguli vel trianguli quadratura.

§. 218.

Quadrare polygonum regulare.

§. 112. SOL. Ducatur recta CD, eaque fiat aequalis perimetro polygoni dati A, ex uno ipſius puncto extremo D erigatur DG perpendicularis, eaque fiat aequalis perpendiculari AB ex centro circuli polygono dato circumſcripti ad ejus latus. Biſſecetur CD in E atque lateribus ED et DG compleatur rectangulum EG (§. 108.) Conſtruatur quadratum huic rectangulo aequale (§. 217.)

DEM. Polygonum A aequale eſt triangulo CGD (§. 152.) et huic triangulo aequale eſt rectangulum EG (§. 116.) quare polyg. A = EG

COR. Si CD ſumatur aequalis peripheriae circuli A et perpendicularis DG aequalis radio hujus circuli, rectangulum EG erit circulo A aequale (§. 165.). Habemus igitur quadraturam circuli geometricam et exactam, ſed tantum hypotheticam conceſſa ejus rectificatione, i. e. conceſſa linea recta peripheriae aequali.

§. 219.

Quadrare figuram planam rectilineam quamcunque.

SOL. et DEM. Conſtruatur rectangulum figurae datae aequale (§. 119.). Tum vero conſtruatur quadratum huic rectangulo aequale (§. 217.) idem et figurae datae aequale erit (§. 13. Cor. 2.).

§. 220.

In eodem vel aequalibus circulis anguli ad centrum ſunt in ratione arcuum, quibus inſiſtunt: et ſectores ejusdem vel aequalium circulorum ſunt in ratione arcuum, quibus terminantur.

DEM. Si ABC et DEF fuerint ſectores aequalium circulorum; in arcu majore EF fiat EG = BC, et ducatur DG, eritque angulus BAC = angulo EDG et ſector BAC = ſectori EDG. Generaliter in hac demonſtratione tres ejusmodi litteræ tam angulum apud centrum, quam ſectorem, cujus eſt angulus, denotabunt. Erunt vero arcus EF et EG vel commenſurabiles, vel incommenſurabiles. Si prius ſit, atque EH eorum communis menſura, fiet EF = *m*EA, et EG = *n*EH, ſimul vero EDF = *m*EDH et EDG = *n*EDH, atque ex §. 178. Cor. 2. erit *n*EH : *m*EH = *n*EDH : *m*EDH, id eſt EG : EF = EDG : EDH, vel BC : EF = BAC : EDF. Si arcus EG et EF ſunt incommenſurabiles, arcu EF in partes aequales quocunque numero *m* diviſo atque ad puncta diviſionis omnia ductis radiis, erit EF = *m* EH et EDF = *m*EDH. Praeterea EG > *n*EH et EG < (*n*+1) EH, ſimulque EDG > *n*EDH et EDG < (*n*+1) EDH, proinde hoc quoque caſu ex §. 182. obtinet proportio EG : EF = EDG : EDF, vel BC : EF = BAC : EDF. F. 113.

COR. I. In aequalibus circulis quoque anguli ad peripheriam AKB et DLE ſunt in ratione arcuum quibus inſiſtunt. Eſt enim ACB : DFE = ½ACB : ½DFE (§. 187.) = AKB : DLE = AB : DE.

COR. II. Sectores aequalium circulorum ſunt ut anguli ipſorum apud centrum.

COR. III. Angulus ACB ad centrum eſt ad 4R ut arcus AB ad integram peripheriam. Eſt enim ang. ACB : R = arc. AB ad arcum quadrantem (conf. §. 138. Cor. 1.) ideo ang. ACB : 4R = arcus AB ad 4 arcus quadrantes (§. 159.) id eſt ad integram peripheriam.

COR. IV. Sector ABC eſt ad planum circulare, u
cus AB ad peripheriam. Nam ſector ABC eſt ad ſe
rem quadrantem, ut arcus AB ad arcum quadran
ideo ſector ABC eſt ad 4 ſectores quadrantes, id e
integrum circuli planum, ut arcus AB ad 4 arcus
drantes, id eſt, ad integram peripheriam.

F.114. COR. V. Inaequalium circulorum arcus AB, DE,
aequales ſubtendunt angulos ad centrum, integris
pheriis ſunt proportionales. Nam arc. AB : perip
ang. ACB : 4R, et arcus DE : periph. = (ACB vel D
: 4R. Ergo arc. AB : periph. = arc. DE : periph.
igitur ſemidiametri a concentricis circulis auferunt
ſuis peripheriis proportionales.

COR. VI. quia eſt DCE : 4R = DE : P, et 4R : HC
p : HB, ſi P peripheriam circuli DEH, et p periphiam cir
ABI denotet; erit DCE : HCB = $\left(\begin{array}{l} DE : P \\ p : HB \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} DE : \\ p : \end{array}\right.$
(§. 193.), et quia p : P = r : R, ſi r indicet radium
culi ABI et R radium circuli DEH; erit DCE : HC
$\left(\begin{array}{l} DE : HB \\ r : R \end{array}\right)$. Proinde ſi inter crura duorum ang
rum planorum ex apice tanquam centro diverſis ra
deſcribantur arcus; erunt anguli in ratione compoſit
directa arcuum et inverſa radiorum.

§. 221.

Arcus circulorum, qui integris ſuis periphe
ſunt proportionales, vocantur *arcus ſimiles*. *Sectore*
miles et *ſegmenta ſimilia* ſunt, qui arcubus terminan
ſimilibus.

F.114. COR. Sectores inaequalium circulorum, quorum
guli apud centrum aequales ſunt, ſunt ſectores ſimi
(§. 220. Cor. 5.) et viciſſim ſectorum ſimilium A
et DEC anguli apud centrum ſunt aequales. Eſt eni
P et p denotent peripheriam, AB : P = ACB : 4R et D
= DCE : 4R, praeterea AB : P = DE : p (*def.*)
ACB : 4R = DCE : 4R (§. 170.) atque ACB = DC

§.

§. 222.

Sector circuli aequalis eſt triangulo, cujus baſis arcui ſectoris, et altitudo radio aequalis eſt.

DEM. Baſis FG trianguli rectanguli EFG aequalis ſit peripheriae circuli ACD, et altitudo EF radio *AB*, eritque circulus ADC aequalis triangulo EFG (§. 165.) et ADC : EFG = periph. ACD : baſ. FG. Praeterea ſit FH = AC et erit FH : FG = AC : periph. ACD (§. 169. Cor. 2.). Eſt vero ſector ACB : circ. ACDB = AC : ACD (§. 220. Cor. 4.) et EFH : EFG = FH : FG (§. 195.) hinc EFH : EFG = ACB : ACDB, et proinde EFH = ACB (§. 171. Cor. 2.). F. 115.

§. 223.

Circuli A et B ſunt inter ſe ut quadrata diametrorum.

DEM. Quodſi proportio A : B = CDq : EFq falſa ſit, circulus B non erit quartum proportionale ad quanta CDq, EFq et A. Proinde quartum proportionale ad hæc quanta eſſe debet vel minus vel majus circulo B. Utrumque vero impoſſibile eſſe ſic demonſtro. F. 116.

Sit primo figura G < B, atque proportio CDq : EFq = A : G vera. Quia eſt G < circulo B, inſcribi poteſt huic circulo B polygonum P majus figura G (§. 162.). Supponatur hoc factum eſſe, atque circulo A inſcribatur polygonum p ipſi P ſimile; erit CDq : EFq = p : P (§. 211. Cor. 3.) et proinde p : P = A : G. Quare cum ſit P > G, foret p > A (§. 171. Cor. 2.) quod eſt contra §. 150. Cor. 2.

Si deinde fuerit figura H > B, atque proportio CDq : EFq = A : H vera, circulo B circumſcribi poteſt polygonum P quod figura H minus eſt (§. 163.). Supponatur hoc factum eſſe, atque circulo A circumſcribatur polygonum p ipſi P ſimile; erit iterum CDq : EFq = p : P (§. 211. Cor. 4.) et proinde p : P = A : H; et quia P < H, foret p < A, quod contra §. 158. Cor. 3.

Quarta

Quarta igitur proportionalis ad quanta CDq, EFq et circulum A nec major nec minor eſt circulo B, et proinde proportio CDq : EFq = A : B vera.

COR. I. Cum etiam ſit $CDq : EFq = \frac{CD : EF}{CD : EF}$, et hinc quoque $A : B = \frac{CD : EF}{CD : EF}$, erunt circuli in ratione duplicata diametrorum.

COR. II. Praeterea eſt CD : EF = ½CD : ½EF = AD : BF; hinc quoque circuli ſunt in duplicata ratione radiorum, vel ut radiorum quadrata.

COR. III. Circuli ſunt inter ſe ut polygona regularia ſimilia illis inſcripta et circumſcripta.

§. 224.

Sectores ſimiles ſunt in ratione duplicata radiorum vel diametrorum circulorum, quorum ſunt ſectores, et in eadem ratione ſunt ſegmenta ſimilia.

F. 114. DEM. 1) Si AFBC et DGEC fuerint ſectores ſimiles circulorum *c* et C, quorum peripheriae ſunt *p* et P erunt anguli ACB et DCE aequales (§. 221. Cor.). Praeterea eſt AFBC : *c* = AB : *p*; DGEC : C = DE : P (§. 220. Cor. 4.) et AB : *p* = DE : P (*hyp.*). Proinde AFBC : *c* = DGEC : C (§. 170. Cor.) vel AFBC : DGEC = *c* : C (§. 188.). Cum igitur ſit *c* : C = ACq : DCq (§. 223.) erit quoque AFBC : DGEC = ACq : DCq (§. 170.).

2) Praeterea ſi ſegmenta AFB et DGE ſunt ſimilia, erunt arcus AB et DE ſimiles, hincque ductis radiis AC, BC, DC, EC, oriuntur ſectores ſimiles AFBC et DGEC, atque praeterea triangula ABC et DEC ſimilia. Proinde AFBC : DGEC = ACq : DCq (*Dem.*) et triang. ABC : triang. DEC = ACq : DCq (§. 211. Cor. 1.). Ideo AFBC — ABC : DGEC — DEC = ACq : DCq (§. 186.) id eſt AFB : DGE = ACq : DCq

COR.

COR. I. Sectores ſimiles et ſegmenta ſimilia ſunt inter ſe ut circuli, quorum ſunt ſectores, vel ſegmenta.

COR. II. Sectores ſimiles et ſegmenta ſimilia ſunt quoque in ratione duplicata chordarum, quae ſubtendunt eorum arcus.

§. 225.

Peripheriae et ſemiperipheriae circulorum ſunt inter ſe ut radii vel ut diametri.

DEM. Trianguli rectanguli EFG baſis FG ſit = ACD, et altitudo EF = AB, trianguli vero rectanguli NOP baſis OP = IKM et altitudo NO = LI erit ABCD = EFG et IKLM = NOP, ergo ABCD : IKLM = EFG : NOP; eſt vero $ABCD : IKLM = \left\{\begin{matrix} AB : IL \\ AB : IL \end{matrix}\right\}$, et $EFG : NOP = \left(\begin{matrix} EF : NO \\ FG : OP \end{matrix}\right)$. F. 117.

$$\text{Sit } AB : IL = M : N$$
$$\text{et } AB : IL = N : O$$
$$\text{erit } M : O = \left(\begin{matrix} AB : IL \\ AB : IL \end{matrix}\right)$$
$$\text{Deinde ſit } FE : NO = P : Q$$
$$\text{et } FG : OP = Q : R$$
$$\text{erit } P : R = \left\{\begin{matrix} FE : NO \\ FG : OP \end{matrix}\right\}$$
$$\text{et proinde } M : O = P : R$$
$$\text{vel } M : P = O : R.$$
$$\text{Eſt vero } AB : IL = FE : NO$$
$$\text{et proinde } M : N = P : Q$$
$$\text{vel } M : P = N : Q$$
$$\text{ex quo concluditur } O : R = N : Q$$
$$\text{vel } N : O = Q : R$$
$$\text{et proinde } AB : IL = FG : OP$$

vel quia ACD = FG et IKM = OP, eſt AB : IL = ACD : IKM = $\frac{1}{2}$ACD : $\frac{1}{2}$IKM = 2 AB : 2 IL = AP : IQ (§ 187.).

COR.

COR. Cum ſectorum et ſegmentorum ſimilium arcu ſint ut integrae peripheriae, erunt hi quoque ut radii vel diametri: cum praeterea radii ſint ut chordae ſegmentorum ſimilium, ſunt quoque ſegmentorum ſimilium arcus, ut eorum chordae.

§. 226.

Quodſi latera trianguli rectanguli ABC fuerint chordae ſegmentorum ſimilium AEB, BCD, AFC, vel latera figurarum rectilinearum ſimilium homologa; erit figura hypothenuſae adſcripta aequalis ſummae figurarum reliquarum.

F.118. DEM. Eſt enim ACq = ABq + BCq, et ABq : BCq = AEB : BDC (§. 211. Cor. 2. et 224. Cor. 2.), vel ABq + BCq : BCq = AEB + BDC : BDC. i. e. ACq : BCq = AEB + BDC : BDC. Porro eſt ACq : BCq = AFC : BDC. §. *cit.* hinc AEB + BDC : BDC = AFC : BDC (§. 170.) et proinde AEB + BDC = AFC (§. 171 Cor. 3.).

COR. I. Semicirculi ſunt ſegmenta ſimilia. Semicirculus igitur ſuper hypothenuſam trianguli rectanguli aequalis eſt ſummae ſemicirculorum ſuper cathetos deſcriptorum. Idem quoque de integris circulis verum eſſe facile perſpicitur.

COR. II. Ex his deducitur ſolutio problematis: *Datis duobus circulis alium invenire aequalem ſummae vel differentiae datorum.*

COR. III. Hinc etiam habetur quadratura lunularum AEBG et BDCH, quae ſimul ſumtae aequantur triangulo ABC; vel unius lunulae AGBE ſeparatim ſumtae, aequalis dimidio trianguli ABC, ſi fuerit chorda AB = BC.

SECT

SECTIO IX.

DE
PLANORVM ATQVE RECTARVM LINEARVM IN RESPECTV AD DIVERSA PLANA SITV.

§. 227.

Intra eoſdem terminos non niſi unicum contineri poteſt planum.

DEM. Ponamus, lineam ABCD terminare duo F.119.
plana diverſa, atque in eadem ſumi poſſunt duo puncta A et C talia, ut recta AC, quae inter eadem duci poteſt, non ſit pars perimetri plana terminantis. Haec recta AC erit in uno illorum planorum, quia puncta A et C ſunt in hoc plano: verum eadem recta erit quoque in altero plano (§. 5.). Proinde inter duo puncto A et C cadunt duae rectae diverſae, quod contra §. 7.

§. 228.

Quodcunque planum unico tantum modo produci poteſt verſus eaſdem partes.

DEM. Sit AC planum, quod produci concipia- F.120.
tur verſus D. In linea BC, qua prius terminabatur planum AB, quam producebatur, ſumto puncto F, et in ipſo plano nondum producto puncto E, ducta ſit recta EF. Prolongetur ea verſus F, eaque, quousque prolongatur, erit in plano AD pariter, quoad opus eſt, producto (§. 5.). Jam ponatur planum AC denuo verſus eaſdem partes ad I produci poſſe, ita ut ABI adhuc ſit planum, ejus pars prolongata BI vero cum BD non coincidat, recta EF quoque in plano ABI prolongari poteſt verſus G ita, ut EFG quoque ſit recta linea. (§. 5.).

51.). Ideo eadem recta EF plus unico modo ſoret pr longata, quod contra §. 7.

§. 229.

Planum *per puncta data ponere* eſt, eum plano ind cere ſitum, quo puncta illa in planum cadunt.

COR. Planum per tria quaelibet puncta poni pote Per duo puncta idem poni poſſe, facile patet; quo fac niſi tertium punctum jam in idem cadat, attinget n dem, ſi circa duo priora revolvatur, hoc tertium, ul cunque hoc poſitum ſit, quia planum ponitur indete minatae magnitudinis.

§. 230.

Per data tria puncta, quae non ſint in eadem re poſita, *ſitus plani determinatur ita, ut pluribus planis q cunque numero per eadem tria puncta poſitis illa om coincidant.*

F.121. DEM. Data ſint tria puncta A, B, C et per dem poſitum ſit planum DE. Ducantur rectae AB, B AC, quae terminabunt triangulum planum ABC. S vero aliud quoddam planum per eadem tria puncta ſitum eſſe concipiatur, erunt et rectae AB, BC, AC eodem hoc altero plano (§. 5.) et pars hujus plani po rioris inter perimetrum trianguli ABC intercepta, co cidit cum parte prioris plani inter ejusdem trianguli rimetrum intercepta (§. 227.). Coincidunt igitur h plana quoque in reliquis partibus extra perimetrum jus trianguli ſitis (§. 228.).

COR. Tria puncta A, B, C, ubicunque poſita, ſi co nectantur rectis AB, BC, AC, oritur triangulum. N puncta A, B, C ſunt in eodem plano, et AB, BC, ſunt rectae ejus plani puncta connectentes, quae id in idem planum cadent (§. 5.), unde ABC erit figura p na trilatera.

COR. II. Rectae, quae duas rectas parallelas utc que connectunt, omnes in idem planum cadunt, in q

ſunt parallelae illae, quarum utraque in eodem eſt plano (§. 89.). Cujusvis igitur parallelogrammi latera ſunt in eodem plano.

§. 231.

Si duo plana ſeſe ſecent, communis eorum interſectio eſt linea recta, et quidem unica.

DEM. Si duo plana AB et CD ſeſe ſecent, id in quo ſe interſecant, nimirum EF, lineam eſſe, ultro patet, quia eſt communis planorum AF, EC, EB, FD terminus (§. 1.). Eadem vero linea ſimul recta eſt. Si enim foret linea non recta, per tria puncta non in eadem recta poſita tranſirent plana non coincidentia, quod eſſe nequit. Eſt igitur communis duorum planorum interſectio unica recta. F.122.

§. 232.

Si recta per planum tranſeat, ipſi cum plano non niſi unicum punctum commune eſt.

DEM. Id, quod plano ſub hac hypotheſi commune eſt, non eſſe ſolidum, nec ſuperficiem, nec lineam curvam, ultro patet. Verum etiam non eſt linea recta. Si enim linea recta AB cum plano CD haberet partem EF communem, ea pars in eodem plano produci poſſet verſus G. Quare ſi etiam AF foret in directum ipſi EF, rectae EG et AB ſeſe ſecarent in linea. Idem ſequeretur, ſi quis ſtatuere velit, rectam cum plano plura puncta E et F habere poſſe communia. Inter duo ejusmodi puncta tamen caderet recta EF et quidem unica tantum in plano CD, quia puncta E et F ſunt in illo plano. Ipſa illa recta EF autem quoque pars eſſet rectae AB, quia puncta E et F in ea recta ſumuntur. Haberent igitur planum cum recta AB partem EF communem, quod falſum eſſe jam demonſtratum eſt. F.123.

1. COR. Quodvis planum ut CD integrum ſpatium dividit in duas partes oppoſitas. Atque ſi in una earum partium ſumatur punctum quoddam A, in altera vero op-

poſita punctum B, recta AB, quae haec puncta conn ctit, per plani CD ſi opus eſt producti, punctum ali quod certo tranſibit. Ac pari ratione planum AB quod tranſit per puncta A et B reſpectu plani CD ad oppoſitas partes ſita, hoc planum CD certo in recta quadam EF ſecabit.

§. 233.

F.122. Quodſi in plano EB ducatur GH communi interſectioni EF planorum AB et CD perpendicularis, atque ex puncto G in plano EC eidem rectae EF ducatur perpendicularis GI, recta EF plano anguli IGH ita inſiſtit in puncto G, ut duabus rectis GH et GI, in plano HGI ductis et in puncto G ſe invicem ſecantibus perpendicularis ſit. Ex quo patet, poſſibile eſſe, ut recta quaedam duabus aliis lineis rectis ſe mutuo ſecantibus in puncto interſectionis perpendiculariter inſiſtat, ſi nimirum haec recta cum prioribus non ſit in eodem plano.

§. 234.

Si recta EF duabus rectis AB et CD ſe mutuo ſecantibus in puncto interſectionis F perpendicularis eſt; eadem recta EF omnibus reliquis rectis, quae in plano anguli BFD per punctum F duci poſſunt, perpendicularis erit.

F.124. DEM. Factis FC = FD, atque FB = FA, ducantur rectae AC, CB, BD, DA, quae omnes erunt in plano anguli BFD. Ducta jam ſit per punctum F tertia quaecunque recta GH in plano anguli BFD, quae rectam BD in G atque rectam AC in H ſecet. Denique ſi ex puncto quodam E in EF pro lubitu aſſumto ad puncta A, H, C, B, G, D, ductae fuerint rectae exinde concludimus ſequentia.

1) △ FBD = △ FCA (§. 59.) ideoque BD = CA, FBD = FAC, FDB = FCA.

2) △ FBG = △ AFH (nu. et §. 94.) proinde BG = AH, FG = FH.

3) △ EDF = △ EFC (§. 59.) ED = EC.

4)

4) $\triangle EBF = \triangle EAF$ (§. 59.) EB = EA.

5) $\triangle EBD = \triangle EAC$ (*n.* 1. 3. 4. et §. 75.) ergo EBG = EAH.

6) $\triangle EBG = \triangle EAH$ (*n.* 2. 4. 5. et §. 59.) proinde EG = EH.

Denique 7) $\triangle EFG = \triangle EFH$ (*n.* 2. 6. et §. 75.) et ideo

anguli EFG et EFH aequales et recti (§. 25.).

§. 235.

Linea recta EF ad planum CD *recta* vel *perpendicularis* eſſe dicitur, ſi, ductis per punctum F, in quo linea plano occurrit, in plano CD rectis AB, CD, GH, utcunque, recta EF ad eas omnes perpendicularis eſt. Eodem poſito et planum CD rectae EF *perpendiculare* vel *rectum* eſſe dicitur. Recta autem CB, quae plano FG quidem in B occurrit, ſed ad illud perpendicularis non eſt, *plano obliqua* dicitur. Tum vero, ſi a puncto quodam C rectae illius CB ad planum cadat perpendicularis CD, atque a puncto D, quod perpendicularis in eo plano deſignaverit, ad lineae obliquae CB extremum B, quod in eodem eſt plano, tertia ducta fuerit recta linea BD; angulus planus CBD hac tertia linea BD et obliqua CB comprehenſus *inclinatio lineae obliquae ad planum vocatur.* F. 124. F. 125.

COR. I. Si duae rectae lineae AB, CD, in plano CD, ductae ſe invicem ſecent apud F, atque tertia recta EF utrique ad F perpendiculariter inſiſtat; haec recta EF plano CD perpendicularis eſt (§. *praec.*).

COR. II. Per punctum B in plano FG datum unicâ tantum tranſit recta AB plano perpendicularis, reliquae omnes, ut BC plano FG obliquae ſunt. Si enim per puncta A, B, C, planum ponatur, quod planum FG in BD ſecet, eſt angulus ABD rectus, hinc CBD acutus.

COR. III. Per punctum etiam C extra planum FG datum una tantum tranſit CD plano perpendicularis. Si F. 125.

enim praeter CD et alia recta CB per punctum C
catur plano occurrens in B, ducaturque BD, eſt ang
lus D rectus et ideo B acutus.

COR. IV. Eadem recta EF duobus planis AB et C
ſe invicem ſecantibus ad idem punctum F ſimul perp
dicularis eſſe nequit. Sumto enim puncto G quoc
que in uno planorum AB extra communem interſecti
nem, atque ducta recta FG, planum anguli EFG ſe
bit quoque planum CD in recta quadam FH. Tu
vero erit angulus EFG rectus et EFH rectus co
tra §. 26. Cor.

§. 236.

Si recta linea AB perpendicularis ſit ad tres linea
BD, BE, in eodem puncto E ſe interſecantes, illae ſun
eodem plano.

F. 126. DEM. Per rectas BE et BA poſitum ſit plan
AG, et per rectas BD, BC planum FH, *erit linea*
communis interſectio planorum AG, FH, atque ideo et
in eodem cum rectis BD et BC plano. Si enim BE n
eſt communis ſectio, ſit alia recta BG communis pla
norum AG et FH interſectio, et quia linea AB perp
dicularis eſt ad lineas BC, BD, ea perpendicularis
ad planum FH (§. 235. Cor. 1.) et conſequenter ad li
am BG. Angulus igitur ABG rectus eſt, ſed et an
lus ABE rectus eſt (*per hyp.*), ergo in eodem pl
AG eidem rectae AB ad idem punctum B duae dive
rectae GB et EB eſſent perpendiculares, quod co
§. 26. Cor.

§. 237.

Linea recta *plano parallela* eſſe dicitur, quae,
cunque producta, plano verſus quamcunque partem q
usque continuato occurrere nequit.

§. 238.

Recta linea AB extra planum EF ſita, quae alicu
ctae CD in plano EF ſitae parallela eſt, et ipſi plano E
par

parallela et cuilibet rectae GH in eodem plano rectae CD parallela.

DEM. 1. Parallelae AB et CD ſunt in eodem plano ACDB, extra quod AB utcunque producatur, cadere nequit. Si igitur AB plano EF occurrat, occurrere debet rectae CD, cui parallela eſt, quod eſſe nequit.

2 Per AB et punctum quoddam G in recta GH ipſi CD in plano EF parallela ponatur planum ABG, quod ſecabit planum in recta quadam, quae vel cum GH coincidet, vel non. Poſterius eſſe nequit. Sit enim GI planorum ABG et EF communis interſectio, erit: haec GI ipſi CD parallela, quia cum illa eſt in eodem plano EF nec cum illa concurrere poteſt, niſi concurrat cum plano ABDC, cum quo parallela eſt *p. n.* 1. Ponitur vero GH quoque ipſi CD parallela eſſe. Proinde per idem punctum G duae rectae diverſae GH et GI eidem tertiae CD ſunt parallelae contra §. 96. Cor. 1. Eſt igitur GH communis planorum ABG et EF interſectio, quare rectae AB et GH ſunt in eodem plano AGHB iacent. Deinde quoque concurrere nequeunt, niſi AB plano EF occurrat, cui parallela eſt. Proinde AB et GH ſunt rectae parallelae (§. 89.).

COR. Hinc ſequitur, duas rectas AB, GH eidem rectae tertiae CD parallelas et inter ſe parallelas eſſe, etiam tum, cum tres hae rectae in eodem plano non ſunt poſitae.

§. 239.

Inclinatio plani GH ad planum GI eſt angulus planus rectilineus BAE comprehenſus a duabus rectis AB et AE, quarum una in plano GH, altera in plano GI communi planorum interſectioni GK eſt perpendicularis. F. 128.

§. 240.

Si plana GH et GI ad ſe mutuo inclinata ſint, ductis in plano GH rectis AB, CD, parallelis, et in plano GI rectis AE, CF parallelis, et quae prioribus occurrant in punctis

etis A et C, in communi planorum interſectione ſitis; eru anguli BAE, DCF aequales.

F.128. DEM. Abſcindantur lineae AB, CD, et A CF aequales, ducanturque rectae BD, EF, BE, D atque cum lineae AB, CD ſint aequales et parallel erit figura AD parallelogrammum, et proinde BD AC aequales et parallelae (§.107.). Cum praeterea neae AE et CF aequales ſint et parallelae; etiam fig ra AF parallelogrammum erit, atque recta EF eid AC aequalis et parallela (§.*cit.*). Hinc quoque rect BD et EF aequales (§.13. Cor. 2.) et parallelae (§.2 Cor.) erunt. Proinde quoque figura BF eſt parallel grammum et rectae BE et DF ſunt aequales; id triangula BAE et DCF ſunt congruentia (§.75.) atq anguli BAE et DCF aequales.

COR. I. Ex demonſtratione ſequitur haec propoſi generalior: *Si duabus rectis* AB, AE, *angulum* BAE *c prehendentibus, parallelae fuerint rectae* CD *et* CF, *q in puncto* C *concurrunt, angulus* BAE *angulo* DCF *qualis erit.*

COR. II. Si fuerint BA et DC ipſi AC perpendicu res, parallelae erunt. Si praeterea et EA, FC, fue ipſi AC perpendiculares, et hae rectae erunt parallel Tum vero angulus BAE vel DCF eſt inclinatio planor GH et GI ad ſe invicem. Inclinatio igitur plani ad p num eadem eſt, ubicunque perpendiculares ad inte ctionem ducantur.

COR. III. Communis interſectio GK planorum G GI ad planum anguli inclinationis BAE horum planor GH et GI perpendicularis et (§.235. Cor. 1.).

§. 241.

Si angulus inclinationis duorum planorum eſt gulus rectus, unum planum alteri *rectum*, ſive *perpe culare* eſſe dicitur. Si angulus inclinationis non eſt etus, dicitur *planum plano obliquum eſſe.*

§. 2

§. 242.

Si planum CD *plano* FG *eſt perpendiculare, illudque ſecat in recta* CI, *per eandem rectam* CI *non poteſt poni aliud planum* CK *eidem plano* FG *perpendiculare, et a plano* CD *diverſum.*

DEM. Planum anguli inclinationis ABE planorum CD et FG ſecabit planum CK in recta quadam BH atque angulus CBH erit rectus (§. 240. Cor. 3. *coll.* §. 235.). Ergo foret HBE angulus inclinationis planorum CK et FG, qui *per hyp.* = R = ABE, quod contra §. 26. Cor.

§. 243.

Si linea recta AB *plano* FG *perpendicularis fuerit, omne planum* CD *per eandem poſitum eidem plano* FG *perpendiculare erit.*

DEM. Ponatur per AB planum CD, quod inter- F.129.
ſecet planum FG in recta BC. In plano FG ducatur BE interſectioni planorum BC perpendicularis. Jam recta AB ponitur ad planum FG perpendicularis, ideo rectis BC et BE perpendicularis eſt (§. 235.). Angulus igitur ABE inclinationis planorum CD et FG rectus eſt, proinde planum CD plano FG perpendiculare (§. 241.).

COR. I. Duo plana GH et GI ſe mutuo in GK ſecantia F.128.
ad planum anguli ſui inclinationis BAE ſunt perpendicularia (§ 240. Cor. 3.).

COR. II. Quodſi plana AB, AC, atque HK et HI F.137.
ſub eodem ad ſe invicem inclinata ſint angulo, coincidentibus rectis AD et HL et duobus eorum AC et HI, etiam reliqua AB et HK coincident. Si enim EFG et MNO fuerint eorum planorum anguli inclinationis, atque planum HI imponatur plano AC ita ut HL ſupra AD et punctum N in F cadat; NO cadet ſupra FG ob HNO = R = AFG, atque plana MNO et EFG, quia ſunt planis HI et AC perpendicularia, coincident (§. 242.) in unum planum, in quo NM coincidit cum FE, ob EFG = MNO (*hyp.*). Utrumque igitur planum AD et HK per angulum AFE poſi-

poſitum eſt, et proinde unum cum altero coinc
(§. 230.).

§. 244.

Si planum CD *plano* FG *eſt perpendiculare; recta in plano* CD *communi planorum interſectioni* BC *perpen-dicularis et ipſi plano FG perpendicularis eſt.*

F.129. DEM. Ducta enim in plano FG recta BE com ni interſectioni BC perpendiculari, erit angulus ABE gulus inclinationis planorum FG et CD, proinde rec Sed et angulus ABC eſt rectus (*hyp.*). Ideo recta duabus rectis BE et BC ex puncto occurſus B in pl FG eductis perpendicularis eſt, ac proinde ipſa pl FG eſt perpendicularis.

COR. I. Si planum CD plano FG eſt perpendicul atque a puncto quodam A plani CD ad planum FG catur perpendicularis AG, ea cadet in planum CD. enim AG non caderet in planum CD, poſſet tamen hoc plano per punctum A duci recta AB ad commune interſectionem perpendicularis, quae proinde plano F perpendicularis erit, cum tamen jam AG ad hoc planu ſit perpendicularis, *contra* §. 235. Cor. 3.

COR. II. Pari ex ratione recta BH, quae ex punc quodam B rectae BC ſuper planum FG erigitur perpen cularis, erit in plano CD ad FG recta, illudque in rec BC ſecante. Alias enim planum CK anguli CBH ſup plano FG foret perpendiculare (§. 248.) quod eſt con §. 242.

§. 245.

Si recta plano eſt perpendicularis, quaelibet alia ta huic parallela eidem plano eſt perpendicularis.

F.125. DEM. Si recta AB plano FG eſt perpendicula et CD ipſi AB parallela; ponatur per parallelas AB CD planum AD ſecans FG in recta BD, hoc erit pla FG perpendiculare, quia tranſit per AB plano FG p pendicularem (§. 243.). Praeterea AB et CD ſunt rallelae, ideoque anguli B + D = 2R. Verum B = (hy

(hyp.) proinde D = R, ergo CD in plano AD ad FG perpendiculari ad communem interſectionem horum planorum perpendicularis eſt, hincque et ipſi plano FG (§. 244.).

§. 246.

Duae rectae eidem plano perpendiculares ſunt parallelae.

DEM. Si rectae AB et CD plano FG ſunt perpendiculares, et DC rectae AB non parallela, tamen per punctum D duci poterit alia recta DE rectae AB parallela. Haec autem recta DE plano FG erit perpendicularis, et proinde per idem punctum D tranſeunt duae rectae diverſae eidem plano perpendiculares, quod contra §. 235. Cor. 2. F. 125.

§. 147.

A puncto A *extra planum* BC *dato ad idem planum ducere rectam perpendicularem.*

SOL. In plano BC ducatur recta quaevis DE, atque ad eandem ex puncto A demittatur perpendicularis AF (§. 85.). Ex eodem puncto F ad rectam DE in plano BC erigatur perpendicularis FH (§. 78.) atque ex puncto A ad hanc GA ducatur perpendicularis AI, ea ſimul plano BC perpendicularis erit. F. 130.

DEM. Recta DE plano trianguli AFI perpendicularis eſt, quia rectis FA et FI eſt perpendicularis (§. 235. Cor. 1.). Praeterea ſi per punctum I ducatur KL ipſi DE parallela, eadem hæc recta quoque ad planum trianguli AFI erit perpendicularis (§. 245.) et proinde anguli AIL et AIF recti; ex quo patet, rectam AI ad planum BC eſſe perpendicularem (§. 235. Cor. 1.).

§. 248.

Ex puncto M *in plano* BC *dato excitare rectam plano* BC *perpendicularem.*

SOL. et DEM. A puncto quodam A extra planum BC pro lubita aſſumto ad planum BC demittatur F. 130.

 per-

perpendicularis AI. Tum vero per datum punctum M ducatur recta ipſi AI parallela (§. 89 Cor. 2.) atque hæ plano BC perpendicularis erit (§. 245.).

§. 249.

Duae rectae AB *et* CD *parallelae ad idem planum* GH *ſub eodem inclinatae ſunt angulo.*

F. 131. DEM. Ex puncto quodam A rectae AB ad GH ducatur perpendicularis AE ad planum GH, atque ex puncto quodam C rectae CD ad idem planum perpendicularis CF, erunt AE et CF parallelæ (§. 246.). Proinde ductis BE et DF in triangulis ABE et CDF eſt angulus A = C (§. 240. Cor.) E = R = F ideoque B = D (§. 9[illegible] Cor. 6.).

§. 250.

Si duo plana AB, CD *ſe mutuo ſecantia eidem plano tertio* EF *ſunt perpendicularia, communis interſectio* GH *plano* EF *perpendicularis eſt; et viciſſim planum* EF *communi planorum* AB, CD, *interſectioni perpendiculare utrique planorum* AB *et* CD *perpendiculare erit.*

F. 132. DEM. Si enim 1) in plano EF ducatur recta IH perpendicularis ad AH, ea perpendicularis eſt ad planum AB (§. 244.) et ideo rectae GH (§. 235.). Deinde ſi ducatur KH rectae HD perpendicularis, ea perpendicularis eſt plano CD, et proinde quoque rectae GH. Ideo recta GH duabis rectis IH et KH in plano EF perpendicularis ipſi huic plano perpendicularis eſt (§. 23[illegible] Cor. 1.).

Quodſi jam 2) fuerit planum EF communi interſectioni HL planorum AB et CD perpendiculare, erunt LHA et LHD anguli recti (§ 235.) et proinde AHD angulus inclinationis planorum AB et CD ad ſe invicem (§. 239.) cujus planum perpendiculare eſt planis AB et CD (§. 243. Cor. 1.).

§. 251.

Plana parallela ſunt, quae non concurrere poſſunt utcunque extendantur.

§. 2[illegible]

§. 252.

Plana CD, EF, ad quae eadem linea recta AB eſt perpendicularis, ſunt parallela.

DEM. Si plana CD et FE non ſunt parallela, producta concurrere debent. Fiat igitur concurſus verſus G et recta GH ſit planorum communis inſectio. In hac recta ſumatur punctum quodcunque I, et in plano DG ducatur AI, atque in plano FG jungatur BI, erit in triangulo plano rectilineo AIB angulus A rectus et angulus B rectus, quod contra §. 79. F. 133.

COR. Proinde eadem recta duobus planis ſe invicem ſecantibus ſimul perpendicularis eſſe nequit. Alias enim plana eſſent parallela contra hyp.

§. 253.

Per punctum A extra planum EF datum ponere planum dato EF parallelum.

SOL. et DEM. Ex puncto A ad planum EF demittatur perpendicularis AG (§. 24.), atque per punctum G ducantur duae rectae diverſae quaecunque GH et GI. Quodſi jam per punctum A ducatur AC ipſi GI, atque AB ipſi GH parallela (§. 89. Cor. 2.), erit planum anguli BAC plano EF parallelum (§. 252.). F. 130.

§. 254.

Si duo plana parallela ſecentur per idem planum tertium utcunque, erunt lineae interſectionum parallelae.

DEM. Si duo plana AB et CD parallela ſecantur a tertio plano EH, lineae interſectionum EG, EH ſunt in eodem plano ſecante; concurrere autem non poſſunt, quia alias et plana AB et CD parallela concurrerent. Ideo EG et FH ſunt rectae parallelae. F. 125.

§. 255.

Si planum HI plano KL fuerit parallelum, atque a puncto quodam A plani KL cadat perpendicularis AB ad planum KL, ea ſimul plano HI perpendicularis erit.

DEM. Per punctum B in plano KL ducantur duae rectae BD et BF ſe invicem in B ſecantes. Producatur F. 134.

tur AB verſus A ad eam plani HI plagam, quae illi opponitur, ad quam cadit planum KL, atque a puncto quodam C hujus rectae ad punctum quoddam D rectae BD ducatur recta CD, quae per punctum quoddam E plani HI tranſibit (§. 232. Cor.). Pari modo a puncto C ad punctum quoddam F rectae BF ducatur CF, quae per planum HI apud G tranſit. Ducantur FE et FG, quae cum in planis CBD et CBF ſe invicem in recta CB ſecantibus exiſtant, ſe ipſas ſecabunt in A. Erunt vero AE et BD pariter ac AG et BF parallelae (§. 254.). Proinde angulus CAE = CBD (§. 99.) = R et CAG = CBF = R, et recta CA plano HI perpendicularis (§. 235. Cor.).

F.135. COR. I. Per idem punctum F non niſi unicum poni poteſt planum alteri plano LM parallelum. Quodſi enim AB foret ipſi LM et praeterea CD planum AB ſecans in recta FI eidem plano LM parallelum, recta FN ipſi LM perpendicularis ſimul utroque plano AB et CD perpendicularis foret, contra §. 235. Cor. 4.

COR. II. Planum igitur ſecans unum planorum parallelorum etiam ſecat alterum.

§. 256.

Recta ſecans unum planorum parallelorum etiam ſecat alterum, atque aequali ad utrumque inclinata eſt angulo.

F.136. DEM. Si recta AB ſecet planum CD, cui parallelum eſt planum EF; ex puncto quodam A rectae AB quod cadit ad eam plani CD partem, quae opponitur illi, in qua planum EF ſitum eſt, demittatur perpendicularis AG ad planum EF, atque planum anguli BAG ſecabit planum CD in recta IK, ita ut angulus AIK ſit rectus (§. 255.) et in triangulo AKI apud I rectangulo angulus A acutus (§. 80. Cor. 1.). Praeterea quoque planum anguli BAG ſecat planum EF in recta GH, ita ut angulus AGH rectus ſit (§. 80. Cor. 1.). Proinde rectae AB et GH productae concurrunt (§. 96.) et quia GH

per

perpetuo manet in plano EF, recta AB producta concurrit cum plano EF. Fiat concurſus in B, eruntque ob KI et BG parallelas, anguli inclinationum AKI et ABG (§. 235.) aequales (§. 99.).

§. 257.

Plana PQ, LM, eidem plano tertio AB parallela etiam inter ſe ſunt parallela.

DEM. Recta FR plano AB perpendicularis producta ſecabit plana LM et PQ (§. 256.) iisque eſt perpendicularis (§. 255.). Proinde plana PQ et LM ſunt parallela (§. 252.).

§. 258.

Diſtantia puncti a plano eſt perpendicularis a puncto ad planum. *Diſtantia plani a plano vel lineae a plano* eſt diſtantia alicujus illius plani vel lineae puncti a plano.

§. 259.

Planorum parallelorum diſtantiae a ſe mutuo omnes aequales ſunt.

DEM. Si planum HI plano KL eſt parallelum, in plano HI ſumantur duo quaecunque puncta E et A, a quibus ductae ſint rectae EM et AB ad planum KL perpendiculares, quae erunt diſtantiae plani HI a plano KL in punctis E et A (§. 258.) ipſae autem erunt inter ſe parallelae (§. 246.) proinde ſunt in eodem plano. Ponatur ideo per easdem planum EB ſecans HI et KL in rectis EA et MB erunt hae interſectiones parallelae (§. 254.) et proinde diſtantiae EM et MB in parallelogrammo rectangulo EB latera ſibi oppoſita, atque aequalia (§. 107.). Eodem modo de omnibus reliquis plani HI punctis demonſtratur, eorum diſtantias a plano KL diſtantiae EM vel AB aequales eſſe. F. 134.

COR. Omnia puncta, quae ab aliquo plano aequaliter diſtant, ſunt in eodem plano; proinde et omnes lineae, quarum puncta ab aliquo plano aequaliter diſtant. Quodſi enim tria puncta E, A, G, aequali a plano KL di-

diſtent intervallo; planum HI per puncta E, G, et A poſitum tranſit per quodlibet aliud punctum P aequali cum prioribus intervallo a plano KL diſtans. Nam recta P ipſi KL perpendicularis etiam per planum HI tranſit in puncto quodam M. Atque ſi hoc a puncto P diverſum foret, eſſet PQ = EM = RQ quod impoſſibile eſt.

§. 260.

Si plana AB et CD ſecentur a tertio plano AK anguli vero inclinationum EFG, HGI, ad easdem partes poſiti fuerint aequales, et interſectionum lineae AF, CG parallelae, ipſa plana AB et CD parallela erunt.

F. 138. DEM. In plano AK ducatur rectae FI rectae AF perpendicularis, eaque producatur donec interſectionem CG ſecet in puncto G, quod tandem fiet (§. 99. Cor. 2.) atque angulus CGI pariter rectus erit (§. 99. Cor. 3.). Per FI ponatur planum ipſi AK perpendiculare, quod ſecabit planum AB in recta FE et planum CD in recta GH, erit AFE = R = CGH (§. 243. *coll.* §. 235.) proinde EFG, HGI anguli inclinationum planorum AB et CD ad planum AK (§. 239.) aequales (*hyp.*) atque rectae FE et GH parallelae (§. 89. Cor. 1.). Ex puncto quodam E rectae EF in plano EFGH ducatur recta EH ipſa GH perpendicularis, eaque ſimul rectae EF erit perpendicularis (§. 99. Cor. 3.). Cum igitur planum EFGH planis AB et CD rectum ſit (§. 243. Cor.) erit ſimul recta EH ad plana AB et CD perpendicularis (§. 244.) quae plana proinde ſunt parallela.

§. 261.

Si duo plana parallela AB et CD ſecentur a tertio plano AK, anguli, ſub quibus parallela plana ad tertium AK ſunt inclinata, aequales ſunt.

F. 138. DEM. Interſectiones AL et CM plani AK cum parallelis AB et CD, ſunt rectae parallelae (§. 254.). Ducatur recta FI ipſi AL perpendicularis, eaque ſimul rectae CM perpendicularis erit. Per FI ponatur planum

ipſi

AK perpendiculare, ſecans plana AB et CD in rectis FE et GH, erunt AF et CG ad hoc planum perpendiculares (§. 244.) et proinde AFE, CGH anguli recti, atque EFG, HFI anguli inclinationum planorum AB et CD ad planum AK. Praeterea ſunt FE et GH parallelae (§. 254.) et proinde anguli EFG et HGI aequales (§. 99.).

§. 262.

Si duorum angulorum planorum rectilineorum BAC et EDF, qui non ſunt in eodem plano, crura AB et DE, AC et DF ſunt parallela; plana BC et EF, in quibus anguli collantur, parallela ſunt.

DEM. Ex apice A anguli BAC ducta ſit recta AG plano EF perpendicularis, per punctum vero G ducantur in plano EF recta GI parallela ipſi DF, atque GH parallela ipſi DE, erit quoque GI rectae AC et GH rectae AB parallela (§. 238. Cor. 1.); verum angulus IGA = R (*conſtr.*) hinc quia CAG + ICA = 2R, erit CAG = R. Pari ratione BAG + HGA = 2R (§. 99.) et HGA = R (*conſtr.*) erit BAG = R. Ergo recta GA perpendicularis eſt plano BC: eadem vero quoque plano EF eſt perpendicularis (*hyp.*); ideo plana BC et EF ſunt parallela. F. 139.

§. 263.

Si duae rectae lineae AB et CD ſecentur a planis parallelis; partes inter eadem plana interceptae, proportionales ſunt.

DEM. Ducantur rectae AC, BD, CB, atque planum trianguli ACB ſecet planum KL in recta EF, planum trianguli CBD vero idem planum KL ſecet in recta FG. Erunt EF, AC, atque BD et FG rectae parallelae. Et igitur in triangulo ABC, AE : EB = CF : FB, et in triangulo CBD, CF : FB = CG : GD, ergo AE : EB = CG : GD. Sequitur praeterea ex iisdem principiis, fore AE : AB = CG : CD, atque AB : EB = CD : GD. F. 140.

SECT.

SECTIO X.

DE
PLANIS AD SVPERFICIEM SPHAERA RELATIS ET SPHAERAE PROPRIETATIBVS, QVAE INDE PENDENT.

§. 264.

F.141. Spatium quaquaverſum undique terminatum dici *Figura ſolida* ſive *Solidum ſimpliciter*. Solidi mag tudo ejus *Volumen* dici ſolet. *Sphaera* eſt ſolidum ui ca ſuperficie curva terminatum, in quo aſſignari pot punctum C ab omnibus punctis ſuperficiei illud tern nantis aequaliter diſtans. Punctum C dicitur *Centr ſphaerae*. *Radius Sphaerae* eſt recta quaecunque ut C ex centro ad ſphaerae ſuperficiem ducta.

COR. I. Omnes radii ejusdem ſphaerae aequales ſu

COR. II. Omnis ſphaera concipi poteſt gener eſſe, ſemicirculo quodam circa diametrum revoluto.

§. 265.

Recta, quae ducitur per punctum intra ſphaeram ſumtum, ſi utrinque producatur, non niſi in duobus p ctis ſphaerae ſuperficiei occurrit.

F.141. DEM. Sit DE ejusmodi recta, atque manifeſt eſt, eam occurrere ſphaerae ſuperficiei ad minimum duobus punctis D et E. Ponatur eadem recta huic perficiei occurrere in tertio quodam puncto F, ducant que ex centro ſphaerae C ad puncta occurſus D, E e rectae CD, CE, CF, quae omnes erunt in eodem p no (§. 230. Cor.) atque CD = CE = CF contra §. Cor.

§. 2

§. 266.

Diameter ſphaerae eſt recta AB per centrum ipſius C ducta et verſus utramque partem producta, donec ſuperficiei occurrat.

COR. I. Diameter ſphaerae eſt radii duplum, quare radius ſphaerae quoque ejus *ſemidiameter* dici ſolet.

COR. II. Omnes diametri ejusdem ſphaerae aequales ſunt (§. 21. Cor.

§. 267.

Planum *ſphaeram ſecare* dicitur, ſi eidem ita occurrat, ut pars ipſius intra ſphaeram, et reliqua pars extra ſphaeram cadat. Planum vero *ſphaeram tangere* dicitur, ſi eidem occurrit quidem, ſed ita ut totum cadat extra ſphaeram.

§. 268.

Si ſphaera ſecetur plano per centrum C tranſeunte, figura ſectionis AE *erit circulus, cujus centrum ſimul eſt centrum ſphaerae.*

DEM. Omnia puncta ſuperficiei ſphaericae a centro C aequaliter diſtant, et proinde quoque omnia puncta perimetri figurae AE, ex quo patet propoſitum. F.142.

COR. I. Omnes hujus generis circuli in eadem ſphaera, quemcunque habeant ſitum, aequales ſunt, quia eorum radii iidem ſunt cum ſphaerae radio.

COR. II. Planum hujusmodi circuli totum cadit intra ſphaeram et integram ſphaeram in duas partes aequales dividit, quae hemiſphaeria vocantur. Concipiatur enim pars AKE inverti, et ſupra planum AE conſtitui, atque hoc facto ſuperficies partis inferioris AKE coincidet cum ſuperficie partis ſuperioris AIE. Quare duo haec ſolida ſibi congruunt, et proinde aequalia ſunt. F.142.

COR. III. Recta AI conjungens duo ſuperficiei ſphaericae puncta A et I tota cadit intra ſphaeram. Quodſi enim per tria puncta C, A et I ponatur planum, hoc ſecabit ſphaeram ita ut figura ſectionis ſit circulus AIEK qui totus intra ſphaeram cadit, cujusque chorda eſt re-

ɩcta AI tota intra hunc circulum, et proinde quoque to intra ſphaeram cadens.

§. 269.

Si ſphaera ſecetur plano quocunque, figura ſectio erit circulus.

F.142. DEM. Ex centro ſphærae ad planum ſectionis d catur recta CF perpendicularis, plano ſectionis occu rens in puncto F, erit punctum hoc in ea plani ſecan parte, quae cadit intra ſphaeram. Nam ſi poſſet cad re in eam plani ſecantis partem, quae eſt extra ſphaeram cadat illud in H, ita ut CH ſit ad planum ſecans pe pendicularis. Ducatur recta HBD ſecans figuram ſe ctionis in punctis B et D. Praeterea ducantur rect CB et CD, quae ſunt aequales (§. 264. Cor.). Divid tur BD in puncto F bifariam et ducatur CF, atque tria gula CBF, et CDF omnia latera habent aequalia. Pr inde anguli apud F aequales ſunt et recti, et quia figu CHBFD eſt in eodem plano, angulus CHF non eſt rect (§. 80. Cor. 4.) nec proinde CH plano ſecanti perpend cularis. Cadit igitur punctum F, quo perpendicular illa plano ſecanti occurrit, intra ſphaeram. Ab ho puncto ad perimetrum figurae ſectionis ducantur rect FG, FD, et a punctis G et D ad centrum ſphaerae r ctae GC et DC, atque triangula CGF et CDF eru apud F rectangula, in quibus CF = CF, et CG = Cl proinde FG = FD (§. 87. Cor.). Simili argumentatio ne demonſtratur, quamcunque aliam rectam ex punct F ad figurae ſectionis perimetrum ductam prius duct FG et FD aequalem eſſe. Figura igitur ſectionis es circulus.

COR. I. Perpendicularis ex centro ſphaerae ad planum ſecans ſphaeram, ſed non tranſiens per centrum ſphae rae, cadit in centrum circuli, qui eſt communis ſuper ficiei ſphaericae et plani interſectio.

COR. II. Ubicunque ſphaera a plano quodam ſecetu circulus, qui prodit, minor eſt eo, in cujus planum ce

d

dit ſphaerae centrum. Nam ejus radius ut FG in noſtra figura eſt cathetus in triangulo rectangulo CFG, cujus hypothenuſa eſt CG aequalis radio circuli AB, in cujus planum cadit ſphaerae centrum C (§. 268. Cor. 1.). Hinc maximus omnium ejusmodi circulorum, qui ſectione ſphaerae per planum facta prodeunt, eſt is, cujus centrum cum ſphaerae centro coincidit, qui eam quoque ob cauſſam *circulus ſphaerae maximus* vocatur. Reliqui in ſphaera circuli in poſterum dicentur *circuli ſphaerae minores.*

COR. III. Si circulus quidam ſphaerae eſt maximus, ejus planum per ſphaerae centrum tranſit. Si enim non tranſit per centrum, quicunque alius circulus, cujus planum per centrum ſphaerae tranſit, major eſt eodem, contra hypotheſin.

COR. IV. Si duo diverſa plana ſphaeram, atque ſimul ſe invicem ſecent, ita ut recta, quae eorem communis interſectio eſt, tranſeat per ſphaeram; duo in ſuperficie ſphaerae oriuntur circuli in duobus nec pluribus punctis ſeinvicem ſecantes. Si enim in pluribus quam duobus punctis ſeſe interſecarent, tamen haec puncta cadere deberent in rectam, in qua plana horum circulorum ſeſe ſecant. Haec vero recta eſt chorda utriusque horum circulorum, et proinde haec chorda peripheriae in pluribus occurreret, quam duobus punctis, quod impoſſibile eſt (§. 124. Cor.).

§. 270.

Recta, quae plano circuli ſphaerae minoris in centro perpendiculariter inſiſtit, etiam per ſphaerae centrum tranſit.

DEM. Sphaerae ABDE circulus minor ſit BGD cujus centrum eſt F atque recta FL plano hujus circuli in F perpendicularis. Quodſi hæc recta non tranſeat centrum ſphaerae, ex centro ad planum circuli BGD ducta perpendicularis CF per centrum F circuli BGD tranſiret (§. 269. Cor. 1.) atque proinde per E ductae forent

duae diverſae rectae eidem plano BCD perpendicular contra §. 235. Cor. 2.

§. 271.

Linea recta, quae ducitur ex centro ſphaerae C ad ce trum F circuli minoris BGD, plano hujus circuli perpen cularis eſt.

DEM. Quodſi enim non CF ſed alia CM pla hujus circuli perpendicularis eſſet, foret M circuli BG centrum (§. 269. Cor. 1.) quod eſt contra hypotheſin.

§. 272.

Si planum ſphaeram tangat, idem planum uni tantum cum ſphaerae ſuperficie punctum habet commun.

F.142. DEM. Si ſphaera, cujus centrum eſt C, tangi ſu ponatur a plano quodam etiam in duobus tantum pu ctis et I; recta AI haec puncta connectens tota cadet int ſphaeram (§. 268. Cor. 3.). Eſt vero haec recta qu que in eo plano, quod circulum in punctis A et I tang re ponitur. Ergo hoc planum habet puncta quaed intra ſphaeram, quod eſt contra hypotheſin.

§. 273.

Planum radio ſphaerae CE in puncto extremo pe pendiculare eſt planum ſphaeram tangens.

F.143. DEM. Praeter punctum enim E quodvis ali hujus plani punctum ut F cadit extra ſphaeram. Duc enim rectis EF et CF oritur triangulum CEF apud rectangulum (§. 235.) et proinde eſt CF > CE (§. Cor.).

§. 274.

Si planum ſphaeram tangat, radius ſphaerae ad pu ctum contactus plano tangenti eſt perpendicularis.

F.143. DEM. Quodſi enim non CE ſed alia recta CF ſt tuatur plano tangenti perpendicularis eſſe, ductis rec FE et FC, foret triangulum FCE apud F rectangulu (§. 235.) et proinde CE < CF. Eſt vero CE = C proinde CG < CF, quod impoſſibile.

§. 2

§. 275.

Si ex centro ſphaerae ad planum tangens ducatur perpendicularis, ea in punctum contactus cadit.

DEM. Si perpendicularis ex centro C ad planum tangens non in E ſed aliud punctum F cadat, etiam recta e C ad punctum contactus E ducta huic plano erit perpendicularis (§. *praec.*) quod contra §. 235. Cor. 2. F. 143.

§. 276.

Circuli ſphaerae GH et IK, quorum plana a centro aequaliter diſtant, aequales ſunt. Atque plana circulorum aequalium aequali a centro diſtant intervallo.

DEM. Si diſtantiae CL et CF, quae per centra circulorum FGH et IKL tranſeunt (§. 269. Cor. 1.) fuerint aequales, ductis FG, LI, CG et CI, erit CIq = CLq + LIq atque CGq = CFq + FGq. Proinde CLq + LIq = CFq + FGq ob CIq = CGq (§. 110. Cor. 1.). Si igitur 1) ſit CF = CL habetur CFq = CLq et proinde LIq = FGq, ex quo fit LI = EG (§. 110. Cor. 3) et circuli IKL et FGH aequales ſunt (§. 50.). Si 2) ſit circuli illi aequales, erit FGq = LIq (§. 223. Cor. 2.) proinde CLq = CFq, et CL = CF (§. 110. Cor. 3.). F. 144.

§. 277.

Circulus ſphaerae, cujus planum centro ſphaerae propinquius eſt, major eſt eo, cujus planum majori intervallo diſtat ab ejusdem ſphaerae centro: et viciſſim circulus major minori a centro ſphaerae diſtat intervallo, quam circulus minor.

DEM. Si circulorum IK et GH diſtantiae a ſphaerae centro iterum fuerint CL et CF, erit ut ante CLq + LIq = CFq + FGq. Quodſi igitur 1) ſit CL < CF, erit CLq < CFq (§. 110. Cor. 2.) atque LIq > FGq (§. 4.) et proinde circulus IKL major circulo FGH (§. 223. Cor. 2.). Si 2) fuerit circulus IKL major circulo FGH, erit ILq > FGq (§. 223. Cor. 2.) proinde CLq < CFq, et CL < CF (§. 110. Cor. 3.). F. 144.

§. 278.

Maximi in ſphaera circuli ſe mutuo biſariam ſecant.

DEM. Duo quivis maximi ſphaerae circuli non poſſunt non ſeſe ſecare, quia ſphaerae centrum eſt in utriusque plano. Deinde recta, quae eſt communis eorum interſectio, cum tranſeat per commune eorundem circulorum centrum, ea erit utriusque diameter. Ex quo patet propoſitum (§. 50.).

§. 279.

Circuli in ſphaera, qui ſe mutuo biſariam ſecant, ſunt maximi.

F.145. DEM. In ſphaera ABCD circuli BEDF et AECF ſe mutuo biſariam ſecent in punctis E et F. Ducatur recta EF, eaque ſecetur biſariam in G, erit C centrum utriusque circuli. Quia enim FDE et FBE ſunt ſemicirculi, erit FE diameter circuli BEDF (§. 138. Cor. 2.) Idem verum eſt de circulo AECF. Ipſum hoc punctum G ſimul erit centrum ſphaerae. Quodſi enim aliud punctum ut H foret ſphaerae centrum, recta HG utrique plano AECF et BEDF ſimul eſſet perpendicularis (§. 271.) quod contra §. 235. Cor. 4. Ergo circuli AECF et BEDF ſunt maximi.

COR. Si duo circuli ſphaerae ſeinvicem ſecant, atque non uterque ſit maximus, iidem ſe invicem mutuo non biſſecabunt. Si enim hoc ſtatuatur, uterque circulus eſſet maximus *contra hyp.*

§. 280.

Polus circuli in ſphaera dicitur punctum in ſphaerae ſuperficie, quod ab omnibus peripheriae illius circuli punctis aequali diſtat intervallo.

§. 281.

Quilibet in ſphaera circulus duos ſaltem habet polos atque hi poli erunt puncta, in quibus recta plano illius circuli in centro perpendicularis ſphaerae ſuperficiei occurrit.

DEM.

DEM. Recta ABG tranſeat per centrum B circuli CE atque ad ipſius planum ſit perpendicularis, eaque ſimul tranſibit per centrum ſphaerae (§. 270.). Ducantur rectae AC, AD, AE, AF etc, dico has rectas omnes aequales eſſe. Si enim praeterea ducantur BC, BD, BE, BF; triangula ABC, ABD, ABE, ABF etc, erunt apud B rectangula, atque latera angulum rectum comprehendentia habent aequalia. Ex quo patet, rectas AC, AD, AE, AF etc. omnes aequales eſſe, et proinde punctum A erit circuli CDEF polus. Modo huic prorſus ſimili demonſtratur, etiam punctum G hujus circuli polum eſſe. F.146.

§. 282.

Si punctum quoddam in ſphaerae ſuperficie aſſumtum ſit polus alicujus in ſphaera circuli; perpendicularis ab eodem ad planum circuli ducta tranſit per hujus circuli centrum, atque etiam punctum ſuperficiei, in quo haec perpendicularis ad alteram hujus circuli partem eidem occurrit, erit hujus circuli polus.

DEM. Si punctum A fuerit polus circuli CE, atque AB plano hujus circuli perpendicularis; a puncto B ad circuli peripheriam ducantur rectae BC, BD, atque praeterea a polo A rectae AC, AD, erit AC = AD, quia A ſupponitur eſſe polus, et proinde ACq = ADq (§. 110. Cor. 1.). Eſt vero ob angulos apud B rectos ACq = ABq + BCq et ADq = ABq + BDq ideo ABq + BCq = ABq + BDq, BCq = BDq, et BC = BD. Modo prorſus ſimili demonſtratur, quamcunque aliam rectam ut BE a puncto B ad peripheriam CDE ductam rectae BC aequalem eſſe. Ex quo patet punctum B eſſe circuli CDE centrum. Producta igitur perpendiculari AB verſus alteram circuli CDE partem, donec ſphaerae ſuperficiei apud G occurrat, etiam G polum hujus circuli eſſe, ex §. *praec.* patet. F.146.

§. 283.

Quicunque ſphaerae circulus duos tantum habet p-los, nec plures.

F.146. DEM. Si enim A fuerit polus circuli CDE, pe-pendicularis ex A ad planum circuli CDE per ejus ce-trum B tranſit, atque punctum G, alterum diamet ſphaerae AG extremum, pariter erit polus (§. 282. Quodſi jam tertium aliquod punctum H fuerit polu recta HB ex hoc puncto ad planum circuli CDE pe-pendicularis tranſiret per centrum B atque ideo duae di-verſae rectae AB et HB eidem plano CDE ad iden punctum B eſſent perpendiculares, quod contra §.2 Cor. 2.

COR. Quodſi igitur ab uno polo A circuli CDE d-catur recta AG ad alterum polum G, haec AG tran per centrum circuli CDE et plano ipſius eſt perpend-cularis. Oppoſito enim caſu per B duci poſſet rec plano circuli CDE perpendicularis, quae ſi usque ſuperficiem ſphaerae producatur, ejus puncta extre forent circuli CDE poli ad prioribus A et G diver quod eſſe nequit.

§. 284.

Circuli in ſuperficie ſphaerae paralleli vocantur, qu-rum plana ſibi ſunt parallela, atque recta duos circuli ſphaerae ſuperficie deſcripti polos connectens hujus ci-culi *Axis* vocatur.

COR. I. Duo vel plures circuli paralleli eosdem hab polos. Recta enim ex centro ſphaerae ad unum eor perpendicularis etiam alteri eſt perpendicularis (§. 2 et 255.) atque per utriusque centrum tranſit (§. 269. C 1.). Proinde duo extrema illius rectae quae ſunt in ſph-rae ſuperficie puncta, utriusque vel plurium parall-rum circulorum poli ſunt.

COR. II. Axis ejusmodi circuli per ipſius cent tranſit et plano ipſius perpendicularis eſt (§. 283. C

COR.

COR. III. Circuli paralleli eundem habent axem (§. praec. Cor.).

COR. IV. Quodſi A et G fuerint poli circuli CDE, rectae, cui ex affectionibus ſex ſequentibus, quod nimirum 1) tranſeat per polum G parallelorum IK et CE, 3) tranſeat per ſphaerae centrum 4) tranſeat per circuli CE centrum, 5) tranſeat per circuli huic paralleli IK centrum, 6) plano circuli CE vel IK perpendicularis ſit, duae competunt, reliquae quatuor ſimul tribuendae ſunt. F. 146.

COR. V. Circulus ABCD ſphaerae, qui tranſit per polos A et C alterius BD, cujus proinde planum tranſit per hujus axem AC, circulo BD inſiſtit perpendiculariter (§. 243.), eſt circulus maximus (§. 269. Cor. 2.) atque bifariam ſecat circulum BED, quia communis interſectio tranſit per G centrum circuli BED. F. 147.

COR. VI. Maximus in ſphaera circulus ABCD alium BD ſecans ad angolus rectos tranſit per ejus polos. Ducatur enim ex centro circuli maximi ABCD, quod idem eſt cum ſphærae centro, recta FG ad alium BD perdendicularis, quae erit in plano circuli maximi (§. 244. Cor. 1.) et tranſit per centrum alterius (§. 269. Cor. 1.) et polos ejusdem (§. 281.).

COR. VII. Maximus igitur circulus alteri cuidam circulo perpendiculariter inſiſtens, eundem bifariam ſecat. Hincque maximus circulus alium oblique ſecans eundem in duas partes inaequales ſecat.

COR. VIII. Si duo circuli maximi ſeſe normaliter ſecant, quilibet per alterius polos tranſit, et arcus unius qui inter alterum ejusque polum intercipitur, quadrans eſt.

COR. IX. Si circulus maximus tranſit per polos alterius BD; arcus maximi circuli BC, CD et AB, AD ſunt aequales, quia eorom chordae aequales ſunt (§. 141.).

COR. X. Circulus maximus, qui alium bifariam ſe-
cat, tranſit per ejus axem et polos, eique inſiſtit no-
maliter.

COR. XI. Si duo maximi circuli AHC et AEC ſeſe in A
ſecent, tertius circulus maximus KHEL ipſi AC perpe-
dicularis tranſit per polos utriusque priorum AHC
AEC (§. 250.).

COR. XII. Quodſi igitur CH et CE fuerint quadrant
circulorum maximorum AHC et AEC, maximus q
per E et H tranſit, circulus tranſit per circulorum AH
et AEC polos. Erit enim hic circulus in plano HI
ad AC perpendiculari. Circuli vero AHC et AEC eti
per polos ipſius KHEL tranſeunt, qui igitur erunt in
et C (§. 283.).

F.151. COR. XIII. Si duo maximi circuli AB, CD, ſe i
vicem ſecent in recta EF, angulus GHI, quem axes e
rum comprehendunt, aequalis eſt angulo inclinatio
horum circulorum. Poſito enim per G plano ipſi E
perpendiculari, quod ſecat circulos in rectis AB et C
et tranſit per polos H et I, erit ob EGD = R = FG
angulus DGB inclinatio circuli AB ad circulum C
Praeterea erit HGD = R = IGB, hincque HGD – IG
= IGB – IGD, id eſt HGI = DGB.

§. 285.

*Quodſi ABC fuerit circulus in ſphaera maximus,
cujus perimetro aſſumtum ſit punctum quodcunque A,
quod tranſeat recta EF ad planum circuli ABC perpen-
cularis; quodſi praeterea per hanc rectam ponantur d
plana diverſa ſphaeram ita ſecantia, ut prodeant duo c
culi AB et AC; recta FE erit utriusque hujus circuli t
gens in A.*

F.148. DEM. Planum utriusque circulorum AB et A
plano circuli maximi ABC rectum eſt (§. 243.) ideo cir
culus ABC utrumque AC et BD bifariam ſecat (§. 28
Cor. 6.) recta AB communis interſectio circuli AB e
maximi ABC eſt circuli AB diameter, recta AC vero cir

cul

culi AC cum plano circuli ABC communis interſectio eſt circuli AC diameter. Quia igitur EF plano circuli ABC perpendicularis eſt, et in plano utriusque circuli AB et AC exiſtit, atque praeterea diametro utriusque perpendicularis inſiſtit, ita ut anguli EAB et EAC ſint recti; eadem recta utrumque horum circulorum in A tanget (§. 156.).

§. 286.

Circuli ſphaerae, de quibus §. praecedente ſermo eſt, concurrunt quidem in ſuperficie ſphaerae apud A, ſed vero ſe ſeinvicem non ſecant. Quilibet horum circulorum ita eſt comparatus, ut totus cadat ad unam partem plani alterius. Atque ejusmodi *ſphaerae circuli ſe mutuo tangere* dicuntur.

COR. Duorum igitur in ſphaera circulorum plana ſi mutuo ſecuerint, ita ut communis interſectio eorum planorum utrumque circulum tetigerit, iidem circuli ſe mutuo tangent.

§. 287.

Si in ſphaera duo circuli ſibi mutuo occurrunt in eodem puncto circuli maximi per polos eorum tranſeuntis; iidem ſe mutuo tangunt.

DEM. Si circuli AB, AC ſibi occurrunt in puncto F. 148. A peripheriae circuli maximi per polos utriusque tranſeuntis; circulus ABC utrumque biſecat, et quidem normaliter (§. 285. Cor. 4.). Proinde rectae AB, AC communes interſectiones circulorum AB, AC cum circulo ABC ſunt eorum diametri. Praeterea recta EF communis interſectio planorum AB et AC ad planum ABC eſt perpendicularis (§. 250.) et proinde anguli EAB et EAC ſunt recti (§. 235.). Ex quo patet, rectam CF eſſe tangentem utriusque circuli AB et AC (§. 156.), et ipſos circulos AB et AC ſe mutuo tangere (§. 287. Cor.).

COR. I. Per idem punctum A innumerabiles circuli ſe mutuo tangentes tranſire poſſunt, inter quos tamen unicus tantum eſſe poteſt ſphaerae circulus maximus.

COR. II.

F.149. COR. II. Si maximus circulus AD tangat minore CD in puncto D, atque ABDC pariter ſit maximus ci culus per polos circuli CD tranſiens, communis horu maximorum circulorum diameter erit recta AD, cuj unum extremum eſt punctum contactus D (§.285. Co 4.), atque per alterum punctum extremum A iteru innumerabiles circuli maximum AD tangentes tranſi poſſunt, inter quos tamen unicus tantum eſt AB circu CD parallelus.

COR. III. Hic circulus AB ſimul parallelo ED eſt æ qualis. Quia enim hi circuli ſunt paralleli, commun habent axem FG ipſis perpendiculariter inſiſtentem, q re ſunt EF et EG horum circulorum diſtantiae a ſphae centro E. Per E poſitum concipiatur planum ipſis A et CD parallelum, erit AE : ED = EF : EG et proin EF = EG ob AE = ED. Ex quo patet, eſſe circul AB et CD aequales (§.276.).

§. 288.

Si per polos circulorum parallelorum deſcripti ſint ci culi maximi, arcus parallelorum inter eos intercepti ſ ſimiles; et arcus maximorum inter parallelos intercepti ſi aequales.

DEM. Si parallelorum ABCD et EFGH poli ſi
F.150. I et K, per quos tranſeant duo circuli maximi IA et IBKD; erit axis IK parallelorum ad eosdem perp dicularis: proinde BLK et FMI, ALM et EML ang recti. Ex quo patet, angulum ALB pariter ac angul EMF eſſe angulum inclinationis plani IAK ad plan IBK (§. 239.) quare hi anguli ſunt aequales (§. 2 Cor. 2.) et arcus ſimiles (§. 215. Cor. 5.). Deinde arcus EI = FI, AI = BI (§.285. Cor. 8.) proinde E AI = FI — BI, id eſt EA = FB.

COR. I. Si fuerit ABC circulus ſphaerae maximus, arcus AB ad peripheriam circuli ſphaerae maximi, ut gulus inclinationis planorum IAK et IBK ad quatuor ctos.

COR.

COR. II. Quodſi in plano circuli IAKC ducatur recta IN ipſi IK normalis, pariter ac in plano circuli IBKD recta OI eidem IK normalis, prior IN circulum IAKC et poſterior OI circulum IBKD apud I tanget (§. 156.) atque angulus NIO, quem iſtae tangentes comprehendunt, idem erit cum angulo ALB inclinationis planorum IAK et IBK ad ſe invicem.

§. 289.

Si duo in ſphaera circuli ſe mutuo ſecent; maximus circulus per utriusque polos ductus ſegmenta bifariam ſecat.

DEM. Si duo circuli ABCD, BEDF ſe mutuo F. 152.
in ſphaera ſecent, ita ut eorum communis interſectio ſit BD, ſemper poſſibile eſt, ut maximus quidam circulus per eorum polos tranſeat. Per duos enim polos H, A, et centrum ſphaerae K poni poteſt planum, in quod reliqui poli C et I pariter cadent. Sit igitur AECF talis, atque is bifariam ſecabit ſegmenta utriusque circuli BAD, BCD, BED, BFD. Circulus enim AECF rectus erit ad utrumque planum AC ad EF. Ergo communis interſectio eorum BD eſt ad planum circuli AECF recta (§. 250.). Deinde linea recta EF eſt diameter circuli AECF et AC diameter circuli ABCD (§. 285. Cor. 4.). Linea recta AC perpendiculariter dividit rectam BD, proinde bifariam dividit utrumque arcum BAD et BCD (§. 139. Cor. 1.). Simili ex ratione EF perpendiculariter dividens rectam BD ſimul bifariam dividit arcus BED et BFD.

§. 290.

Si maximus circulus ABCD tranſeat per polos parallelorum AFC et MNO, a centro ſphaerae E diſtantium aequali intervallo, ita ut AFC et MNO ſint ſemicirculi; praeterea vero alius circulus maximus HFI utrumque parallelorum oblique ſecet in LF et QN: erunt arcus AF, NO et FC, MN reſpectu circuli ſecantis HFI alterne poſiti aequales.

F.153. DEM. Ducta axe parallelorum DB in triangu apud G et P rectangulis LGE et EPQ erit EG = (*hyp.*) LEG = QEP (§. 31.). Proinde eſt GL = Deinde triangula GFL, et BQN apud L et Q pariter ſi rectangula (*dem.* §. *praec.*) GL = OP et GF = PN (276.) erit angulus FGL = NPQ (§. 75.) et proinde cus FC = MN (§. 138.) ex quo ſimul patet, fore = NO (§. 21.).

SECTIO XI.

DE

ANGVLIS SOLIDIS GENERATIM E IN SPECIE DE TRIANGVLIS SOLIDIS.

§. 291.

F.154. Angulus ſolidus eſt plurium quam duorum angu rum planorum rectilineorum, qui non in eod conſiſtunt plano, ſed ad unum punctum conſtituti ſu ad ſeinvicem inclinatio. Ipſi anguli plani, qui ſo dum angulum comprehendunt, ipſius *Hedrae* vocabunt Anguli vero anguli ſolidi ſunt anguli, ſub quibus pl haedrarum ad ſe invicem ſunt inclinata. Ejusmodi gulum ſolidum poſſibilem eſſe, ſic perſpicitur. BCDEF, figura plana rectilinea quaecunque, atqu puncto A in ſublimi aſſumto ad omnes apices angulor B, C, D, E, F, hujus figurae ducantur rectae AB, A AD, AE, AF, orienturque circa punctum A ang BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quorum plana ſe ſecabunt in rectis BA, CA, DA, EA, FA, per co mune punctum A tranſeuntibus, atque planorum om um circa punctum A conſtitutorum ad ſe invicem inc

nat

natio eſt, quod vocamus angulum ſolidum. Dividi poſſunt anguli ſolidi ſecundum numerum hedrarum in *triangulos*, *quadrangulos*, *quinquangulos* etc. *ſolidos*, prouti a tribus vel quatuor vel quinque, vel pluribus utcunque hedris comprehenduntur.

§. 292.

Si in triangulo ſolido quaevis hedra ſit angulus duobus angulis rectis minor, duae quaelibet haedrae ſunt tertia majores.

DEM. Si tres anguli plani duobus angulis rectis minores BAC, BAD, DAC, comprehendant angulum ſolidum apud A; atque maximus ſit BAC; fiat angulus BAE aequalis angulo BAD, et recta AE = AD. Ducatur recta BE eaque producatur donec concurrat cum recta AC apud C. Praeterea ducantur DC et DB. Erit igitur in triangulis BAD et BAE latus AB commune, AD = AE, angulus BAE = BAD. Proinde BD = BE. Deinde in triangulo BDC eſt BD + DC $>$ BC, vel BD + DC $>$ BE + EC hincque DC $>$ EC. Proinde in triangulis BAC et EAC erit angulus DAC $>$ EAC (§. 68.) ideoque DAC + DAB $>$ EAC + BAE, id eſt DAC + DAB $>$ CAB. F.155.

§. 293.

Omnes haedrae angulum ſolidum quemcunque comprehendentes ſimul ſumtae ſunt quatuor angulis rectis minores, ſi quaevis ſigillatim ſumta duobus angulis rectis minor ſit.

DEM. Quodſi plano quodam ejusmodi tribuatur ſitus, ut omnes anguli ſolidi haedras ſecet, rectae interſectionum terminabunt figuram quandam rectilineam tot laterum, quod ſunt haedrae anguli ſolidi, atque ad apices angulorum hujus figurae orientur tot trianguli ſolidi, quot ſunt hedrae anguli ſolidi. Jam vero quia duo anguli ABF et ABC majores ſunt uno FBC, et duo ACB, ACD majores uno BCD, et ſic deinceps, erunt trian-

triangulorum G, H, I, K, L ad baſin anguli ſimul ſu
ti omnibus angulis figurae BCDEF ſimul ſumtis ma
res. Sed B + C + D + E + F + 4R = omnibus an
lis triangulorum G, H, I, K, L ad baſin + omnibus h
dris circa A poſitis (§. 93. Cor. 7.). Proinde ab aequalib
inaequalia ſubtractis remanet 4R > omnibus haedris ci
ca A poſitis.

§. 294.

Triangulum ſphaericum ABD eſt pars ſuperfic
ſphaericae, a tribus circulorum ejus ſphaerae maxi
rum arcubus AB, BD, DA terminata, cujus latera ſ
arcus illi AB, BD, DA, anguli vero ii, qui apud p
cta A, B, C includuntur a rectis, arcus ibidem c
tingentibus.

COR. I. Si ex apicibus angulorum trianguli ſphaer
ABD ad ſphaerae centrum C ducantur rectae AC, B
DC; oritur triangulus ſolidus ABCD, cujus anguli
dem ſunt cum angulis trianguli ſphaerici A, B, C, c
§. 289. Cor. I. haedrae vero anguli ſectorum ACB, BC
DCA, quorum ratio ad ſe invicem eadem eſt cum ra
ne arcuum qui ſunt latera trianguli ſphaerici. Qu
cum dato arcu trianguli ſphaerici ſimul detur haedra
anguli ſolidi eidem reſpondens, et vice verſa data h
dra trianguli ſolidi ſimul detur arcus reſpondens tri
guli ſphaerici, quia eſt 4R : DEF = Periph. circ. m
ximi : DF; ſi ſolae hae rationes laterum ſpectent
inter triangulum ſphaericum et triangulum ſolidum
hil intererit differentiae. Quare omnia de triangulis
lidis hoc reſpectu explicanda ſimul de triangulis ſpha
cis erunt intelligenda, eſt viciſſim quae de ſphaer
dicentur triangulis ſimul ad triangulos ſolidos erunt
plicanda.

COR. II. Ideo hæc generalis trianguli ſolidi et tri
guli ſphaerici conſtructio poteſt concipi: Sector circ
quicunque CBD ſumitur pro baſe, atque ab ejus c
tro C recta quaedam CA ducitur extra planum ſecto

Dein

Deinde centro C et radio aequali radio ſectoris CBD in plano ACD deſcribitur arcus AD terminans ſectorem ACD, atque eodem modo in plano ACB ſector ACB terminatur. Caeterum ſector BCD, qui pro baſe ſumitur vel ſemicirculo major eſſe poteſt, vel minor.

§. 295.

Quodſi in triangulo ſphaerico latus dimidia circuli peripheria minus fuerint, etiam angulus illi oppoſitus duobus rectis minor erit; major vero, ſi latus ſit dimidia peripheria majus.

DEM. Circuli ABD circa centrum C deſcripti diameter ſit AB. Ducatur CE extra planum hujus circuli, atque per ECA ponatur ſemicirculus ejusdem diametri. Tum vero ſectore ACD pro baſe aſſumto, qui minor eſt ſemicirculo ABD, compleatur triangulum ſphaericum AED; quo facto patet, angulum AED oppoſitum lateri AD duobus rectis minorem eſſe, quia AED + DEB = 2R. Quodſi vero ſector ABDC ſemicirculo major ſumatur pro baſe, ut reliquis lateribus manentibus in locum lateris AD ſuccedat ABD, angulus huic lateri oppoſitus AED exterior erit prioris ad alteram partem poſiti complementum ad 4R, et proinde eſt AED > 2R. F. 157.

COR. I. Cuivis triangulo ſphaerico, in quo unum latus dimidia peripheria majus eſt, producto hoc latere, et completo integro circulo, apud verticem opponitur aliud, quo dato prius triangulum ſimul determinatum eſt. Hanc ob cauſſam triangula ſphaerica quorum aliquod latus dimidia peripheria majus eſt, ſeponi ſolent, et proinde eorum, quae conſiderari ſolent, triangulorum ſphaericorum neque latus ullum dimidiam peripheriam, nec angulus duos rectos excedit.

COR. II. Productis duobus lateribus AE et AD trianguli ſphaerici AED usque ad concurſum apud B in recta AB, quae eſt communis planorum horum laterum interſectio, producitur triangulum aliud EBD priori conti-

guum, cujus angulus B aequalis eſt angulo A, an
vero apud E et D ſunt ſupplementa angulorum apu
et D trianguli ADE. Iisdem triangulis latus ED c
mune eſt, BD autem eſt complementum lateris AD
EB complementum lateris EA ad duos rectos.

§. 286.

F.158. Quodſi ſphaera ſecetur tribus planis, ut in fig
ubi maximi circuli ABCD, FBGD, AFGC ſe mu
ſecant; octo oriuntur trianguli ſolidi, quorum unu
DEFC, cui vicinus eſt alius DEFA. Utrique e
communis eſt hedra DEF. Hedra DEA eſt he
DEC, pariter ac hedra AEF ipſius FEC complemen
ad duos angulos rectos; angulus DAF idem eſt cum
gulo DCF, angulus vero DFA eſt complementum
guli DFC ad duos rectos, pariter ac angulus ADF i
FDC. Triangulus ſolidus AEFB ad triangulum
dum AEFD eandem, quam DEFC ad DEFA hab
relationem; id quod generaliter valet de duobus ejusm
di triangulis ſolidis ſuper idem planum conſtitutis. Tr
angulus ſolidus AEGB *e diametro opponitur* ipſi DEF
atque in hiſce triangulis quaevis hedrae et quivis ang
ad oppoſitas partes cadentes aequales ſunt. Hedra DE
aequalis eſt hedrae BEG, atque AEG = FEC pari
ac AEB = DEC. Angulus AGB = DFC, ABG
CDF et GAB = DCF. Trianguli igitur ſolidi AEG
et CEFD aequales habent hedras et angulos, ita quide
ut aequales anguli aequalibus hedris comprehendant
et aequales hedrae aequalibus angulis interjaceant. Voc
bimus in poſterum ejusmodi *triangula ſolida aequal*
quia ad aequalitatem ſuperficierum, quas latera ejusmo
trianguli terminant, hic non ad adtendimus.

COR. Quodſi duo iſti trianguli ſolidi e diametro ſ
oppoſiti AEGB et CEFD ſeparatim conſiderentur atq
inter ſe comparentur; patet, eosdem ſibi invicem co
gruere non poſſe, licet latera eorum ſeparatim ſpect
et anguli ſibi conguant (§. 243. Cor. 2.). Quicunque

ro triangulus ſolidus uni eorum e diametro oppoſitorum congruit, is etiam alteri aequalis erit.

§. 297.

Si in duobus triangulis ſolidis adeſt unus angulus aequalis eſt praeterea duo latera angulum aequalem comprehendentia aequalia, reliquum latus aequale eſt, et reliqui anguli.

DEM. 1) Si in triangulis HIKL et DEFC eſt angulus F = ang. HKL, latus DEF = HIK, CEF = LIK; puncto I puncto E recta IK rectae EF et plano IKL plano CEF impoſito, recta IL cadit in EC (§. 17. Cor. 2.), planum HIK coincidit cum plano DEF (§. 243. Cor. 2.) et recta IH cadit in rectam ED (§. 27. Cor. 2.). Proinde et planum anguli HIL coincidit cum plano anguli DEC (§. 230.), angulus KHL congruit angulo FDC et angulus HLK angulo DCF (§. 14.). Hinc triangulum ſolidum HIKL integrum aequale eſt triangulo DEFC. F. 159.

2) Si in triangulis LIKM et DEFC fuerit angulus F = LKM, latus DEF = IKM, et latus CEF = IKL; triangulum KILM integrum quidem integro triangulo DEFC congruere nequit: congruit vero triangulo EGA priori DEFC e diametro oppoſito (*Dem. caſ.* 1. coll. cum §. 296.). Proinde et hoc caſu triangula ſolida, quae unum angulum aequalem et praeterea duo latera eum angulum aequalem comprehendentia aequalia habent, tota aequalia ſunt (§. 296. Cor.).

§. 298.

In triangulo ſolido aequicruro anguli ad baſin aequales ſunt.

DEM. Si triangulum ſolidum ABCD ſit aequicrurum, crura ejus aequalia ABC et ABD continuentur verſus E et F, et fiat CBE = DBF, et planum anguli DBE terminabit triangulum ſolidum CBDE, pariter ac planum anguli CBF triangulum ſolidum CBDF. In his triangulis vero ſolidis ABED et ABCF eſt angulus CAF = DAE (§. 13.) latus ABC = ABD (*hyp.*) et latus ABE = ABF (§. 21.) proinde angulus ACF = ADE, F. 161.

 ang.

ang. AED = AFC, latus CBF = DBE (§. 297.). Id
in triangulis CBDE et CBDF eſt ang. CED = CF
(*Dem.*) latus CBF = DBE (*Dem.*) et latus CBE = DB
(*hyp.*), et proinde ang. DCF = CDE (§. 297.). I
quo porro concluditur, eſſe ACF − DCF = ADE
CDE, id eſt ACD = ADC.

§. 299.

F. 163. Ex praecedentibus patet, quod duobus hedris da
et angulo ab iisdem comprehenſo, unicum ſolum deté
minatum ſit triangulum; hoc autem factum non eſt,
datus fuerit angulus ab iisdem hedris non comprehenſ
Ex hedris MCR, NCM atque angulo R compoſitum
triangulum ſolidum MCNR. Per CM ponatur plan
DCM, quod plano RMr poteſt eſſe perpendicula
Fiat angulus DCN = DCG, atque per CM, CG pon
tur planum GCM, erit latus GCM = NCM, atque tr
angulum GCMR pariter ac NCMR ex iisdem datis con
ſtructum. Quodſi igitur in duobus triangulis ſolid
unus angulus fuerit aequalis, et praeterea duae hedr
angulum aequalem non comprehendentes aequales; t
angulorum aequalitas non ſequitur.

COR. Quia triangulum ſolidum MCGN eſt aequicr
rum; anguli apud G et N erunt aequales. Angulus MN
eſt ipſius MNR complementum ad duos angulos recto
Proinde quoque angulus MGR eſt anguli MNR compl
mentum ad duos angulos rectos.

§. 300.

*Si in duobus triangulis ſolidis eſt unum latus aequal
et praeterea duo anguli huic lateri adjacentes aequales, r
liquae hedrae aequales ſunt, et reliqui anguli.*

F. 159. DEM. 1) Si in triangulis ſolidis HIKL et DEF
eſt latus EFC = IKL, angulus DFC = HKL et anguli
DCF = HLK; punctum I ponatur in E, recta IK in E
et planum IKL in planum EFC, atque recta EC cad
in IL (§. 17. Cor. 2.) planum KIH in planum FED,
planu

planum LIH in planum CED (§. 243. Cor. 2.). Cum igitur duo plana ſe invicem in unica tantum recta ſecare poſſint, recta IH cadit in rectam ED. Proinde ang. FDC = KHL, latus FED = KIH, et latus CED = LIH (§. 15.).

2) Si in triangulis LIKM et DECF ſit latus FEC = KIL, ang. DFC = LKM, et DCF = KLM; triangula haec congruere quidem non poſſunt, ſed triangulum IKLM congruit triangulo AEGB priori DEFC e diametro oppoſito; et proinde hoc quoque caſu propoſitio vera eſt.

§. 301.

Quamvis ex duobus angulis et una hedra hisce angulis interpoſita non niſi unicum determinetur triangulum (§. *praec.*); hoc tamen iterum non efficitur, uno quidem latere dato et duobus angulis, ſed talibus, quorum unus lateri dato adjacet, alter vero opponitur. In figura enim 163 triangula ſolida MCNR et MCGr ex ejusmodi datis ſunt compoſita, quae tamen non ſunt aequalia. Eſt enim angulus DGM = DNM, et proinde ang. rGM = RNM. Praeterea eſt angulus r = R, atque hedra GCM = NCM. Quodſi igitur in duobus triangulis ſolidis unum habetur latus aequale, et duo anguli aequales, quorum unus hedrae aequali adjacet, alter vero eidem opponitur; aequalitas triangulorum non ſequitur. F.163.

Cor. Hedra rCM eſt ipſius RCM complementum ad duos angulos rectos. Iſtae vero hedrae ſunt illae, quae inter angulos aequales apud r, G, et R, N, non interjacent. De hiſce enim haedris aequalibus angulis interpoſitis illud non dicendum eſt.

§. 302.

Si in triangulo ſolido duo anguli aequales ſunt, hedrae ipſis angulis oppoſitae ſunt aequales.

DEM. Quodſi in triangulo ſolido ABCD fuerint anguli CAD et CDA aequales, erit aut latus CBA = CBD, F.162.

aut CBA < CBD, aut CBA > CBD. Quodſi ſecun dum verum foret, produci poſſet latus CBA usque ad EB, donec fiat EBA = CBD. Per E, B et D pona tur planum EBD, atque in triangulis ABCD et ABE foret ang. A = CDA latus EBA = CBD et latus ABD = ABD, proinde ang. EDA = CDA (§. 297.) *quod im* Tertio caſu foret pars ipſius CBA, v. g. FBA = CBD Poſito igitur plano per F, B et D, ob FAD = CD (*hyp.*) ABD = ABD et FBA = CBD foret ang. FD = CDA (§. 297.) *quod iterum impoſſibile.* Ergo et CBA = CBD.

COR. Triangulum ſolidum, in quo omnes anguli ae quales ſunt, eſt aequilaterum.

§. 303.

In triangulo ſolido, majus latus opponitur ang majori.

F.162. DEM. In triangulo ſolido ABCD ſit angulus CD > CAD, atque per rectam BD ponatur DBF ita, ut an gulus FDA fiat = CAD, eritque FBA = FBD, et pro inde FBA + FBC = FBD + FBC, id eſt ABC = FBD + FBC. Quia jam eſt FBD + FBC > CBD (§. 292.) et quoque ABC > CBD.

COR. In triangulo igitur ſolido ABCD major angul opponitur lateri majori. Si enim fuerit latus ABC > CBD; erit aut angulus CDA < CAD, aut CDA = CA aut CDA > CAD. Primo caſu foret ABC < CBD, ſe cundo caſu foret ABC = CBD (§. 302.) utrumque *contra hypotheſin*, proinde eſt CDA > CAD.

§. 304.

Si in duobus triangulis ſolidis tria latera ſigillat ſumta aequalia ſunt, etiam anguli aequalibus hedris com prehenſi ſunt aequales.

F.159. DEM. Hedra IKL utrique triangulorum ſoli rum HIKL et IKLM ſit communis, quarum una HI ſupra et altera IKLM infra eam collocata ſit. Praete

ſit hedra HIK = IKM et HIL = LIM. Planum anguli HIM ſecet latus IKL in recta IN, atque duo provenient triangula ſolida aequicrura KIHM atque LIHM. Proinde eſt angulus KHN = KMN et LHN = LMN, ideoque KHN + LHN = KMN + LMN, id eſt KHL = KML. Ergo et reliqui anguli aequales ſunt (§. 297.). Ex quo patet propoſitum, ſi latera triangulorum inverſo compoſita ſint ordine. Quia vero latera illius trianguli, quod triangulo HIKL e diametro opponitur, eodem compoſita ſint ordine, quo componuntur latera trianguli IKLM atque triangula e diametro ſibi oppoſita aequalia ſint, etiam eo caſu propoſitio vera eſt, quo triangulorum latera eodem ordine ſunt compoſita. Denique ſi planum HIM caderet extra triangula foret LHN — KHN = LMN — KMN et proinde iterum KHL = KML.

§. 305.

Quodſi intra terminos trianguli ſolidi ABCD aſſumtum fuerit punctum aliquod b, *a quo ad planum cujuslibet hedrae demiſſae ſint perpendiculares* bE, bF, bG; *plana angulorum EbF, FbG, GbE, terminant triangulum ſolidum* abcd, *cujus hedrae* abc, cbd, dba, *ſunt complementa angulorum prioris, C, D, A; et cujus anguli* a, c, d, *ſunt complementa hedrarum prioris ABC, CBD, ABD ad duos angulos rectas.*

DEM. Plana enim hedrarum terminant aliquod ſolidum IEbFKBHG, atque recta bE ipſis EI et EH, bF ipſis FI et FK, bG ipſis GK et GH eſt perpendicularis. Proinde eſt ang. IEH = *a*. HGK = *d*, et IFK = *c*, (§. 239.). Praeterea planum *abc* ipſis ABC et CBD, planum *cbd* planis CBD et DBA, planum *abd* planis ABC et ABD eſt perpendiculare (§. 243.) ex quo patet, angulos BIE, BIF, BHE, BHG, BKG, BKF eſſe rectos (§. 230.). Proinde eſt EIF = C, EHG = A, et GKF = D. In figuris igitur planis quadrilateris, ſolidum EbFKBGH undique terminantibus, duo quivis anguli oppoſiti F. 160.

ſunt = 2R, quia in quovis quadrilatero ſumma omniu angulorum eſt = 4R. (§. 93. Cor. 7.) Ex quo patet, eſſ *abc* + C = 2R, *abd* + A = 2R, *cbd* + D = 2R, AB + *a* = 2R, ABD + *d* = 2R, et DBC + *c* = 2R.

COR. I. Ex his patet, eſſe A = 2R — *abd*, D = 2 — *dbc*, C = 2R — *abc*. Proinde eſt A + D + C = 6 — *abd* — *dbc* — *abc*, ideoque ſumma omnium angulorur trianguli ſolidi ſex angulis rectis minor eſt.

COR. II. Quia eſt *abd* + *dbc* + *abc* < 4R (§. 293.) ſumma omnium angulorum trianguli ſolidi duobus an gulis rectis major eſt.

§. 306.

Quod ſi in triangulis ſolidis tres anguli ſigillatim ſum ti aequales fuerint; etiam hedrae aequalibus angulis inte poſitae aequales erunt.

§.160. DEM. Si in duobus triangulis ſolidis ABCD EFGH fuerit A = E, C = G, D = H; ſumtis pu ctis *b* et *f* intra haec triangula et demiſſis ad eorum late ra perpendicularibus compleantur triangula *abcd* et *efg* uti in §. praecedente: erit *abd* = *efh*, *abc* = *efg*, *cbd* = *gfh*, quia ſunt aequalium angulorum (*hyp.*) compleme ta ad duos rectos (§. 305.). Proinde in triangulis *ab* et *efgh* eſt *a* = *e*, *c* = *g*, *d* = *h* (§. 304.); ex quo port patet, eſſe CBA = GFE, CBD = GFH, et ABD EFH, quia haec latera ſunt aequalium angulorum (*dem* complementa ad duos rectos.

§. 307.

Triangulum ſolidum dicitur *rectangulum*, in q unus angulus eſt rectus. Reliqua triangula ſolida, i quibus nullus angulus eſt rectus, *obliquangula* dicuntu In triangulo ſolido rectangulo hedra angulo recto o poſita *hypothenuſa* vocatur, reliquae hedrae angulu rectum comprehendentes vocantur *catheti*, atque cath torum unus plerumque ſumitur pro *baſe* trianguli ſoli rectanguli, quo facto alter cathetus *perpendiculum* voc tur. Brevitatis gratia in ſequentibus trianguli ſoli

recta

rectanguli baſis denotabitur per B vel b, perpendiculum per P vel p, hypothenuſa per H vel h, angulus rectus per R vel r, angulus inter baſin et hypothenuſam perpendiculo oppoſitus per M vel m, et angulus baſi oppoſitus ab hypothenuſa et perpendiculo comprehenſus per N vel n.

§. 308.

Quodſi in triangulo ſphaerico rectangulo NRM angulus M recto minor vel aequalis vel major fuerit; etiam latus P eidem oppoſitum quadrante minus vel quadranti aequale, vel quadrante majus erit.

DEM. Super recta CM, in qua planum hypothenuſae ſecat planum baſeos, conſtituatur planum MCD ad planum baſeos perpendiculare, ſecans planum P in recta DC, quae plano B erit perpendicularis, et proinde DR vel Dr quadrans, ex quo aſſerti veritas ſtatim patet. Erit nimirum NCR vel minus quadrante, vel eidem aequale, vel majus quadrante, prout H vel inter DCM et MCR cadat, vel cum DCM coincidat, vel inter DCM et rCM cadat, id eſt prout vel $M < DMR$, vel $M = DMR$, vel $M > DMR$. F.163.

COR. I. Quodſi igitur latus P fuerit recto angulo minus, angulus oppoſitus M recto minor erit; ſi fuerit $P = R$, erit $M = R$; ſi vero $P > R$ erit $M > R$.

COR. II. Sumto P pro baſe fit B perpendiculum, ergo quoque latus B ejusdem ſpeciei erit cum angulo ipſi oppoſito.

§. 309.

Quodſi in triangulo ſolido rectangulo NMR utrumque laterum B et P quadrante minus fuerit, vel majus, hypothenuſa quadrante minor erit; ſin vero alterum eorum laterum B et P minus fuerit quadrante, et alterum majus, erit hypothenuſa quadrante major. Si denique alterutrum eorundem laterum quadrans fuerit, et hypothenuſa quadrans erit.

F.165. DEM. In plano baſeos RMr, quod a plano R normali ſecatur in Rr, ducatur CM rectae Rr obliqu atque eidem ſit planum DAE perpendiculare, quod ſ cet planum rAR in AC, erit planum RMr ipſi DAE no male (§. 243.), et proinde anguli ACR et ACr recti (250.) et arcus AR, Ar quadrantes. Praeterea ſunt GC et gCM anguli recti (§. 235.), ideo angulus NCM acutus et nCM obtuſus. Proinde in triangulo ſphaeri NRM, cujus latera B, P, quadrante minora ſunt, hyp thenuſa MN quadrante GM minor eſt, pariter ac in t angulo ſphaerico NrM, cujus latera Nr et rM vel B P ſunt quadrante majora. In triangulo autem ſphaer co nRM, ubi nR ſive P majus eſt quadrante, et MR ſi B quadrante minus, hypothenuſa Mn quadrante maj eſt, pariter ac in triangulo ſphaerico nMr, ubi rM ſi B quadrante major, nr vero ſive P, quadrante minus e Denique ſi P fiat AR, hypothenuſa fit quadrans AC

COR. I. Quia anguli hypothenuſae adjacentes ejusde ſpeciei ſunt cum hedris iisdem oppoſitis, patet, hyp thenuſam eſſe acutam ſi uterque angulorum hypothen ſae adjacentium quadrante major fuerit vel quadran minor; hypothenuſam vero eſſe obtuſam, ſi unus h rum angulorum ſit obtuſus et alter acutus. Deniq hypothenuſam eſſe quadrantem, ſi unus horum angul rum fuerit rectus.

COR. II. Hinc viciſſim ſequitur, ſi hypothenuſa tr anguli ſphaerici rectanguli acuta fuerit, utrumque c thetorum vel majorem eſſe quadrante vel minoren hincque utrumque angulorum hypothenuſae adjacente vel obtuſum eſſe vel acutum; ſi vero hypothenuſa fu rit obtuſa, cathetorum alterutrum quadrante majore fore alterum minorem, et angulorum hypothenuſae a jacentium unum fore obtuſum, et alterum acutum: d nique ſi hypothenuſa quadrans fuerit, etiam unum c thetum quadrantem et unum angulum hypothenuſae a jacentum rectum fore.

COR. III. Duae igitur ſunt ſpecies trianguli ſphaerici rectanguli, una, cujus hypothenuſa quadrante minor eſt, altera cujus hypothenuſa excedit quadrantem. Tertia quae hic conſtitui poſſet ſpecies, cujus hypothenuſa quadranti aequalis eſt, ad utramque priorum referri poteſt, ſi angulus rectus habeatur pro maximo omnium acutorum; et pro minimo obtuſorum.

COR. IV. Si hypothenuſa eſt minor quadrante, triangulum erit vel NMR, cujus latera B et P quadrante ſunt minora, et anguli M, N, acuti, vel NM*r*, cui prius triangulum NMR eſt contiguum.

COR. V. Si hypothenuſa eſt major quadrante, triangulum erit vel *n*M*r* vel *n*MR. Priori *n*M*r* ad adverſam plani *r*AR partem contiguum eſt triangulum, cujus hypothenuſa eſt ſupplementum hypothenuſae M*n*, et ideo quadrante minor, baſis vero ſupplementum baſeos M*r*, et ideo pariter quadrante minor. Cum igitur et *rn* quadrante minus ſit, omnia latera trianguli illius erunt minora quadrante, et anguli praeter rectum acuti. Ejusdem generis triangulum et alteri *n*MR contiguum eſt infra baſem MCR, cujus nimirum hypothenuſa eſt complementum hypothenuſae M*n* et perpendiculum ſupplementum perpendiculi R*n*.

COR. VI. Proinde omni triangulo ſphaerico rectangulo, cujus latera B et P non ſunt minora quadrante, nec proinde anguli M et N acuti, contiguum erit triangulum aliud, in quo iſtae conditiones obtinent.

§. 310.

*Quodſi in triangulo ſphaerico obliquangulo MQ*m *ex quocunque angulo Q ad planum lateris oppoſiti M*m *demittatur latus perpendiculare QR; illud cadet intra angulum Q, ſi angulorum M et* m *uterque acutus ſit vel obtuſus; et extra eundem angulum, ſi alteruter eorum angulorum fuerit acutus et alter obtuſus.*

DEM.

F.164. DEM. Demiſſo ex Q ad latus oppoſitum perpen
166. diculo QR, duo oriuntur triangula rectangula QMR e QmR, atque in utroque eorum QR eſt latus P. Quodſi jam illud latus P cadat intra angulum Q, ſitque angulu M acutus et m obtuſus, foret latus P quadrante mi nus et ſimul eodem majus (§. 308.) quod impoſſibil eſt. Si vero P cadat extra angulum Q, ac uterque angu lorum M et QmM ſit acutus, foret QmR obtuſus, et i iterum ſimul quadrante majus et minus, quod eſt impoſ ſibile. Idem ſequeretur, ſi M foret obtuſus et QmM pariter obtuſus.

COR. Quia igitur triangula ſphaerica rectangula QRM et QRm, ex quibus obliquangulum QMm conficitur addenda ſint, ſi QR intra angulum Q cadat, et unum al altero ſubtrahendum, ſi QR cadat extra angulum Q; e datis angulis M et m colligi poterit, utrum horum i caſu quovis locum habeat. In triangulo rectangulo QRM ſignentur latera ut ante litteris H, B, P, M, N R; in altero QRm perpendiculum QR illi cum prior commune littera P et angulus rectus littera R, reliqu autem latera et anguli eodem modo poſiti litteris h, b m, n. Priori igitur caſu, quo M et m acuti ſunt, ve obtuſi, erit angulus Q = N + n et latus Mm = B + b poſteriori autem caſu, quo unus angulorum M et m acutus eſt, et alter obtuſus, erit Q = N − n et Mm = B − b. Quodſi igitur angulus Q ſigno ambiguo note tur hoc modo N ± n et latus Mm ita B ± b, quo ca ſu ſignum + quove ſignum − locum habeat, ex condi tione angulorum M et m erit concludendum.

SECT

SECTIO XII.

DE FIGVRIS SOLIDIS EARVMQVE SVPERFICIEBVS.

§. 311.

Quodſi fuerit figura plana rectilinea ABCDE quaecunque plano LM parallela, atque per apicem unius anguli A hujus figurae ducatur recta AF occurrens plano LM in F; tum vero per apices reliquorum angulorum ducantur rectae BG, CH, DI, EK, prius ductae AF parallelae, plano LM occurrentes in punctis G, H, I, K: ſolidum quod a figuris planis rectilineis ABCDE, FGHIK, atque AG, GC, CI, IE, terminatur, *Priſma* dicitur. Figura ABCDE et FGHIK vocantur *Baſes* Priſmatis; reliquae vero ipſius *Hedrae* ſive *Latera*. F. 167.

COR. Rectae AB, FG, in quibus planum parallelarum AFBG ſecat plana parallela, ſunt rectae parallelae (§. 54.). Ideo hedrae prismatis ſunt parallelogramma et quidem tot numero, quot ſunt latera baſeos.

COR. II. Baſes prismatis ſunt figurae ſimiles et aequales. Eſt enim AB = FG, BC = GH, et ita porro (§. 107.) Praeterea et anguli ABC, FGH, a parallelis AB, FG, et BC, GH, comprehenſi aequales ſunt (§. 240. Cor.), quod de reliquis angulis BCD, GHI etc, pariter verum eſt.

COR. III. Si priſma ſecetur plano quocunque baſibus parallelo; figura ſectoris baſibus ſimilis et aequalis erit.

§. 312.

§. 312.

Quodſi recta AF ſit plano LM perpendicular eadem ſimul plano ABCDE perpendicularis, erit (§.25 et praeterea reliquae rectae BG, DI etc, baſibus pr matis erunt perpendiculares (§. 245.) atque hedrae pri matis fiunt parallelogramma rectangula baſibus perpe dicularia (§. 243.). Si AF plano LM obliqua fuerit r liquae omnes baſibus obliquae erunt (§. 256. et 249. Priſma, in quo rectae AF, BG etc, et proinde quoque h drae ſunt baſibus perpendiculares, *rectum* vocatur. R liqua priſmata *obliqua* dicuntur.

§. 313.

Parallelepipedum eſt priſma, cujus baſes ſunt par lelogramma.

COR. Parallelepipedum ſex parallelogrammis term natur, quorum duo quaecunque ſibi oppoſita aequal ſunt et parallela (§. 110. 240. Cor. 1. et §. 262.), Ca terum parallelepipeda ſunt vel recta vel obliqua (§. 312.

§. 314.

Parallelepipedum rectangulum eſt parallepipedum r ctum, cujus baſes ſunt rectangula. Ideo parallelepip dum rectangulum ſex parallelogrammis rectangulis te minatur, quorum duo quaecunque ſibi oppoſita parall la ſunt, aequalia et ſimilia. Si haec rectangula omn fuerint quadrata, parallelepipedum rectangulum *Cub* vocatur.

COR. Cubus ſex quadratis aequalibus et parallelis te minatur. Latus horum quadratorum, quibus termina tur Cubus, vocari ſolet *Latus cubi*.

§. 315.

Altitudo ſolidi eſt diſtantia plani baſeos a plano ba parallelo, quod per ſummum ejus apicem baſi oppoſ tum tranſit.

COR. Priſmatis altitudo eſt perpendicularis ex quocun que unius baſis puncto ad planum baſeos oppoſitae, ſi opu ſit, productae.

§. 316

§. 316.

Priſmata recta ſimilium et aequalium baſium et aequalium altitudinum; ut et priſmata obliqua ſimilium et aequalium baſium et aequalium altitudinum, quorum hedrae omnes homologae aequali ad baſium plana inclinatae ſunt angulo, ſunt aequalia.

DEM. Congruunt enim inter ſe.

COR. I. Cubi aequalium laterum aequales ſunt et cubi inaequalium laterum ſunt inaequales, ita ut cubus ſit minor, cujus latus latere alterius minus eſt, major vero, cujus latus alterius latus excedit.

COR. II. Aequalium igitur cuborum latera ſunt aequalia. Duorum autem cuborum inaequalium majoris latus eſt majus, et minoris minus.

§. 317.

Quodſi parallelepipedum AB ſecetur plano EF hedris oppoſitis AG et BC parallelo; erit ſolidum reſectum AE ad totum AB, ut AL ad LC.

F. 168.

DEM. Recta AF rectae AC vel eſt commenſurabilis vel incommenſurabilis. Si prius ſit, atque AM fuerit communis menſura: ipſa AM ſupra AC transportata uſque ad C, unum punctorum diviſionis coincidet cum puncto F. Per omnia diviſionis puncta ponantur plana ipſi EF parallela, quae omnia et inter ſe et planis AG, BC erunt parallela, atque hedrae parallelepipedi AB eodem ad haec plana parallela inclinata erunt angulo (§. 262.), quare integrum parallelepipedum AB ſectum eſt in tot parallelepipeda aequalia AN, MP etc, quot partes habet AC ipſi AM aequales, atque ſolidum AE earum partium tot continebit, quot partium ipſius AC continet AF. Proinde eſt AE : AB = AF : AC (§. 178. Cor. 2.). Quia vero AF : AC = AL : AD, erit AL : AD = AE : AB (§. 170.). Quodſi rectae AF et AC fuerint incommenſurabiles, nullum quidem diviſionis punctum cadet in F, in quotcunque partes aequales recta AC fuerit diviſa. Si vero numerus par-

partium in AC dicatur *m*, ut ſit AC = *m*AM, is ve numerus partium ipſi AM aequalium, quem AF ad continet, fuerit *n*, ita ut ſit AF > *n*AM et AF < (*n*+1) AM; patet ſimul fore AB = *m*AN, AE > *n*AN et AE < (*n*+1) AN, quoscunque numeros *m* et *n* denotent. Ex quo iterum patet, eſſe AF : AC = AE : AB (§. 182.) et proinde quoque AL : AD = AE : AB.

COR. Quia eſt AL : AD = AE : AB, et pari ex ratione AD : CL = AB : ED, erit quoque AL : CL = AC : ED (§. 175).

§. 318.

Duo parallelepipeda, quae eidem inſiſtunt baſi in eadem altitudine aequalia ſunt.

DEM. Si fuerit FK baſis parallelepipedi KD atque ſimul baſis alterius KB; primo poſſibile eſt, ut duae
F.170. hedrae oppoſitae BG et IK parallelepipedi KB ad baſin eodem angulo inclinata ſint, quo hedrae alterius ad eandem inclinantur, atque hoc caſu hedrae DG et GB, pariter RK et KS erunt in eodem plano. Recta FB ſecat rectam CG in L, atque recta HS ſecat rectam KT in M. Ex quo patet, rectam LM eſſe planorum FS et KC communem interſectionem, atque ipſi FH parallelam (§. 254) et proinde quoque rectis BS et CT (§. 238. Cor.). Sunt igitur MLBS, MLCT atque BCTS parallelogramma. Triangula BCL, STM ſunt congruentia atque in planis parallelis, proinde ſolidum BSMLCT priſma eſt, atque pari ex ratione ſolidum LMKHFG priſma. Praeterea priſmata DRHFBS et CTKGAN ſunt aequalia, quia eorum baſes RHS atque TKN ſimiles ſunt, atque aequales, hedrae vero eorum ad baſium plana aequali angulo inclinata (§. 261.). Utrinque igitur ablato priſmate BSMLCT et ejus loco priſmate LMKHFG addito ſunt parallelepipeda KD et KB aequalia.

F.171. Deinde fieri poteſt, ut nulla hedrarum unius cum hedra quadam alterius in eodem plano exiſtat, ut in fi-

ubi parallelepipeda KD atque KP eidem baſi FK inſiſtunt. Quia tamen PQVO cum DCTR in eodem exiſtit plano, rectae DC, RT, rectas PO, QV, ſi opus productae, ſecabunt in B, S, A, N, erunt B et A in plano FC, atque S et N in plano HT, proinde BA et SN parallelae (§. 254.) et aequales (§. 107.) nimirum BA = PQ = OV = SN. Pari ex ratione AN = BS = CT = PO, atque parallelogramma ABSN, QPOV, GFHK aequalia et ſimilia. Ductis igitur rectis AG, BF, SH, NK, novum oritur parallelepipedum KB, cujus baſes oppoſitae ſunt FGHK et ABSN, in quo hedrae oppoſitae FBSH et GANK cum parallelepipedi KP hedris FPOH et GQVK in eodem exiſtunt plano, ideoque eſt KB = KP per caſ. 1. Deinde ejusdem parallelepipedi KB hedrae oppoſitae FBAG, HKNS cum parallelepipedi KD hedris FC et HT in eodem exiſtunt plano, ideo quoque eſt KB = KD. Ex quo patet etiam parallelepipeda KD et KP eſſe aequalia (§. 13. Cor. 2.).

§. 319.

Parallelepipeda recta aequalium licet diſſimilium baſium et aequalium altitudinum ſunt aequalia.

DEM. Si fuerint duo parallelogramma AB et CD aequalia licet diſſimilia, atque ſuper ipſa tanquam baſes conſtituta ſint duo parallelepipeda recta in eadem altitudine. Producantur DE et CE ad partes E, atque ad CE productam apud E conſtruatur angulus FEG = ang. L. Fiat EF = LB, EG = LA, et ex hiſce datis conſtruatur parallelogrammum EH, quod aequale et ſimile eſt parallelogrammo AB. Producatur HG verſus G donec cum DE producta concurrat in I atque per F ducatur recta ipſi DI parallela occurrens rectae IH in M atque ND productae in K; orientur duo adhuc parallelogramma EK et EM. Jam ſuper baſes EH, IF, EK intelligantur conſtituta parallelepipeda recta aequalium altitudinum cum parallelepipedis rectis ſuper AB et CD F. 169.

 con-

conſtitutis; erit ſolidum ſuper EH aequale ſolido ſup AB (§. 316.). Praeterea aequalia ſunt parallelepipe ſuper EH et IF (§. 318.) et proinde ſolidum ſuper IF a quale ſolido ſuper AB. Porro eſt parallelogrammu EH = IF, EH = CD, ideo IF = CD. Proinde IF : EK = CD : EK, ſed IF : EK = ſolid. ſuper IF ſolid. ſuper EK (§. 317.) et CD : EK = ſolid. ſuper C : ſolid. ſuper EK, ex quo patet eſſe ſolid. ſuper IF : ſ lid. ſuper EK = ſolid. ſuper CD : ſolid. ſuper EK, E igitur ſolidum ſuper IF = ſolido ſuper CD, et ide etiam ſolidum ſuper AB = ſolido ſuper CD.

§. 320.

Quaevis parallelepipeda aequalium licet dimiſſi baſium et aequalium altitudinum ſunt aequalia.

DEM. Si duo parallelepipeda comparanda fueri recta, propoſitio patet ex §. *praec.* Si unum fuerit r ctum et alterum obliquum, ſuper eadem baſe cui obl quum inſiſtit conſtrui poteſt rectum, quod utrique pri rum aequale erit (§. 319. et 318.) quare et haec inter aequalia erunt. Si denique utrumque obliquum fuer ſuper iisdem baſibus, quibus obliqua inſiſtunt, conſtr poſſunt recta ejusdem altitudinis, quorum quodlibet i aequale erit, quod eidem inſiſtit baſi (§. 318.) duo ve haec recta parallelepipeda aequalia erunt (§. 319.) qu et obliqua erunt aequalia (§. 13 Cor. 2.).

COR. Parallelepipeda rectangula aequalium altitu num et inaequalium baſium ſunt inaequalia: atque ide parallelepipeda rectangula aequalia ſint et praeterea eor altitudines aequales, etiam baſes aequales erunt.

§. 321.

Parallelepipeda LM, IK aequalium altitudinum int ſe ſunt ut baſes LN, IO.

F. 172. 173. DEM. Plano LN verſus H continuato fiat parallel grammum NH = IO (§. 119.) atque compleatur parallel pipedum MH; erit LM : MH = LN : NH (§. 318. Cor.

Qu

Quia vero MH = IK (§. 321.) et NH = IO (*Conſtr.*) fiet LM : IK = LN : IO.

§. 322.

Si ſeries parallelepipedorum quotcunque a, b, c, *quae aequales habeant altitudines, baſes vero* α, β, γ, *utcunque inaequales comparetur cum alia ſerie parallelepipedorum* GH *IK, LM, in qua tot adſunt, quot erant in ſerie priori, et quae parallelepipeda aequales cum prioribus habent altitudines, baſes vero iterum utcunque inaequales; erit prior ſeries* a+b+c *ad poſteriorem* GH+*IK*+*LM, uti ſumma baſium priorum* α+β+γ, *ad ſummam baſium poſteriorum* GN+*IO*+*LP.*

DEM. Eſt enim a : GH = α : GN, b : IK = β : IO, c : LM = γ : LN (§. 321.). Ideo a + b + c : GH + IK + LM = α + β + γ : GN + IO + LP (§. 192. Cor.). F.176.

§. 323.

Parallelepipeda aequalium baſium ſunt in ratione altitudinum.

DEM. Si fuerit parallelepipedum P cujus baſis eſt B et altitudo A comparandum cum parallelepipedo *p*, cujus baſis eſt B et altitudo *a*. Loco P ſubſtituatur parallelepipedum rectangulum AB, cujus baſis AM = B et altitudo MB = A; ac pariter loco *p* ſubſtituatur parallelepipedum rectangulum EK, cujus baſis EN baſi M ſimilis et aequalis, atque altitudo NK = *a*, erunt latera CM et IN baſium AM et EN aequalia. Quodſi jam hedrae CB et IK ipſorum AB et EK pro baſibus ſumantur, erit AB : EK = CB : IK (§. 321.). Praeterea eſt CB : IK = AB : NK (§. 195. Cor.). Proinde AB : EK = MB : NK. Quia vero AB = P et EK = *p* (§. 321.) praeterea MB = A et NK = *a*; fiet P : *p* = A : *a* (§. 169.). F.185.

§. 324.

Parallelepipeda quaevis ſunt in ratione compoſita ex rationibus baſium et altitudinum.

 DEM.

F.168. DEM. Sit comparandum parallelepipedum A
172. cujus baſis eſt B et altitudo A cum parallelepipedo IK
173. cujus baſis eſt b et altitudo a. Cum iis comparetur parallelepipedum tertium EH, cujus baſis eſt = B et altitudo = a : erit

$$AB : EH = A : a \text{ (§. 322.)}$$
$$EH : IK = B : b \text{ (§. 322.)}$$

Proinde $AB : IK = \left\{ \begin{matrix} A : a \\ B : b \end{matrix} \right\}$ (§. 173.) $= \left\{ \begin{matrix} B : b \\ A : a \end{matrix} \right.$ (§. 192.),

COR. Si inter ſe comparanda fuerint parallelepipeda rectangula AD et EH; ratio baſium AC : EG componitur ex rationibus laterum AB : EF et BC : FG. Ideo ratio ipſorum parallelepipedorum componitur ex tribus rationibus iſtis AB : EF, BC : FG, et CD : GH. Cubi igitur ſunt inter ſe in ratione triplicata laterum.

§. 325.

Si fuerit ABC triangulum apud A rectangulum, atque hypothenuſa BC in E bifariam diviſa ex E ad utrumque cathetum demittantur perpendiculares EF, EG; rectangulum EFAG quod oritur, dimidium erit trianguli ABC.

F.60. DEM. In triangulis CFE et EGB ſunt anguli apud F et G recti. Praeterea CE = EB (*hyp.*) atque angulus ECF = BEG ob EG et CA parallelas (§. 89. Cor. 1 et §. 99.). Proinde EG = CF (§. 94.). Sed EG = FA (§. 107.) ideo AF = FC (§. 13. Cor. 2.). Ducta igitur EA ob angulos apud F rectos AF = FC, EF = EF triangula AEF et EFC ſibi congruunt (§. 59.) atque ſimili ex ratione quoque triangula BEG et EGA. Proinde EFC + BEG = AEF + EGA = EFAC = ½ABC.

§. 326.

Si fuerit figura quaedam plana Z minor triangulo ABC, poſſunt eidem triangulo inſcribi tot rectangula aeque alta, ut omnia ſimul ſumta ſint majora figura Z.

DEM.

DEM. Ex apice anguli A reliquis B et C majore ad latus oppoſitum BC demittatur perpendicularis AK, quae cadet intra triangulum (§. 80. Cor. 2.). Haec recta perpendicularis AK dividatur in aliquot partes aequales, v. g. in tres, atque per puncta diviſionis H, I, ducantur baſi BC parallelae DE, FG, latera AB et AC ſecantes in punctis D, F, E, G. Ex hiſce punctis ad parallelas demittantur perpendiculares DL, EN, FM, GY: quae terminabunt rectangula inſcripta DN, FY, quarum differentia a triangulo ABC erit ſumma triangulorum ADH, DFL, FBM, AHE, ENG, GYC. Quodſi jam quaevis partium in AK denuo biſecetur, atque ut ante compleantur rectangula inſcripta, ab hac differentia detrahetur dimidium. Novae enim parallelae QR, VX, etc. biſecant quoque partes AD, AE, etc. in Q, R, etc. Praeterea eſt SO = ½ADH, OT = ½AEH etc. (§. 325.) ideo a quolibet horum triangulorum et proinde ab integra ſumma detrahitur dimidium. Jam omnia rectangula inſcripta denotentur littera R eorumque differentia a triangulo ABC ſit D, erit R + D = ABC. Denique differentia figurae Z a triangulo ſit δ, erit quoque Z + δ = ABC. Quodſi jam fuerit δ < D ſubdiviſione perpendicularis AK effici poteſt, ut fiat D < δ (§. 161. Cor.). Factum ſit, atque ob R + D = Z + δ erit R > Z (§. 23.). F. 174.

§. 327.

Si detur figura plana Z triangulo ABC major, poſſunt triangulo ABC circumſcribi tot rectangula aeque alta, ut ſumma omnium ſit minor figura Z.

DEM. Demiſſo iterum ex angulo trianguli maximo A ad latus oppoſitum BC perpendiculo AF, eoque in aliquot partes aequales diviſo, ducantur parallelae GH, IK et erectis perpendicularibus GL, HM, etc. complentur rectangula circumſcripta GM, IO, BQ, quarum differentia a triangulo ABC erit ſumma triangulorum ALG, GNI etc. Jam denuo biſſecta quavis partium F. 175.

 in

in perpendiculo AF, ſi ductis parallelis compleantur ante rectangula RV, GX etc. quia eſt SM = ½AMH, L = ½ALG etc. a quolibet horum triangulorum, et pr inde ab integra ſumma detrahitur dimidium. Denotat itaque ſumma rectangulorum littera R et integra horu rectangulorum a triangulo ABC differentia per D ut ſ ABC + D = R, denotata praeterea differentia figur Z a triangulo ABC littera δ, ut ſit ABC + δ = Z, ſ fuerit D > δ, biſſectione perpendiculi AF et connex operationibus repetitis effici poteſt, ut fiat D < δ (§.16 Cor.). Factum ſit, eritque ABC + D < ABC + δ (§ id eſt R < Z.

§. 328.

Si priſma triangulare DG cum parallelepipedo AB eandem habet altitudinem; eſt parallelepipedum ABC ad priſma DEFG, ut baſis parallelepipedi AB ad baſin priſmatis DEF.

F.176. DEM. Quodſi proportio ABC : DEG = AB DEF non eſt vera, alia figura plana triangulo DEF i aequalis erit quarta proportionalis ad ABC, DEG AB. Sit igitur figura plana Z haec quarta proportio nalis ſitque primo Z < DEF. Inſcribantur triangul DEF tot rectangula aeque alta, ut *eorum ſumma ſ major figura Z*, quod fieri poteſt per §. 326. Tum ver alteri priſmatis DEG baſi inſcribantur totidem recta gula, atque compleantur parallelepipeda GH, IK, LM quae erunt priſmati DEG inſcripta. Deinde baſis A parallelepipedi ABC rectis uni lateri parallelis dividatu in tot parallelogramma α, β, γ, quot ſunt rectangu triangulo DEF inſcripta, et poſitis per has rectas plan cum hedris parallelepipedi oppoſitis parallelis, idem d videtur in totidem parallelepipeda aequalium altitudinu et inter ſe et cum parallelepipedis priſmati DEF inſc tis. Quo facto erit a + b + c : GH + IK + LM = + β + γ : GN + IO + LP (§. 322. Cor.), vel AB : GH + IK + LM = AB : GN + IO + LP. Praeter

vel

vero haec proportio ſumitur, vera eſſe ABC : DER = AB : Z; vel DER : ABC = Z : AB, ex qua cum priori collata ſequitur DER : GH + IK + LM = Z : GN + IO + LP (§. 175.). Eſt vero DER > GH + IK + LM (§. 18. Cor. 2.). Ergo eſſet Z > GN + IO + LP (§. 18. Cor. 2.) *contra hyp.* Ideo quarta proportionalis ad quanta ABC, DER, AB non poteſt eſſe minor triangulo DEF.

Quodſi jam ſecundo fuerit figura Z > DEF; circumſcribantur triangulo DEF tot rectangula aeque alta *ut eorum ſumma minor ſit figura Z*, quot fieri poteſt per §. 327. Tum vero alteri priſmatis baſi totiem circumſcribantur rectangula aeque alta, atque compleantur parallelepipeda DH, IK, LM, quae erunt priſmati DEG circumſcripta. Diviſo jam AB in totidem parallelogramma et parallelepipedo ABC in tot parallelepipeda, quot ſunt priſmati circumſcripta, erit a + b + c : DH + IK + LM = $\alpha + \beta + \gamma$: DN + IO + PL (§. 322. Cor.), vel ABC : DH + IK + LM = AB : DN + IO + PL, cum qua ſi comparetur proportio DEG : ABC = Z : AB, erit DEG : DH + IK + LM = Z : DN + IO + PL. Cum igitur ſit DEG $<$ DH + IK + LM, foret Z $<$ DN + IO + PL *contra hyp.* Ergo quarta proportionalis ad quanta ABC, DEG, AB, non poteſt eſſe major baſe priſmatis DEF. Quare ipſa haec baſis eſſe debet iſta quarta proportionalis et proportio ABC : DEG = AB : DEF vera. F. 177

COR. I. Priſma igitur triangulare aequale erit parallelepipedo, ſi duo haec ſolida aequales habent baſes et altitudines.

COR. II. Priſmata triangularia aequalium baſium et altitudinum ſunt aequalia (§. 13. Cor. 2.).

COR. III. Priſmata triangularia aequalium altitudinum ſunt in ratione baſium.

§. 329.

Priſma multilaterum quodcunque eſt ad priſma tri- terum, quod cum multilatero aequalem habet altitudinem, baſis prioris ad baſem poſterioris.

DEM. Si priſma AB ſit multilateram quodc- que, in baſibus ipſius ducantur diagonales homolog quibus baſes illae dividentur in tot triangula, quot hab latera demtis duobus. Cuilibet diagonali MN in baſi reſpondebit in oppoſita baſi alia OP ipſi aequalis parallela, quia eſt MNPO parallelogrammum (§. 10 Cor.). Quodſi igitur per duas ejusmodi diagonale quascunque ponantur plana; priſma diviſum erit in to priſmata triangularia, in quot triangula quaevis baſiu erat diviſa. Jam unum latus CE baſis CDE priſmat trilateri CEDG in totidem dividatur partes arbitraria magnitudinis, in quot triangula diviſae ſunt baſes mult lateri, atque ex apice D anguli huic lateri oppoſiti a puncta diviſionis I, K, L, ducantur rectae DI, DK, DI quo facto baſis CDE in totidem diviſa erit triangula, i quot diviſa erant baſes priſmatis AB. Jam in latere FI baſeos oppoſitae lateri CE aequali fiat FQ = CI, QR = IK, RS = KL, etc, ductisque rectis GQ, GR, GS, erun rectae GQ et DI, GR et DK, GS et DL, aequales parallelae, quia cum eadem tertia CF ſunt aequales et pa rallelae (§. 238. Cor. et §. 13. Cor. 2.). Ideo plana I KG, LG priſma triangulare CGE in totidem dividu priſmata triangularia aequalium altitudinum, in quot pri mata triangularia diviſum erat priſma AB. Sed e Cor. 3. §. *praec.* eſt

$$AOP : CIG = \alpha : a$$
$$NOT : IKG = \beta : b$$
$$MTB : KLG = \gamma : c$$
$$MVB : LEG = \delta : d$$

Proinde AOP + NOT + MTB + MVB : CIG + IK + KLG + LEG = $\alpha + \beta + \gamma + \delta$: a + b + c + d (§. 192. Cor.) id eſt AB : CGE = AMZN : CDE.

COR.

COR. I. Priſma multilaterum aequale eſt trilatero, quod cum ipſo aequalem habet baſin et altitudinem.

COR. II. Omnia priſmata aequalium baſium et altitudinum aequalia ſunt. Si enim baſes et altitudines priſmatum AB et KL aequales ſunt; fiat priſma triangulare CEG, ejusdem baſis et altitudinis, erit AB = CEG et KL = CEG. Proinde AB = KL (§. 131 Cor. 2.). F. 178. 179.

COR. III. Omnia priſmata aequalium baſium ſunt in ratione altitudinum, et priſmata quaevis ſunt in ratione compoſita ex rationibus baſium et altitudinum.

COR. IV. Priſmatum baſes, ſi inter ſe ſunt ſimiles, ſunt in ratione duplicata laterum homologorum. Ideo hujusmodi priſmatum ratio eſt compoſita ex duplicata hac laterum et altitudinum ratione. Ex quo porro ſequitur, priſmata ſimilium baſium, quorum altitudines ſunt ut latera baſium homologa, eſſe in ratione eorum laterum triplicata, vel ut cubi eorum laterum (§. 324. Cor.).

§. 330.

Pyramis eſt figura ſolida terminata triangulis planis rectilineis, quorum vertices coincidunt et quorum baſes ſunt in eodem plano, atque praeterea figura plana rectilinea, cujus latera ſunt iſtae triangulorum baſes. Haec figura dicitur baſis pyramidis et reliqua plana triangularia, quae praeter baſin pyramidem terminant, ejus *hedrae* ſeu *latera* vocantur. Denique *vertex pyramidis* eſt punctum illud, in quod vertices laterum cadunt.

COR. I. Pyramis quaecunque tot habet latera, quot ſunt latera baſeos. Nomina autem ſortiuntur pyramides a numero laterum. Hinc dantur *pyramides trilaterae*, *quadrilaterae* etc.

COR. II. Pyramidis altitudo eſt recta ex apice ad planum baſeos, ſi opus ſit productae, perpendicularis (§. 316.).

§. 331.

Pyramide quacunque ABE per planum GK baſi para lelum ſecta figura ſectionis GK baſi ſimilis eſt.

F.180. DEM. Eſt enim latus BC parallelum lateri Gl et CD lateri HI (§. 255.) ergo angulus BCD = GH (§. 241. Cor. 1.). Pari modo demonſtratur, anguk apud D et I, E et K, F et L, B et G aequales eſſ Praeterea eſt BC : GH = AC : AG (§. 206. Cor. 3.) CD : HI = AC : AH (§. *cit.*) ergo BC : GH = CD : H Ex iisdem principiis demonſtratur, reliqua figurarui BE et GK latera, quae angulos aequales comprehen dunt, eſſe proportionalia. Proinde iſtae figurae ſun ſimiles.

§. 332.

Pyramides ſimilium et aequalium baſium, quaru hedrae omnes homologae aequales ſunt, et aequali ad b ſium plana angulo inclinantur, ſunt aequales.

DEM. Congruunt inter ſe.

§. 333.

Omnis pyramis trilatera ABCD dividi poteſt in d prismata aequalia, quae ſimul ſumta majora ſunt dimi pyramis, et in duas pyramides aequales.

DEM. Dividantur ſinguli termini lineares prism

F.181. tis bifariam in punctis E, F, G, H, I, K, atque duca tur rectae EG, EF, FG, EI, FH, EK, KI, IH. Q in triangulo ABD eſt AF : FD = AG : GB, erunt rec GF et HB parallelae (§. 167.), et pari ex ratione eru FH et GB parallelae. Quare figura FGBH eſt parall logrammum. Eodem modo patet, BGEI, EFH DHIK et DFEK eſſe parallelogramma. Sunt igit plana angulorum EGF et IBH parallela (§. 262.); pr inde ſolidum EBFI prisma eſt, atque ſimili ex ratio quoque EHKF prisma erit. Solida AGFE et EII pyramides eſſe, ultro patet. Jam prisma EBFI aequ le erit prismati EHKF. Compleantur parallelepipe

EHD

EHDM et ENOI, atque cum baſis HK ſit dupla trianguli BHI (§. 195. Cor.) et praeterea OI = 2BHI, erunt HK = OI baſes parallelepipedorum EHDM et ENOI aequales. Cum igitur et altitudines eorum aequales ſint, ipſa parallelepipeda erunt aequalia (§. 321.) et proinde quoque priſmata EBFI et EHKF (§. 321. et §. 21. Cor.) Deinde etiam pyramides AGFE et EIKC ſunt aequales. Nam triangulum BHI = congruit triangulo IKC ob ang. IBH = CIK (§. 99.) IK = HD = BH et IC = BI (§. 59.) cum igitur et triangulum BHI congruat ipſi GFE, etiam triangula GFE et IKC ſibi congruent, atque ſimilia et aequalia erunt. Praeterea plana AGF et EIK, AGE et EIC, AFE et EKC aequali ad plana GEF et IKC inclinata ſunt angulo (§. 261.). Proinde pyramides AGFE et EIKC aequales ſunt (§. 332.).

Denique priſmata EBFI et EHKF ſimul ſumta ſunt majora dimidio pyramidis. Ducantur rectae GI, GH, et fiet pyramis GIHB = pyramidi AEFG, quia triangula EFG, IBH ſimilia ſunt et aequalia, et ob plana HGI et FAE parallela (§. 262.) haec plana aequali ad baſes EGF et IBH angulo inclinantur (§. 261.) atque eadem ex ratione etiam AGF, GBH, AGE, GBI, aequali ad baſes inclinata ſunt angulo. Ipſa vero triangula AGF et GBH, AGE et GBI, AFE et GHI, ſunt aequalia (§. 75.) ideoque pyramides GIHB et AEFG aequales (§. 332.). Jam priſma EBFI > GIHB, ergo et EBFI > AEFG. Praeterea alterum priſma EHKF > pyramide FHDK, quae = FIKG, et ideo EHKF > FIKG; proinde EBFI + EHKF > AEFG + FIKG, et ſumma priſmatum dimidio pyramidis ABDC major.

COR. I. Quodſi quaelibet pyramidum AGFE et EIKC eodem modo ut ante dividatur in duo priſmata et duas pyramides, haecque operatio continuetur; ſumma priſmatum ita creſcet, ut major fiat dato quolibet ſolido Z pyramide ABCD minore. Si enim differentia hujus ſolidi Z a pyramide ABCD ſit D, ut ſit Z + D = ABCD,

atque

atque differentia priſmatum a pyramide ABCD ſit δ, denotatis iſtis priſmatibus littera P ſit P + δ; quoti operatio ante memorata repetitur, a differentia δ det hitur plus quam dimidium; et ideo tandem ſit δ < (§. 161.) quo igitur caſu erit P > Z (§. 23.)

COR. II. Pyramide *abcd* eodem modo diviſa, quo viſa eſt pyramis ABCD, atque hac diviſione in una ties, ac in altera repetita; erit ſumma priſmatum in ABC ad ſumma priſmatum in *abcd*, ut baſis BCD ad baſin *b* Eſt enim OE : *oe* = EBHI : *ebhi* = OI : *oi* = BH *bhi* (§. 187.) HM : *hm* = HEKD : *hekd* = HK : (§. 187.) = BHI : *bhi*. Ideo EBHI + HEKD : + *hekd* = BHI : *bhi* (§. 186.) = BCD : *bcd* (§. 187 quia BCD = 4BHI et *bcd* = 4*bhi*. Eodem modo p tet, ſummam priſmatum in AGFE eſſe ad ſummam pri matum in *agfe* uti GFE ad *gfe* = BHI : *bhi* = BCD : *b* et pari ex ratione ſumma priſmatum in EIKC ſummam priſmatum in *eikc* uti IKC : *ikc* = BCD *bcd*. Priſmata igitur ex ſecunda diviſione orta huc ſe habent ut baſes BCD, *bcd*. Ex paritate rati nis idem ſequitur, tertia, quarta, vel quacunque diviſi ne conſequente inſtituta. Proinde omnia ſimul priſm ta pyramidis ABCD ſe habent ad omnia priſmata in p ramide *abcd*, diviſione nimirum in una toties inſtitu quoties in altera, ut baſis BCD ad baſin *bcd* (§. 186. Cor

§. 334.

Pyramides trilaterae ABCD, EFGH, aequalium alti dinum ſunt in ratione baſium.

F. 182. DEM. Quarta proportionalis ad quanta ABC EFGH, ABCD, nec major eſt nec minor pyrami EFGH. Sit enim primo ABC : EFG = ABCD : atque Z < EFGH. Dividatur pyramis EFGH in pri mata et pyramides, eaque operatio continuetur, don ſumma priſmatum, quam littera P denotabimus, ſit m jor ſolido Z (§. 333. Cor. 1.). Totidem quoque fiant p ſmata in pyramide ABCD per totidem diviſiones, q

li

littera p denotabuntur. Erunt vero $p:P=ABC:EFG$ (§.333. Cor. 2.) quae analogia cum priori $ABC:EFG = ABCD:Z$ comparata dat $ABCD:Z=p:P$. Sed $ABCD>p$ (§. 18. Cor. 2.) ideo foret $Z>P$ *contra hyp.* Ideo quarta proportionalis ad quanta ABC, EFG, ABCD non eſt minor pyramide EFGH.

Ponatur jam $Z>EFGH$ et proportio $ABC: EFG=ABCD:Z$ vera eſſe, ſitque Y quarta proportionalis ad quanta Z, ABCD, EFGH, ut habeatur $Z:ABCD=EFGH:Y$, erit $Y<ABCD$, quia $EFGH<Z$. Praeterea eſt $EFGH:Y=EFG:ABC$, vel $EFG:ABC=EFGH:Y$, quod impoſſibile, quia $Y<ABCD$ (*per dem.*). Ergo et quarta proportionalis non eſt major pyramide EFGH.

COR. Pyramides trilaterae aequalium baſium et altitudinum ſunt aequales.

§. 335.

Pyramis multilatera ABCDEF eſt ad pyramidem trilateram GHIK aequalis altitudinis, ut baſis BCDEF ad baſin HIK.

DEM. In baſi enim pyramidis multilaterae ducantur diagonales, eandem baſin in triangula EFB, EBC, BCD, dividentes. Tum vero plana ABE, ACE ipſam pyramidem divident in tot pyramides trilateras, in quot triangula diviſa eſt baſis BCDEF. Jam unum latus IK trianguli HIK dividatur in totidem partes arbitrariae magnitudinis, in quot triangula diviſa eſt baſis BCDEF. Tumque ex apice anguli huic lateri oppoſiti ad puncta diviſionis L, M, ducantur rectae HL, HM, atque ex vertice pyramidis rectae GL, GM, plana GHL et GHM etiam hanc pyramidem in tot pyramides trilateras dividunt, in quot diviſa fuit ABCDEF. Quia vero eſt F. 183.

$$AFBE : GHLI = \alpha : \alpha$$
$$ABCE : GHLM = b : \beta$$
$$ACDE : GHKM = c : \gamma, \text{ (§. 334.)}$$

exinde

exinde ducitur AFBE = ABCE + ACDE : GHLI
GHLM + GHKM = a + b + c : $\alpha + \beta + \gamma$ (§. 19
Cor.), id eſt ABCDEF : GHIK = BCDEF
HIK.

COR. I. Pyramis multilatera aequalis eſt pyramidi t
laterae, quae aequalem cum ipſa habet baſin et altit
dinem.

COR. II. Omnes pyramides aequalium baſium et al
tudinum ſunt aequales.

§. 336.

*Priſma cujus baſis aequalis eſt baſi pyramidis et al
tudo altitudini, hujus pyramidis triplum eſt.*

T.184. DEM. Sit priſma quodcunque P comparandu
cum pyramide Q, horumque ſolidorum baſis ſit = B
altitudo = A. Fiat priſma triangulare rectum AB
cujus baſis ACE = DBF = B, et altitudo = AD = C
= EF = A; eritque hoc priſma aequale priſmati P
ſumto. In latere DE priſmatis ABE ducatur recta di
gonalis AF et in latere BE diagonalis FC, quo fac
determinabitur triangulum AFC, cujus planum a to
priſmate reſecat pyramidem trilateram ACEF cujus b
ſis ACE = B et altitudo EF = A; quare eſt ACEF
Q (§. *praec.*). Eſt vero integrum priſma ABF huj
pyramidis ACEF triplum. Ducatur enim diagonal
DC lateris AB, oriturque triangulum DFC, cujus pl
num differentiam priſmatis ABF a pyramide ACEF ſ
cat in duas pyramides BCDF et ACDF aequales, qu
earum baſes BCD et ACD aequales ſunt (§. 107. Co
ut et eorum altitudines, cum apices in F coincidan
Deinde in pyramide BDFC triangulum BDF ſumat
pro baſe, erit BC ejus altitudo, et proinde ejus baſis
altitudo aequalis eſt baſi et altitudini pyramidis ACE
ideoque ACDF = BCDF = ACEF, et priſma AB
= 3ACEF. Ergo generaliter priſma P = 3Q.

COR.

COR. I. Omne igitur priſma, cujus baſis = B et altitudo = A, aequale eſt pyramidi, cujus baſis = B et altitudo = 3A.

COR. II. Pyramides inter ſe ſunt in ratione compoſita ex rationibus baſium et altitudinum (§. 187.). Si igitur altitudinis ſunt aequales, pyramides ſuntut baſes; atque ſi baſes ſint aequales; pyramides inter ſe ſunt ut altitudines,

§. 337.

Aequalium priſmatum baſes ſunt reciproce ut altitudines: et priſmata, quorum baſes et altitudines ſunt in proportione reciproca, aequalia ſunt.

DEM. Si primo proponantur parallelepipeda rectangula aequalia, quorum altitudines ſunt aequales, eorum baſes quoque aequales erunt (§. 320. Cor.) et propoſitio evidens eſt. Si altitudines fuerint inaequales, in majori EG fiat EI = AC et per I ponatur planum IK parallelum baſi EH, quo facto erit AD : EH = Ppp. AB : Ppp. EK (§. 322.) et Ppp. EF : Ppp. EK = GE : IE vel AC (§. 323.). Quare F. 185.

1) Si ponatur Ppp. AB = Ppp. EF, erit AD : EH = GE : AC.

2) Si vero fuerit AD : EH = GE : AC, fiet Ppp. AB : Ppp. EK = Ppp. EF : Ppp. EK, et proinde Ppp. AB = Ppp. EF (§. 171. Cor. 2.).

Quodſi jam propoſita fuerint duo priſmata P et p quaecunque quorum baſes ſunt B et b, altitudines vero A et a; fiant duo parallelepida rectangula Π et π, quorum altitudines ſint ipſis A et a baſes vero ipſis B et b reſpective aequales. Atque patet, ſi fuerit Π = π fore P = p (§. 13. Cor. 2.) et proinde B : b = a : A (*per dem.*). Si vero ſit B : b = a : A erit P = p (*per dem.*) et proinde quoque Π = π (§. 13. Cor. 2.).

COR. Hinc quoque aequalium pyramidum baſes et altitudines ſunt in proportione reciproca: atque ſi baſes

pyra-

pyramidum altitudinibus reciproce ſunt proportional pyramides aequales ſunt. Si enim pyramidum P e baſes ſunt B et b, atque altitudines A et a; fiant d priſmata Π et π quorum baſes ſunt ipſis B et b, atque a titudines ipſis A et a reſpective æquales. Hoc facto P = p, erit Π = π (§. 21. Cor.) et proinde B : b = A; ſi vero B : b = a : A, erit Π = π hincque P = (§. 22. Cor. 3.).

§. 338.

Cylindrus eſt figura ſolida terminata duobus pl circularibus parallelis et æqualibus, quae ipſius *Baſes* cuntur, et ejusmodi ſuperficie curva, in quam om linea recta, per punctum in eadem aſſumtum ita du ut rectæ centra baſium connectenti parallela ſit, tota dit. Haec recta, quæ connectit centra baſium, *Axis* *lindri* vocatur.

COR. Altitudo cylindri eſt perpendicularis ex quoc que unius baſis puncto ad planum baſeos oppoſitae.

§. 339.

Axis cylindri baſibus vel perpendicularis eſt, v obliquus. Si prius, *Cylindrus Rectus*; ſi poſterius, C *lindrus Obliquus* vocatur.

COR. Cylindrus rectus generatus eſſe concipi pote rectangulo circa unum latus revoluto.

§. 340.

Si cylindrus ſecetur plano baſibus parallelo, figura ctionis eſt circulus baſibus aequalis.

F.186. DEM. Planum figurae ſectionis FG ſecabit axe cylindri AB in puncto C. Ab hoc puncto C ad pe metrum figurae ſectionis ducatur recta quaecunque C atque per punctum F, quod eſt in ſuperficie cylindri ducatur recta FD axi AB parallela, quae tota cadet cylindri ſuperficiem, et quoad opus eſt producta tande cum peripheria baſeos DE in puncto D concurret. Q rectae FD et CA ſunt parallelae, per easdem poni p

te

tiſ planum FA, quod ſecabit planum baſeos DE in recta DA, et planum figurae ſectionis in recta FC, quare et rectae DA et FC ſunt parallelæ (§.254.). Proinde, quia figura FA eſt parallelogrammum, erit DA = FC (§.107.). A puncto C ad perimetrum figuræ ſectionis ducatur praeter CF quæcunque alia recta CG, quo facto ſi per punctum G, quod eſt in ſuperficie cylindrica, ducatur recta axi AB parallela, eaque producatur, donec baſeos DE perimetro occurrat in E, non tantum recta GE tota erit in ſuperficie cylindrica, ſed et planum per parallelas AC et EG poſitum ſecabit figuræ FG planum in recta AE. Quare iterum figura CE erit parallelogrammum (§.254.) et recta AE = CG (§.107.). Sed eſt AD = AE (§.44. Cor.2.) ideo CF = CG (§.13. Cor. 1.). Simili argumentatione demonſtratur, quamcunque aliam rectam ut CK, ex C ad perimetrum figurae ſectionis ductam rectae CF æqualem eſſe. Ex quo patet, figuram FG eſſe circulum, cujus radius radio circuli DE æqualis eſt, et proinde hi circuli æquales ſunt (§.50.).

§. 341.

Conus eſt figura ſolida terminata unico plano circulari, quod baſis coni dicitur et præterea ſuperficie curva, in qua eſt punctum extra baſin ſitum, *Vertex* ſeu apex coni dictum, ejus conditionis, ut omnis linea recta hoc punctum cum alio quocunque in ſuperficie illa ſumtum connectens tota in eandem cadat. Recta linea verticem coni cum centro baſis connectens *Axis* coni appellatur.

COR. Coni altitudo eſt recta ex apice ad planum baſeos ſi opus ſit productae perpendicularis.

§. 342.

Axis coni aut plano baſeos eſt perpendicularis, aut non. Si prius, *Conus rectus* dicitur; ſi poſterius, *Conus Obliquus* eſt. Quaevis rectarum in ſuperficie coni

recti ex apice ad punctum quoddam in peripheria baſi
ducta *Latus* coni recti vocatur.

COR. Conus rectus generatus eſſe concipi poteſt t
angulo rectangulo circa unum cathetum revoluto.

§. 343.

Si conus ſecetur plano baſi parallelo, figura ſecti
erit circulus.

F. 187. DEM. Si conus ABC modo deſcripto ſectus fi
rit, atque hac ſectione producta figura EF; in hujus
rimetro ſumatur punctum quodcunque E, deinde du
tur axis coni AD, quae tranſibit per figuram ſectio
in puncto quodam G. Connectantur apex coni A
punctum E recta AE, quae tota cadet in coni ſuper
ciem (§. 341.) atque adeo producta tandem concur
cum peripheria baſeos in puncto quodam B. Duca
recta BD et per tria puncta A, B et D ponatur plan
in quod cadent rectae AB, AD et BD (§. 225. Co
proinde et recta EG, quae parallela eſt rectae BD (
243.). Eſt igitur AD : AG = BD : EG (§. 192. Cor.
A puncto G ad perimetrum figurae ſectionis duca
praeter GE alia recta quaecunque FG, quo facto in
apicem A et punctum F ducta AF eaque producta usq
ad concurſum cum peripheria baſeos in C ductaque D
itidem per puncta A, D et C poni poteſt planum, tu
que porro concludi, eſſe AD : AG = DC : GF, hi
que BD : EG = DC : GF. Cum autem ſit BD = D
(§. 45. Cor. 1.) erit EG = GF (§. 167. Cor. 2.). Si
argumentatione demonſtratur, quamcunque aliam
ctam, ut GH, ex puncto G ad figurae ſectionis pe
metrum ductam rectae GE eſſe aequalem. Proinde fi
ra ſectionis eſt circulus (§. 44.).

§. 344.

Priſma eſt ad cylindrum aequalis altitudinis, ut ba
priſmatis ad baſin cylindri.

F. 188. DEM. Quarta proportionalis ad quanta AB
GHI, et DE nec major eſt, nec minor circulo H

Sit enim Z haec quarta proportionalis, ut habeatur ABC : GHI = DE : Z. Ponatur Z < HK, atque huic circulo inſcribatur polygonum regulare P, quod majus eſt figura Z (§. 162.). Per apicem enim cujusque anguli illius polygoni ducatur cum axe cylindri parallela, quarum qualibet in ſuperficiem cylindri tota cadet (§. 341.) atque perimetro oppoſitae baſis occurret in punctis G, L, M, etc, Ductis jam rectis GL, LM, etc, iſtae erunt rectis HP, PQ, etc, parallelae, proinde figurae HL, PM, etc, parallelogramma, atque figura rectis GL, LM, MI etc, terminata polygonum regulare ipſi P ſimile et aequale (§. 111.). Ex quo patet, ſolidum hiſce polygonis regularibus et plano parallelogrammorum HL, PM, etc, terminatum prisma eſſe cylindro GHI inſcriptum et eodem cylindro minus (§. 18. Cor. 2.). Hoc priſma littera Π denotato erit ABC : Π = DE : P (§. 321.) ex qua analogia comparata cum aſſumta GHI : ABC = Z : DE ſequitur GHI : Π = Z : P. Eſt vero GHI > Π, proinde Z > P *contra hyp.* Quarta igitur proportionalis ad quanta ABC, GHI, et DE non eſt minor circulo HK.

Ponatur nunc Z > HK, atque circulo HK circumſcribatur polygonum P, quod minus eſt figura Z (§. 163.). Per ſingula puncta contactus laterum polygoni cum circulo HK ducantur rectae PL, QM, etc, axi cylindri parallelae, quae erunt in ſuperficie cylindrica (§. 338.) et peripheriae circuli oppoſiti occurrent in punctis L, M, etc. Quia hoc quoque caſu figurae ut PQML fiunt parallelogramma, ſunt arcus ML, MG, etc, aequales (§. 141.) atque per haec puncta ductis rectis circulum GL tangentibus orietur polygonum regulare huic circulo circumſcriptum polygono P oppoſito aequale, et parallelum. Proinde ductis rectis NO, RS, oritur prisma aliquod Π huic cylindro circumſcriptum. Eſt vero ABC : Π = DE : P quae analogia cum aſſumta GHI : ABC = Z : DE comparata dat GHI : Π =

 Z : P

Z : P. Eſt vero Π > GHI, proinde P > Z *contra h*
Quarta igitur proportionalis ad quanta ABC, GH
DE, quoque non eſt major circulo HK, atque proin
ipſa proportio ABC : GHI = DE : HK vera.

COR. I. Cylindrus aequalis eſt prismati, quod aeq
lem cum ipſo habet baſin et altitudinem.

COR. II. Omnes cylindri aequalium baſium et alti
dinum aequales ſunt.

COR. III. Cylindri inter ſe, ut et prismata cum cyl
dris comparata ſunt in ratione compoſita ex rationi
baſium et altitudinum. Si igitur altitudines ſunt aeq
les, cylindri ſunt ut baſes: ſi vero baſes aequales ſu
cylindri ſunt et altitudines.

COR. IV. Cylindri, quorum altitudines ſunt ut diam
tri baſium, ſunt in ratione triplicata eorum diamet
rum vel altitudinum.

COR. V. Si Cylindrus et pyramis aequalem habe
baſin et altitudinem, cylindrus pyramidis triplum eſt.

COR. VI. Aequalium cylindrorum baſes ſunt recipr
ce ut altitudines; et cylindri, quorum baſes et altitu
nes ſunt in proportione reciproca, aequales ſunt. Ide
obtinet, ſi prisma cum cylindro comparetur.

§. 345.

*Pyramis ABC eſt ad conum DEF aequalis altitudin
ut baſis pyramidis BC ad baſin coni EF.*

F.189. DEM. Si proportio ABC : DEF = BC : EF v
ra non ſit, alia quantitas Z, quae circulo EF major
vel minor, ad quanta ABC, DEF, et BC erit qua
proportionalis. Sit igitur ABC : DEF = BC : Z atq
Z < EF. Circulo EF inſcribatur polygonum
quod majus eſt figura Z (§. 163.). Quodſi jam ex apicib
angulorum hujus polygoni ad verticem coni ducant
rectae, oritur pyramis Π cono DEF inſcripta et min
eodem cono. Eſt vero ABC : Π = BC : P, et proin
DEF : Π = Z : P. Ergo P < Z (§. 168. Cor. 2.) *cont
hyp.* Si vero ponatur Z > EF, circulo EF circumſc

bati

batur polygonum regulare P, quod figura Z minus eſt (§. 163.), ductisque rectis ex vertice coni ad apices angulorum hujus polygoni oritur pyramis Π cono circumſcripta, quae eodem major eſt. Eſt vero ABC : Π = BC : P, et ideo DEF : Π = Z : P. Ergo P > Z (§. 168. Cor. 2.) *contra hyp.* vera igitur eſt proportio ABC : DEF = BC : EF.

COR. I. Pyramis aequalis eſt cono, qui cum eadem aequalem habet baſin et altitudinem.

COR. II. Coni aequalium baſium et altitudinum aequales ſunt.

COR. III. Coni inter ſe, ut et pyramides cum conis comparatae ſunt in ratione compoſita ex rationibus baſium et altitudinum.

COR. IV. Coni, quorum altitudines ſunt ut diametri baſium, ſunt in ratione triplicata eorum diametrorum vel altitudinum.

COR. V. Si Cylindrus et conus, vel priſma et conus aequalem habent baſin et altitudinem, cylindrus vel priſma eſt triplum coni.

COR. VI. Aequalium conorum baſes ſunt reciproce ut altitudines; atque ſi baſes et altitudines conorum in reciproca fuerint proportione, coni aequales erunt. Idem verum eſt, ſi conus cum pyramide comparetur.

§. 346.

Tubus cylindricus eſt differentia AEFD, quae relinquitur ablato cylindro concentrico minori EFHG ex majori ABCD aeque alto. *Rectangulum tubi cylindrici* eſt rectangulum comprehenſum ſub recta BE, ea diametri baſis parte, quae in tubi ſoliditatem cadit, et ſub reliqua diametri parte EC. F. 190.

COR. Si in parallelogrammo rectangulo AI ducta ſit recta GL lateri IL parallela, atque revolvi intelligatur AI circa latus IL immotum, pars BG deſcribit tubum cylindricum AEFD.

§. 347.

Rectangulum tubi cylindrici eſt exceſſus, quo quadr tum ſemidiametri BI baſis cylindri majoris excedit quadr tum ſemidiametri EI baſis cylindri minoris ablati.

F. 190. DEM. In plano baſis BKC ducta concipiatur rec EK diametro BC perpendicularis et peripheriae in K o currens, ac erit EKq = rectang. ſub BE et EC (§. 21 ducatur recta IK, eritque IKq = EIq + EKq (§. 120. = EIq + rectang. ſub BE et EC, atque adeo rectan ſub BE et EC = IKq vel BIq — EIq.

§. 348.

Volumen cylindri eſt ad volumen tubi cylindrici a que alti, ut quadratum radii baſis cylindri ad rectangulu tubi cylindrici.

F. 190. DEM. Sit cylindrus LN ejuſdem altitudinis cu tubo AEFD, et erit cylindrus totalis AC ad cylindru GF, ut baſis BC ad baſin EF (§. 344. Cor. 3.). S BC : EF = BIq : EIq (§. 218. Cor. 2.) ergo et AC : G = BIq : EIq, ex quo concluditur AC — GF : GF = B — EIq : EIq. Cum igitur AC — GF = tubo AEFD BIq — EIq = rectangulo tubi ſub BE et EC, erit qu que AEFD : GF = rectang ſub BE et EC : EIq. De que GF : LN = EIq : PLq (§. 244. Cor. 3. et 223. Cor. 2 ergo AEFD : LN = rect. ſub EC et BE : PLq (§. 175

§. 349.

Hemiſphaerio inſcribi poſſunt et circumſcribi cyli aeque alti, quorum differentia minor ſit ſolido dato.

F. 191. DEM. Sit hemiſphaerium, cujus maximus ſe circulus ABC, ſitque datum ſolidum D. Sit radius ad diametrum AC perpendicularis. Dividatur BE riam in F, et quaelibet pars iterum bifariam in G et ita deinceps. Per ſingula diviſionum puncta ſint ctae lineae parallelae diametro AC, quae circuli pheriae occurrent in punctis M, T, etc. per quae cta demittantur perpendiculares MP, TR, etc. ſiant

ſic parallelogramma inſcripta circulo, productisque lateribus parallelogramma circumſcripta, quorum numerus inſcriptorum numerum ſuperabit unitate, ut patet ex figura. Intelligatur circulus ABC revolvi circa rectam BE immotam, atque a ſingulis rectangulis deſcribentur cylindri aeque alti, tam inſcripti, quam circumſcripti. Quodſi cylindrus infimus non eſt minor ſolido D, ſubdividatur axis in partes aequales numero duplo majore, atque tandem invenitur cylindrus minor ſolido D, quia per ſingulas diviſiones ab infimo cylindro aufertur dimidium (§. 161. Cor.). Jam vero exceſſus, quo cylindri circumſcripti ſuperant inſcriptos eſt aequalis cylindro infimo AI. Nam circumſcriptus TZ aequalis eſt cylindro RX; differentia circumſcripti ML ab inſcripto QV eſt tubus MT aequali tubo NR: differentia circumſcripti KY ab inſcripto MS eſt tubus KN aequalis tubo NO; denique differentia circumſcripti CI ab infimo inſcripto eſt tubus IO, quae differentiae ſimul ſumtae conſtituunt cylindrum AI.

COR. I. Differentia hemiſphaerii ab inſcriptis minor eſt differentia circumſcriptorum ab inſcriptis. Hinc hemiſphaerio inſcribi poſſunt tot cylindri aeque alti, ut omnium differentia ab hemiſphaerio ſit minor dato ſolido D.

COR. II. Ideo dato ſolido P hemiſphaerio minore inſcribi poſſunt hemiſphaerio tot cylindri aeque alti, ut omnes ſimul ſumti ſolido P majores ſint. Sit enim hemiſphaerium $= S$, et ejus differentia a ſolido $P = D$, erit $P + D = S$. Inſcribantur hemiſphaerio tot cylindri aeque alti, (quos brevibus ſigno *Cyl.* indicabimus) ut omnium differentia ab hemiſphaerio ſit minor ſolido D. Sit ea differentia $= Q$ et erit $Cyl. + Q = S$, praeterea $P + D = S$, hincque $Cyl. + Q = P + D$, atque ob $Q < D$, fient $Cyl. > P$.

COR. III. Differentia hemiſphaerii a circumſcriptis cylindris quoque minor eſt differentia circumſcriptorum ab inſcriptis. Ideo hemiſphaerio circumſcribi poſſunt tot

COR. III. Hemiſpheria igitur ſunt inter ſe, ut cylin-
dri earundem cum ipſis baſium et altitudinum (§. 18
Cor. 2.), ideoque in ratione compoſita ex ratione baſiu
ſuarum et altitudinum, id eſt in ratione duplicata radio
rum et ratione radiorum, quae eſt ratio radiorum vi
diametrorum triplicata. In eadem quoque ratione erun
ſphaerae integrae.

§. 351.

*Superficies cylindri recti AC demtis baſibus aequalis e
rectangulo IK, cujus altitudo KL altitudini cylindri A
baſis autem IL peripheriae baſeos BC aequalis eſt.*

F.194. DEM. In ſuperficie cylindrica ducta ſit AB, qua
erit axi DE parallela (§. 338). Coincidente hac rect
AB cum latere IM rectanguli IK, ſi cylindrus in rectan
gulum involvi intelligatur, rectangulum ita curvatu
cum ſuperficie cylindri congruit.

COR. I. Superficies cylindrorum rectorum, quorum
baſes ſunt aequales, ſunt inter ſe, ut altitudines (§. 19
Cor. 2.).

COR. II. Superficies cylindrorum rectorum aeque a
torum inter ſe ſunt ut baſium diametri vel radii. Re
ctangula enim cylindrorum aeque altorum ſuperficieb
aequalia ſunt inter ſe ut peripheriae baſium (§. 195. Co
2.) quae peripheriae ſunt inter ſe, ut diametri vel ra
dii (§. 225.).

§. 352.

*Superficies cylindri recti AC aequalis eſt circulo, cu
jus radius GF eſt media proportionalis inter altitudinem cy
lindri AB et diametrum BC baſis ejusdem.*

F.194. DEM. Sit HB dupla ipſius AB, atque ſuperfici
cylindri AC aequalis eſt rectangulo comprehenſo ſub A
et peripheria circuli BC (§. 351.) ſeu triangulo, cujus a
titudo eſt HB baſis vero circumferentiae BC aequalis (
215. et 216.). Sed circulus BC aequalis eſt triangul
cujus altitudo eſt radio BD et baſis peripheriae BC a

qua

qualis (§. 165. *Geom.*). Ideo erit ſuperficies cylindri ad circulum BC ut HB ad BE (§. 195. Cor.). Cum autem ſit HB : AB = BC : BD, et AB : GF = GF : BC ; (*hyp.*) exinde deducitur GB : GF = GF : BD (§. 193.). Et igitur GF media proportionalis inter HB et BD et ratio HB : BD duplicata rationis GF : BD. Deinde eſt circulus G : circul. BC = $\left\{\begin{array}{l} GF : BD \\ GF : BD \end{array}\right\}$ (§. 23. Cor. 2.) ergo circ. G : circ. BC = HB : BD. Erat autem HB : BD = ſuperficies cyl. ad circ. BC = circ. G : circ. BC, proinde ſuperficies cyl. = circ. G.

COR. Superficies cylindrorum rectorum ABC et NOP ſunt inter ſe ut rectangula per axem, i. e. ut rectangula AC et NP, quae comprehenduntur ſub altitudine cylindri et diametro baſis. Sit enim QR inter NO et OP proportione media pariter ac GF inter AB et BC, erit GFq = rect. ſub AB et BC atque QRq = rect. ſub NO et OP (§. 214.) eſt vero ſuperf. cyl. ABC : ſuperf. cyl. NOP = circ. G : circ. Q (§. 169. Cor. 2.) = GFq : QRq (§. 223. *Geom.*) = rect. ſub AB et BC ad rect. ſub NO et OP.

§. 353.

Superficies coni recti ABC aequalis eſt triangulo DEF, cujus baſis EF aequalis eſt peripheriae BC baſeos coni, altitudo vero DE aequalis lateri coni AB.

DEM. Sit GHI ſector circuli, cujus radius GH = DE et arcus HI = EF, erit et GH = AB et HI = peripheriae BC, ſector GHI = DEF (§. 222. *Geom.*). Coincidente autem GH cum AB, ſi conus involvatur in ſectorem, congruet ſector cum ſuperficie conica. Quare et eadem ſuperficies triangulo DEF aequalis eſt. F. 195.

COR. I. Coni recti ſuperficies aequalis eſt rectangulo comprehenſo ſub ejus latere et dimidia peripheria baſis (§. 116.).

COR. II. Coni recti ſuperficies eſt ad aream baſis, ut latus coni ad radium baſis, quia tam trianguli ſuperficiei

coni

aequalis, quam illius, quod circulo aequatur, baſis e aequalis peripheriae baſis coni, illius vero altitudo lat coni, et hujus altitudo radius baſis.

§. 354.

Coni recti ABC ſuperficies aequalis eſt circulo E, cuj radius EF eſt media proportionalis inter latus coni AB radium baſis BD.

F.196. DEM. Eſt ſuperficies coni ABC ad aream circu BGC, ut AB ad BD (§.353. Cor. 2.). Sed eſt circ. E circ. BGC = $\left\{\begin{matrix} EF : BD \\ EF : BD \end{matrix}\right\}$ (§. 223. Cor. 2.) = AB BD, (quia EF eſt inter AB et BD media proportiona lis) proinde circul. E : circ. BGC = ſuperficies coni a circ. BGC (§. 170. *Geom.*) et ideo circ. E = ſuperfici coni (§.171. Cor. 2.).

COR. I. Superficies conorum rectorum ABC et KLM ſe habent ſicut rectangula comprehenſa ſub latere eorum et radio baſis. Sit enim HI media proportionalis inte KL et LM pariter ac EF media proportionalis inter AB et BD, erit HIq = rect. ſub KL et LM, atque EFq = rect. ſub AB et BD (§.214.). Eſt vero ſuperf. coni ABC ad ſuperf. coni KLM = circ. E : circ. H (§. 169 Cor.) = EFq : HIq (§.223.), = rect. ſub AB et BD ad rect. ſub KL et LM.

COR. II. Simili modo demonſtratur, ſuperficiem coni recti eſſe ad ſuperficiem cylindri recti ut rectangulum ſub latere coni et radio baſis ad rectangulum ſub altitudi ne cylindri et diametro baſis.

§. 355.

Si conus ABC ſecetur plano DE baſi parallelo; erit ſu perficies coni truncati BCED ad ſuperficiem cujuscunque co ni recti HIK, ut rectangulum comprehenſum ſub latere DB et ſub compoſita ex duobus radiis BF et DG ad rectangulum ſub latere coni HI et radio baſis IL comprehenſum.

DEM

DEM. Ducatur BS ad AB perpendicularis, ſitque BM = BF, et MS = DG, atque compleatur rectangulum RP. Ducatur AM, ac per punctum O recta RO lateri AB parallela, erit OD = DG. Nam (BF = MB) : DG = AB : AD, MB : DO = AB : AD, ideo MB : DG = MB : DO, et DG = OD. Hinc rectangulum BO = MP = NO (§. 117. *Geom.*). Jam vero ſuperf. coni ABC eſt ad ſuperf. ADE, ut rectang. ſub AB et BF ad rectang. ſub AD at DG (§. 354. Cor.) = AM : DR, ergo ABC — ADE : ADE = AM — DR : DR. Sed quia NO = MP, ideoque AM — DR = BP, et praeterea ABC — ADE = ſuperf. BCED; erit ſuperfic. BCED : ADE = BP : DR; denique ADE : HIK = DR : rect. ſub HI et IL (§. 354. Cor.) proinde BCED : HIK = BP : rect. ſub HI et IL (§. 175.). F. 197.

§. 356.

Superficies coni truncati aequalis eſt circulo, cujus radius eſt medius proportionalis inter latus ipſius et compoſitam ex duobus radiis baſium.

DEM. Sit conus truncatus ACBD, ſintque radii baſium AL, MB. Per tria puncta A, B et M poſito plano, quod ſuperficiem coni ſecabit in rectis AB et DC, atque diviſis lateribus AB, CD bifariam in punctis E et F, linea EF erit = AL + BM (§. 198.). Sit N media proportionalis inter AB, EF. Praeterea ſit alius conus GHK, et linea O media proportionalis inter GH et HI. Jam eſt ſuperf. GHK : ſuperf. ABCD = rect. ſub GH et HI : rect. ſub AB et EF (§. 355.). Sed rect. ſub GH et HI = Oq et rect. ſub AB et EF = Nq (§. 214.), ideo GHK : ABCD = Oq : Nq, praeterea Oq : Nq, uti circuli quorum radii ſunt O et N (§. 223. *Geom.*). Ergo GHK : ABCD = circ. O : circ. N, eſt vero GHK = circ. O (§. 354.) ideo quoque ABCD = circ. N (§. 171. Cor. 3.). F. 198.

COR. I. Conorum truncatorum ſuperficies ſe habent, ut eorum rectangula, nempe comprehenſa ſub eorum latere,

latere, et ſub compoſita ex duobus radiis baſium. S enim comparandae ſuperficies conorum truncatori ABCD et PQRS atque L media proportionalis inter et compoſitam PT + RV, quae ſit = X; erit Lq = re ſub PR et X, atque Nq = rect. ſub AB et EF (§. 214 proinde ſuperf. ABCD : ſuperf. PQRS = circ. N : ci radio L deſcriptum (§. 169. Cor. 2.) = Nq : Lq (§. 22 = rect. ſub AB et EF ad rect. ſub PR et X.

COR. II. Coni truncati ſuperficies ſe habet ad ſupe ciem cylindri recti, ut rectangulum ſub parte lateris ni recti, quod cadit in truncati ſuperficiem, et comp tam ex duobus radiis baſium, ad rectangulum ſub alti dine cylindri et diametro baſis. Haec propoſitio d monſtratur modo prorſus ſimili ei, quo praecedens demonſtrata.

§. 357.

Si ſemicirculo APB aptetur tangens DOC inclinata axem AB, eaque bifariam dividatur in puncto contactu ita, ut ſit CO = OD; *ſi praeterea eidem ſemicirculo apte alia tangens PF axi AB parallela atque* CS *ſecans tang tem PF in E ſit diametro AB perpendicularis, DF cum hac* CS *parallela; tum vero immoto axe AB circum vatur ſemicirculus cum ſuis tangentibus, atque tang* DOC *deſcribat ſuperficiem conicam EF vero cylindricam: er hae ſuperficies aequales.*

F. 199. DEM. Ducantur FD, OI, CL, PG ſibi paralle item CR, EF, AB, atque punctum D vel extra dian trum AB, vel in eadem erit ſitum.

Primo caſu triangula CRD, GOI ad R et I ſunt etangula et ſimilia, quia ang. GOI + DOI = R, GO IGO = R hinc, DOI = IGO. (§. 21.) Sed DOI = R (§. 99.) ideoque RDC = IGO. Ex his concludit eſſe (CR = EF) : CD = OI : OG, vel ſumtis earum plis = OK : (OT = FN) quare rectang. ſub EF et = rectang. ſub CD et OK (§. 214. *Geom.*) et ſuperfi

cyl

cylindri EFNL aequalis ſuperficiei coni truncati DCSV (§. 356. Cor. 2.).

Secundo attingat tangens CD axem in puncto D, et ducatur CV parallela lineae OGT. In triangulo igitur DCV, cum OG ſit parallela baſi CV, erit CD : OD = CV : OG. Sed CD = 2OD, ergo et CV = 2OG, hincque CV = OT = PM = FN. Praeterea triangula CVH et HCD ſunt ſimilia (§. 205. Cor. 1.) hincque (CV = FN) : CH = CD : (DH = EF), adeoque rect. ſub FN et EF = rect. ſub CH et CD, ergo ſuperf. cyl. EN aequalis ſuperf. conicae CDL (§. 354. Cor. 2.). F. 200.

COR. Sit polygonum regulare ABCDEFGH circulo circumſcriptum, cujus latera ſunt paria numero, et latera tangentia in puncto contactus erunt bifariam diviſa; (Dem. §. 158. *Geom.*) circumvolutione circa diametrum AE immotum generentur ſuperficies conicae, atque a tangente RK ſuperficies cylindrica; erit ſuperficies cylindrica RKLS aequalis omnibus conicis ſuperficiebus ABH, BCGH, CDFG, DEF. Eſt enim ſuperf. ABH = IKLM, BCGH = IONM, CDFG = OPQN, DEF = PRSQ, hinc ſumma ſuperficierum cylindricarum ſummae conicarum aequalis. F. 201.

§. 358.

Omnium ſuperficierum eosdem terminos habentium minima eſt ſuperficies plana. Reliquae omnes, ſi ad eandem ſuperficiei planae partem collocatae, ubique in eandem partem cavae ſint, atque ſe invicem non ſecent; inaequales ſunt, ita quidem, ut eo majores ſint, quo magis a plano ſuperficie recedunt.

COR. I. Circumvolutione circa diametrum AE immotum generatae ſuperficies conicae ſimul ſumtae majores ſunt ſuperficie ſphaerica, quam ambeunt.

COR. II. Si eidem circulo inſcriptum intelligatur ſimile polygonum regulare, ſuperficies conicae ea circumvolutione generatae minores erunt ſphaerica ſuperficie, qua includuntur.

§. 359.

§. 359.

Superficies hemiſphaerii aequalis eſt ſuperficiei cylin recti eandem baſin habentis et cujus altitudo radio hemiſph rii aequalis eſt: demtis nimirum baſibus.

F.202. DEM. Circumvolutione quadrantis ABI circa di metrum BI ſit genitum hemiſphaerium, et circumvol tione rectanguli AIBD cylinder rectus, quorum ba eadem erit, nempe circulus, cujus diameter AC, altitudo BI, erit ſuperficies hemiſphaerii non maj nec minor ſuperficie cylindri. Ponatur enim, ſi fie poteſt, ſuperficies hemiſphaerii major, ſitque cylindri ca ADEC ad haemiſphaericam = AD : AF, erit AD : AF = ſuperf. cyl. ADEC : ſuperf. cyl. AFG et ideo ſuperf. cyl. ADEC : hemiſphaer = ſuperf. cy ADEC : ſuperf. cyl AFGC, et proinde ſuperf. haem ſphaerica = cylindricae AFGC. Dividatur quadrans A bifariam, et iterum bifariam, quantum opus erit, et circu ſcribatur polygonum regulare tot laterum donec IM min ſit, quam IH, ducaturque per punctum M linea PR ſi DE parallela, erunt ſuperficies conicae circumſcript aequales cylindricae APRC, quae APRC < AFG (§. 353. Cor.) ergo minores cylindrica AFGC, ergo mi nores hemiſphaerica, quod *contra* §. 358. Cor. 1. No ergo ſuperficies haemiſphaerica major eſt cylindri ADEC.

F.203. Ponatur deinde ſi fieri poteſt hemiſphaerica ſupe ficies minor cylindrica, fiatque cylindrica ADEC ad he miſphaericam = AI : IF. Ducaturque per punct. F rec FN ipſi AD parallela, erit AI : IF = ſuperf. ADE ſuperf. FNMG (§. 351. Cor. 2.) proinde cyl. ADEC hemiſphaericam = cyl. ADEC : cyl. FNMG, et ſupe hemiſphaerica = cyl. FNMG. Radio IF deſcribat circulus FRG. Semicirculo ABC inſcribatur polyg num regulare non attingens ſemicirculum FRG, eid que polygono ABC inſcribatur circulus HSK, cujus p inde radius IH major erit radio IF, ſed minor radio

Intelligantur omnia circumvolvi circa axem BI. Jam ſuperficies conicae generatae a polygono ABC aequales ſunt cylindricae HPOK (§. 353.) HPOK > FNMG ergo majores, quam cylindrica FNMG, cui aequalis eſt hemiſphaerica ABC, quare majores ſunt, quam hemiſphaerica ABC, *contra* §. 358. Cor. 2.

Eſt igitur hemiſphaerica ABC nec minor nec major cylindrica ACED, proinde eidem aequalis.

§. 360.

Superficies ſphaerae eſt quadrupla maximi in ſphaera circuli.

DEM. Sit ſphaera ABCD, maximus circulus APCS, atque intelligatur circumſcribi ſphaerae cylindrus ejusdem altitudinis EFGH, erit ſuperficies cylindrica EFGH = ſuperficiei ſphaerae (359.). Sed cylindrica aequalis eſt circulo, cujus radius eſt medius proportionalis inter HE, EF, (§. 42.) quae ſunt aequales, qui radius proinde eſt aequalis diametro EF aut AC. Circulus autem, cujus radius aequalis eſt diametro alterius AC, habet diametrum duplo majorem diametro AC, et cum ſit APCS ad hunc circulum in duplicata ratione diametrorum AC : 2AC, erit hic circulus quadruplum circuli APCS. Igitur ſuperf. cyl. EFGH, vel tota ſphaerica, quadrupla eſt maximi ſphaerae circuli APCS.

COR. Integra cylindri EFGH ſuperficies eſt ſphaericae ABCD ſequialtera.

ARITHMETICA ELEMENTARI

SECTIO I.

DE NVMERIS EORVMQVE SIGNIS GENERATIM.

§. 1.

Arithmetica eſt ſcientia ex datis numeris cogni inveniendi alios incognitos ſignorum ope certaq eorundem combinatione et ſubſtitutione. Atque id haec ſcientia explicare debet *primo* operationes ſimplic in determinatis caſibus actu inſtituendas, ut prodeat gnum determinatum numeri quaeſiti; ſecundo meth dum determinandi, quaenam ex operationibus iſtis ſi plicibus et quo ordine in determinatis caſibus adplica dae ſint. Illa arithmeticae pars dicitur Elementai haec vero Svblimior.

§. 2.

In deſignandis numeris novem utimur notis ſimpli bus ſatis cognitis, quae ſequuntur: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, *hac lege, ut lineam, ſecundum quam ſcripturi ſum in loca diviſam concipiamus a dextra verſus ſiniſtram, ut vero quaelibet earum notarum ſimplicium in primo ad de tram loco ſignet unitates, in proximo verſus ſiniſtram h decades unitatum; in tertio centenas et ita porro, creſcen valore notae in decuplum, ſi in locum verſus ſiniſtram ca ſequentem ſcribatur, et decreſcente in ſubdecuplum, ſi locum verſus dextram antecedentem transferatur.* I

de

deficientibus unitatibus vel decadibus, centenis aliisve locus, quem occupare debebat nota ſimplex, vacuus relinquendus eſt, eum ſigno 0, *quod Ciſra dicitur, explemus, ne ordinum oriatur confuſio.*

§. 3.

Numerus ſecundum has leges ſcriptus e. g. 3587209 4826152870364008, *verbis exprimi ſolet ſequentem in modum: Numerus propoſitus dividitur in claſſes ſex notarum incipiendo a dextra, et initiis claſſium adſcribuntur notae* 0, I, II, III, *etc. Quaelibet deinde claſſis diſpeſcatur in duas alias trium notarum ſigno commatis hoc modo* 35,

III II I O

872094, 826 152, 870 364, 008. *His factis, ſi ſupponamus, quod legere quis noverit tres notas ordine ſcriptas, ut* 364 *capto a ſiniſtris initio, quaelibet trium notarum claſſis exprimatur, ac ſi ſcripta foret ſeparatim, comma vero quodvis legatur, ac ſi ejus loco adſcriptum foret* Mille, *totaque ſex notarum claſſis ad harum notarum* 0, I, II, III, *etc, proxime ſequentem referatur, quarum prima notat* Unitates, *altera* Milliones, *tertia* Billiones, *quarta* Trilliones *et ita porro.*

§. 4.

In numero ſecundum leges §phi 2. *ſcripto, ut* 28735, *quaelibet nota ut* 8 *valet decimam partem ejus quod valuiſſet in locum notae proxime antecedentis* 2 *translata. Hinc ſequitur, quod ſi* 2 *ponatur deſignare unitates,* 8 *deſignet unitatis partes decimas, unde nota* 7 *hanc excipiens ſignabit partes decimas decimarum, id eſt centeſimas, quae hanc ſequitur nota* 3, *unitatis partes milleſimas, et ita porro. Hinc* Fractiones Decimales, *id eſt, quarum* denominatores *ſunt aliqui numeri ex ſerie* 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, *etc. ubi quilibet terminus ſequens decies major eſt termino proxime antecedente, per eandem hanc ſignandi legem, unitatum loco commate vel puncto ſignato, denotari poſſunt.*

Reliqui numeri fracti hic quoque ſcribi ſolent eodem modo, quem in §. 180. *Geom.* jam notavimus, litterarum loco hic adhibendo ſigna determinata $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$ $1\frac{7}{2}$, $1\frac{137}{819}$.

§. 5.

Numeri ſunt quanta, proinde duo numeri pariter atque duo extenſa inter ſe comparari poſſunt. Duorum numerorum mutua ad ſe invicem habitudo, quae eorundem inter ſe comparatione innoteſcit, vocari ſolet eorum *Ratio Mathematica*.

§. 6.

Comparari autem poſſunt numeri inter ſe duplici modo. Nimirum aut inquirendo in eorundem differentiam, aut inveſtigando magnitudinem, quae uni in reſpectu ad alterum competit. Ea duorum numerorum ad ſe invicem habitudo, vi cujus determinata quadam parte a ſe invicem differunt, vocatur *Ratio Arithmetica* unius numeri ad alterum: magnitudo, quae uni numero in reſpectu ad alterum eſt tribuenda, eorum *Ratio Geometrica*. Ratio Arithmetica, quae inter numeros A et B intercedit, deſignatur ſequenti ſigno (—) collocato inter terminos rationis hoc modo A — B, atque eorum Ratio Geometrica ſigno A : B, uti in Geometria extenſorum ratio denotari ſolet.

COR. Quanta, quae per numeros A et B exprimuntur, inter ſe comparari nequeunt, ſi ſint heterogenea. Proinde nec arithmetica nec geometrica ratio concipi poteſt inter numeros A et B, quanta heterogenea exprimentes, niſi forſan numeri illi *conſiderentur in abſtracto*, quod fieri dicitur, ſi ad diverſitatem unitatum unius numeri ab unitatibus alterius non adtenditur.

§. 7.

Si numerus A a numero B differt differentia aequali illi, qua numerus C a numero D differt, ratio arithmetica ipſius A ad B *ſimilis*, ſive *aequalis*, eſſe di-

citur

citur rationi ipſius C ad D, quae rationes oppoſito caſu dicuntur *inaequales*. Aequalitas duarum rationum arithmeticarum dicitur *Proportio arithmetica*, cujus termini vocantur *Numeri arithmetice proportionales*. Ad hoc indicandum utimur ſigno ſequenti, A — B = C — D. Quid ſit proportio numerorum geometrica et numeri geometrice proportionales ex §. 167. *Geom.* perſpicitur. Arithmetica ratio numeri A ad numerum B innoteſcit, ſi data fuerit horum numerorum differentia D, quae ideo quoque *Denominator Rationis* numeri A ad B dici ſolet.

COR. Aequalium rationum arithmeticarum denominatores aequales ſunt: et duae rationes arithmeticae, quarum denominatores aequales ſunt, ipſae ſunt aequales. Generalis igitur formula pro arithmetica proportione quacunque haec eſt A + *d* — A = B + *d* — B, quae etiam ſic ſcribi poteſt A — A + *d* = B — B + *d*, ſi *d* fuerit denominator.

§. 8.

Si in proportione arithmetica A — B = C — D fuerit B = C, ut ſit A — B = B — D, vel A — C = C — D; proportio arithmetica vocatur *continua*, B vero vel C *terminus medius arithmetice proportionalis*. Reliquae proportiones *diſcretae* vocantur.

§. 9.

Arithmetica ratio numeri A ad numerum B innoteſcit, ſi datus fuerit *Denominator Rationis* numeri A ad B. Ideo dato numero A et denominatore D rationis ipſius A ad B inveniri poteſt numerus B, ac operatio hunc in finem inſtituenda alia erit, ſi numerus quaeſitus B numerum datum A excedere debet dato denominatore: alia vero ſi numerus datus A quaeſitum B dato denominatore excedere debet. Prior operatio eſt *Additio* numeri D ad A, poſterior vero ſubtractio numeri D a numero A (conf. §. 20-23. *Geom.*)

§. 10.

Omnes numeri integri, ſi intelligantur vel numeri a ſtracti, vel tales, quorum unitates ſunt homogeneas, ſu quanta commenſurabilia, quia ipſa unitas eſt eorundem com munis menſura, et omnes numeri fracti, quorum denomin tores ſunt iidem, quia eadem pars unitatis aliquota eſt e rum communis menſura.

COR. Ideo ea omnia, quae Sectio VI. Geometriae d comparatione quantorum commenſurabilium geometri explicavit, etiam vera erunt, ſi extenſorum loco nume integri ſubſtituantur, vel numeri fracti, qui aequal habent denominatores.

§. 11.

Duo numeri fracti, quorum denominatores ad num ratores in eadem ſunt ratione geometrica, aequales ſunt; viciſſim ſi duo numeri fracti ſunt aequales, ratio denomin torum ad numeratores eadem eſt.

DEM. 1) Si dati ſint numeri fracti $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ atque ſit $B : A = D : C$; numerator A eodem mo componitur ex denominatore B, quo numerator C denominatore D componitur. Quare cum denomin tores fractionum ſint ipſae unitates, ex quibus com nuntur fractiones, ſequitur easdem eodem modo ex unitatibus componi ſi ſint denominatores ad nume tores in eadem ratione, et proinde ipſae fractiones quales erunt (§. 180. *Geom.*).

2) Si fuerit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, numerus $\frac{A}{B}$ ex unitate eodem modo compoſitus eſt, quo numerus ex ſua unitate componitur (§. 180. *Geom.*). Ipſi denominatores ſunt unitates, ex quibus fractiones positae ſunt, ergo numerator A eodem modo ex

denominatore B compoſitus erit, quo numerator C componitur ex ſuo denominatore D. Ex quo patet, eſſe $B : A = D : C$.

COR. Si igitur numeratoris et denominatoris ejusdem fractionis capiantur aequemultipla, vel aequeſubmultipla, magnitudo fractionis non mutatur (§. 187. *Geom.*) ita ut ſit $\frac{A}{B} = \frac{nA}{nB}$.

§. 12.

Duo numeri fracti quicunque ſunt quanta commenſurabilia, licet denominatores ſint inaequales.

DEM. Dati ſint numeri fracti $\frac{n}{m}$ et $\frac{A}{B}$. Loco $\frac{n}{m}$ ſubſtitui poteſt $\frac{Bn}{Bm}$ et $\frac{mA}{mB}$ loco $\frac{A}{B}$, quia eſt $\frac{Bn}{Bm} = \frac{n}{m}$ et $\frac{mA}{mB} = \frac{A}{B}$ (§. *praec.*). Praeterea eſt $Bm = mB$, quia eſt $1 : m = B : Bm$ et $1 : B = m : mB$. Hinc $1 : m = B : mB$ (§. 188. *Geom.*) et $B : Bm = B : mB$ (§. 170. *Geom.*). Proinde $Bm = mB$. Fractiones igitur $\frac{Bn}{Bm}$ et $\frac{mA}{mB}$ ſunt quanta commenſurabilia (§. 10. Ar.) et proinde quoque ipſis aequales $\frac{n}{m}$ et $\frac{A}{B}$ erunt commenſurabilia quanta.

COR. I. Si fuerit $B = 1$, $\frac{A}{B}$ eſt numerus integer. Ideo quoque numerus integer et fractio quaecunque ſunt quanta commenſurabilia.

COR. II. Si igitur in proportione $A : B = C : D$, litterae A, B, C, D, numeros denotent quoscunque vel integros vel fractos, omnia ea hic adplicari poſſunt, quae

quae Sectio VI. Geometriae de proportionum Geometricarum rationalium affectionibus explicavit.

§. 13.

Si duorum numerorum A et B, inter quos ratio geometrica intercedere concipitur, unus A pro unitate aſſumatur, alter B ex eodem tanquam numerus ex unitate ortus eſſe concipi poteſt. Innoteſcente vero numero in quem B evadit, ſi A ſumatur pro unitate, ſimul innoteſcit ratio geometrica ipſius A ad B, quare numerus iſte vocatur *Exponens rationis* ipſius A ad B.

COR. Aequalium rationum geometricarum aequales ſunt exponentes, et duae rationes geometricae, quarum exponentes aequales ſunt, ipſae ſunt aequales.

§. 14.

Ex dato igitur numero A et exponente rationis E ipſius A ad B numerus B poteſt inveniri. Erit vero aut unitas ad exponentem E, uti quantitas data A ad quaeſitam B: aut exponens E ad unitatem, uti quantitas data A ad quaeſitam B. *Si prius*, operatio, qua B ex dato A et exponente E invenitur, vocatur *Multiplicatio* numeri A per numerum E. Quantitas data A vocatur *Multiplicandum*, exponens E vero *Multiplicator*. Utraque numeri dati etiam communi nomine *Factorum* insigniuntur. Quantitas quaeſita B dicitur *Factum* ſ. *Productum*. *Si poſterius*, operatio inſtituenda, ut B ex dato A et exponente E inveniatur, *Diviſio* quanti A per E vocatur. Quantitas data A nomine *Dividendi*, exponens nomine *Diviſoris*, et quantitas quaeſita B *Quoti* nomine indigitantur. Multiplicandum eſſe numerum A per alium E denotatur hoc ſigno (×) vel (,) vel etiam (.) inter eosdem interpoſito. Alias quoque factores in ſe invicem multiplicandi absque ullo interpoſito ſigno ſibi invicem junguntur. Dividendum eſſe quantum A per aliud E indicatur ſcripto dividendo eique ſubjuncto diviſore interpoſito ſigno (:).

cor. I. Si E eſt numerus integer, et numerus A toties ſibi ipſi addatur, quoties in E eſt unitas; numerus qui producitur, erit $= A \times E$.

cor. II. Duo numeri A et E, ſive ſint integri ſive fracti, ſive unus integer, alter vero fractus, idem dant factum, ſive prior per poſteriorem, ſive poſterior per priorem multiplicetur. Multiplicato enim numero A per E eſt $1 : E = A : A \times E$, et multiplicato E per A fit $1 : A = E : E \times A$, ex qua analogia deducitur $1 : E = : E \times A$ (§. 188. *Geom.*). Proinde eſt $A : A \times E = A : E \times A$ (§. 170. *Geom.*) et $A \times E = E \times A$ (§. 171. Cor. 2. *Geom.*).

cor. III. Numerus per unitatem multiplicatus vel diviſus non mutatur. Si vero numerus per ſe ipſum dividatur quotus eſt unitas.

§. 15.

Aequalibus numeris per aequales multiplicatis vel diviſis, inveniuntur facta aequalia vel quoti aequales.

DEM. Sit $A = C$, et $B = D$, atque

1) Si multiplicetur A per B et C per D, habetur $1 : B = A : A \times B$ et $1 : D = C : C \times D$. Cum vero ſit $B = D$, erit quoque $1 : B = C : C \times D$ (§. 169. *Geom.*) et $A : A \times B = C : C \times D$ (§. 170. *Geom.*). Sed $A = C$ (*hyp.*) ergo $A \times B = C \times D$ (§. 171. Cor. 3. *Geom.*).

2) ſi dividatur A per B, et C per D, habetur $B : 1 = A : (A : B)$ et $D : 1 = C : (C : D)$, ex qua analogia ob $B = D$ iterum ſequitur $B : 1 = C : (C : D)$ atque haec cum priori $B : 1 = A : (A : B)$ comparata dat $A : (A : B) = C : (C : D)$. Cum igitur ſit $A = C$ (*hyp.*) iterum eſt $(A : B) = (C : D)$.

§. 16.

Si ſumma plurium numerorum $A + B + C +$ etc. *multiplicanda vel dividenda ſit per numerum* E; *erit* $(A + B + C) \times E = A \times E + B \times E + C \times E$, *et* $(A + B + C) : E = (A : E) + (B : E) + (C : E)$.

DEM. 1) Quia eſt $1 : E = A : A \times E$, $1 : E = B : B \times E$, et $1 : E = C : C \times E$ etc. erit $1 : E = (A + B + C) : (A \times E + B \times E + C \times E)$ (§. 186. Cor. *Geom.*) ideo $A \times E + B \times E + C \times E = (A + B + C) \times E$ (§. 14. Ar.).

2) Deinde quia eſt $E : 1 = A : (A : E)$, $E : 1 = B : (B : E)$, $E : 1 = C : (C : E)$ etc. erit $E : 1 = A + B + C : (A : E + B : E + C : E)$ (§. 186. Cor. *Geom.*). Proinde $(A : E + B : E + C : E) +$ etc. $= (A + B +$ etc.$) : E$. §. 14. Ar.

COR. Ideoque quoque eſt $(A - B) \times E = A \times E - B \times E$, et $(A - B) : E = (A : E) - (B : E)$. Sit enim $A - B = D$, erit $A = D + B$, et $A \times E = D \times E + B \times E$, vel $A : E = (D : E) + (B : E)$. Ideo $A \times E - B \times E = D \times E = (A - B) \times E$, et $(A : E) - (B : E) = (D : E) = (A - B) : E$.

§. 17.

Si duo numeri integri vel fracti A et B multiplicentur vel dividantur per eundem alium vel integrum vel fractum E; facta vel quoti erunt ut numeri dati A et B.

DEM. 1) Quia eſt $1 : E = A : A \times E$, et $1 : E = B : B \times E$, fiet $A : A \times E = B : B \times E$ (§. 170. *Geom.*) et $A : B = A \times E : B \times E$ (§. 188. *Geom.*).

2) Quia praeterea eſt $E : 1 = A : (A : E)$ et $E : 1 = B : (B : E)$, erit quoque $A : (A : E) = B : (B : E)$ et $A : B = (A : E) : (B : E)$.

§. 18.

Aequalibus numeris per inaequales diviſis, quoti erunt in ratione diviſorum inverſa.

DEM. Si $A = B$ et C in $= D$, praeterea $\frac{A}{C} = Q$ et $\frac{B}{D} = q$; erit $C : 1 = A : Q$ et $D : 1 = B : q$ vel $D : 1 = A : q$, ob $A = B$ (*hyp.*). Ergo $C : D = q : Q$ (§. 193. Cor. *Geom.*).

§.

§. 19.

Quatuor tantum poſſibiles eſſe operationes ſimplices, quibus ex dato ſigno numeri cogniti ejusque ratione ad numerum quaeſitum incognitus iſte inveniri poteſt, ex præcedentibus patet, nimirum Additio, Subtractio, Multiplicatio et Diviſio (§. 14. et 9.) Complexus regularum, quibus convenienter quatuor iſtae operationes ſimplices ſignorum ope peragi debent, dici ſolet *Algorithmus*. Ideo Arithmetica Elementaris in eo, ut hunc Algorithmum, et quidem in numeris determinatis explicet, eſt occupata.

SECTIO II.

ALGORITHMVS NVMERORVM INTEGRORVM ET FRACTIONVM DECIMALIVM.

§. 20.

Poſtulantur ſigna ſummarum duorum numerorum integrorum, quorum quilibet denario minor eſt, ideoque nota ſimplici exprimitur, ut et differentiarum duorum numerorum integrorum, ſi ſignum numeri, a quo fieri debet ſubtractio, eſt unum ex iis, quae additione duarum notarum ſimplicium oriri poſſunt, ſubtrahendus vero numerus nota ſimplici expreſſus.

§. 21.

Datum numerum integrum quemcunque alteri addere, ſive fractiones decimales ipſi adjunctae ſint ſive minus.

579	A	73,99	A
4863	D	898,997	D
12		187	
130		1,800	
1300		11,000	
4000		160,000	
5442	B	800,000	
		972,987	B

SOL. Sint addendi numeri A et B. Scribantur ſi- gna eorundem ita, ut unitates reſpondeant unitatib decades decadibus, decimae decimis, et rel. Tu incipiendo a dextris colligantur in ſummam (§. 19.) n tae ſimplices primae claſſis, haecque ſumma ſubſcri tur primae claſſi obſervato valore locali notarum ſi plicium. Deinde colligantur in ſummam (§. 20.) no ſimplices ſecundae claſſis, haecque ſumma ſubſcriba eidem claſſi, iterum valore locali notarum ſimplici probe obſervato, locis vacuis ad confuſionem vitand cifris repletis. Tertia claſſis tractetur eodem modo, nec nulla ſuperſit. Summae partiales ita inventae nuo colligantur in ſummam, uti praeſcriptum eſt. Q bus factis numerus B ita repertus erit ſumma quaeſita

DEM. Continet numerus repertus B omnes p tes numerorum A et D, proinde numeris A et D ſi ſumtis aequalis erit, et numerus B inventus excedit tum A data differentia D. Proinde eſt numerorum A D ſumma (§. 9.).

COR. Quodſi plures duobus numeri A, B, C, fi rint dati in unam ſummam colligendi, facile patet, ſ ceſſive operandum et primo quaerendam eſſe ſumm (A + B), numerumque inventum deinde cum ter dato C in unam ſummam eſſe colligendum, ſicque p ro, ſi adhuc plures fuerint dati.

§.

§. 22.

Datis duobus numeri integris, ſive fractiones deci-males adnexae ſint, ſive minus, minorem a majori ſubtra-here.

5 8 2 7 A		42, 9 7 8 3 A	
1 3 9 8 D		5, 4 9 7 6 D	
4 4 2 9 B		37, 4 8 0 7 B	

SOL. Sit numerus major A, minor D. His ita ſcriptis, ut ſigna ejusdem ordinis ſibi reſpondeant, incipiendo a dextris, quaelibet nota numeri D ſubtrahatur a nota numeri A ipſi reſpondente. Quodſi haec minor eſt nota ab ea ſubtrahenda, prius augenda eſt decade, haecque decas a nota verſus ſiniſtram proxima numeri A huc translata concipienda, ita ut ea nota unitate minor fiat, (quod puncto eidem ſubſcripto indicatur). His peractis fieri poteſt ſubtractio (§. 20). Reſiduum ſub nota ſubtracta ſcribatur apud B, ſicque verſus ſiniſtram pergatur, donec nulla numerorum A et D nota ſuperſit. Numerus B hoc modo ortus erit is, qui quaerebatur.

DEM. Numerus inventus B continet exceſſum omnium partium numeri A ſuper omnes partes numeri D reſpondentes, ideo numerus B exceſſui totius numeri A ſupra numerum D totum aequalis eſt, ex quo porro ſequitur, numerum A quoque excedere inventum B data differentia D, hincque B eſſe numerum quaeſitum (§. 9.).

§. 23.

Invenire omnia facta, quorum factores ſunt numeri integri denario minores.

SOL. et DEM. Scribantur ordine omnes numeri integri ab 1 ad 9, et quolibet eorum ad ſe ipſum addito proveniet nova ſeries, quae eorum numerorum dupla continebit. Secundae hujus ſeriei numeris ad reſpondentes

dentes primae additis orietur alia, quae tripla nume rum initio poſitorum continebit. Eodem modo q drupla, quintupla et multipla reliqua invenientur (§. Cor. I.) uti in tabula adjecta factum eſt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Haec tabula *Abacus Pythagoricus* vocari ſolet, ex que facta notarum ſimplicium ſatis promte exc poſſunt.

COR. I. Si quaedam notarum ſimplicium 7 multi cata per aliam notam ſimplicem 6 producat factum prior 7 autem in decuplum 70 augeatur, factum erit cuplum prioris 420 (§. 17.) ſi factor 7 augeatu centuplum 700, factum erit 4200, ſi vero 700 m plicetur per 60, erit factum 42000 (§. *cit.*).

COR. II. Quodſi vero loco 7 ſumatur 0, 7, fac erit prioris pars decima 4, 2, hinc quoque eſt 0, 0 = 0, 42 et 0, 07 × 0, 6 = 0, 042.

COR. III. Ideo generaliter, ſi multiplicandae ſi tae ſimplices cum adnexis locis vacuis, facti nota d rima a loco unitatum tantundem eſt removenda, tum verſus eandem partem a locis unitatum remota

notae dexterrimae amborum factorum; locis vacuis, quoad opus eſt, cyphris repletis.

§. 24.

Datum numerum integrum A quemcunque per quemvis alium integrum E multiplicare.

SOL. 1. Si multiplicator E fuerit nota ſimplex, multiplicetur per eam multiplicandi A nota prima incipiendo a dextris

	5	4	8	3	A
				7	E
3	8	3	8	1	B

(§. 22.) ſcribaturque ſub illa numeri A nota exceſſus facti ſupra decades. Deinde multiplicetur ſecunda nota ſimplex numeri A per E (§. 22. Cor. 1.) factoque addantur decades prioris facti, exceſſus ſummae ita ortae ſupra decades ſub numeri A nota ſecunda ſcribatur, eademque operatio repetatur, donec nulla numeri A nota ſuperſit. Numerus B hoc modo ortus erit factum quaeſitum.

DEM. Nam $B = 3 \times E + 80 \times E + 400 \times E + 5000 \times E$ (*per operat.*) $= (3+80+400+5000) \times E$ (§.) $= 5483 \times E$.

2. Si multiplicator fuerit nota ex pluribus compoſita,

			5	4	8	3	A'
				9	2	7	E
		3	8	3	8	1	F
	1	0	9	6	6	0	G
4	9	3	4	7	0	0	H
5	0	8	2	7	4	1	B

Generantur facta F, G, H ex numero A per omnes notas ſimplices numeri A (§. *per ſol.* 1. *et* §. 23. *Cor.* 1.) eaque colligantur in ſummam B, quae erit factum quaeſitum.

DEM.

DEM. Nam B = A × 7 + A × 20 + A × 9
(*per operat.*) = A × (7 + 20 + 900) (§. 16.) = A
927.

COR. I. Factores, quibus adnexae ſunt cifrae, mul
plicantur in ſe invicem nulla cifrarum habito reſpec
deinde facto ita orto tot cifrae adjiciuntur, quot adſu
in utroque factore.

COR. II. Factores, quibus adnexae ſunt fractiones d
cimales, multiplicantur ut numeri integri, in facto a
tem invento ſignum loci unitatum ita collocatur, ut po
illud tot ſequantur loca decimalia, quot adſunt in utr
que factore (§. 23. Cor. 2.).

§. 25.

Si factum dividatur per multiplicatorem, quotus
multiplicandum. Si vero quotus multiplicetur per divi
rem, producitur dividendum.

DEM. 1. Sit multiplicator = *m* multiplicandu
= M et factum = F. Dividatur F per *m*, et erit
notione diviſionis *m* : 1 = F : (F : *m*) vel 1 : *m* (F : *m*
F praeterea vero ex notione multiplicationis 1 : *m* = M
F, ex qua analogia cum priori comparata concludit
(F : *m*) : F = M : F (§. 170. *Geom.*) et proinde (F : *m*
= M (§. 171. Cor. 2. *Geom.*).

2. Deinde ſit quotus = Q, dividendum = D et d
viſor = d. Multiplicetur Q per d, et erit 1 : d = Q
Q × *d*, vel *d* : 1 = Q × *d* : Q. Ex notione vero di
ſionis eſt *d* : 1 = D : Q, proinde Q × *d* : Q = D : Q (
170. *Geom.*) atque Q × *d* = D (§. 171. Cor. 2. *Geom.*).

COR. I. Ideo ex Abaco Pythagorico etiam inveni
poſſunt quoti, ſi dividendum in tabula occurrat, et di
ſor ſit numerus denario minor.

COR. II. Si numerus dividendus in tabula accurat
non occurrat, invenietur numerus, qui per diviſore
multiplicatus producat factum dividendo immediate m
nus, ſi nempe factum dividendo immediate minus in t

bu

hula inveſtigetur, cujus factorum unus ſit diviſor, alter enim quotus erit.

COR. III. Si dividendum et diviſor ſint notae hujus generis, et habeant loca vacua adnexa vel dextrorſum, vel ſiniſtrorſum, invenietur diſtantia notae dexterrimae quoti a loco unitatum ſubtracta diſtantia notae dexterrimae diviſoris a ſimili diſtantia dividendi.

COR. IV. Numerus per eundem alium multiplicatus et diviſus non mutatur.

§. 26.

Si dividendum eſt minus diviſore, quotus eſt numerus fractus, cujus denominator eſt diviſor et numerator eſt dividendum.

DEM. Sit dividendum = D, diviſor = d, quotus = Q, et D < d. Dividatur D per d, ut prodeat Q, eritque d : 1 = D : Q et Q < 1 (§. 172. *Geom.*) proinde Q ex unitate integra aliquoties repetita componi nequit, ſed tantum ex parte ejus aliquota: et quia eſt d : D = 1 : Q, (§. 188. *Geom.*) unitas reſolvenda eſt in partes aliquotas, quot ſunt unitates in numero d, ex quibus tot ſunt aſſumendae ad componendum Q, quot ſunt unitates in D, unde patet propoſitum.

COR. I. Ex demonſtratione conſequitur propoſitio generalis, quod omnis quotus conſiderari poſſit ut numerus fractus, cujus numerator eſt dividendum, denominator vero diviſor, unde quotus, qui diviſione numeri A per E prodit, etiam generaliter ut numerus fractus $\frac{A}{E}$ deſignari ſolet.

COR. II. Porro ex analogia d : D = 1 : Q patet, quod quotus ſit exponens rationis diviſoris ad dividendum: unde generaliter exponens rationis numeri A ad numerum B diviſione ipſius B per A invenitur.

COR. III. Hinc quaevis ratio geometrica numeri A B inſtar fractionis $\frac{B}{A}$ et proportio geometrica A $= C : D$ etiam ſequentem in modum $\frac{B}{A} = \frac{I}{(}$ exprimi poteſt (§. 12. Cor. 1.).

COR. IV. Si exponens rationis numeri A ad numer B notetur littera *m*, erit $\frac{B}{A} = m$, et proinde B mA (§. 25.). Quodſi jam ratio C : D aequalis ſit tioni A : B, erit quoque $\frac{D}{C} = m$, ideoque D = Ubi notandum eſt, quod *m* poſſit eſſe numerus inte vel fractus quicunque. Proportio itaque A : B = C coincidit cum iſta A : *m*A = C : *m*C, atque hæc eſt ma generalis proportionis rationalis cujuscunque.

§. 27.

Datum numerum integrum per alium integrum p minorem dividere.

SOL. Sit datum dividendum A, diviſor E.

	5 8 4 3 5	A	2 0 0 0	M
E. 27)	5 4 0 0 0	B	1 0 0	N
	4 4 3 5	D	6 0	O
	2 7 0 0	F	4	P
	1 7 3 5	G	2 1 6 4	B
	1 6 2 0	H		
	1 1 5	I		
	1 0 8	K		
	7	L		

In diviſore concipiantur omnia loca vacua eſſe prae primum verſus ſiniſtram pariterque in dividendo,

n

nota ſiniſtima ipſius minor ſit nota ſiniſtima diviſoris, quo caſu omnia dividendi loca praeter duo ſiniſtima ſunt vacua concipienda. Quaeratur jam quotus M ex §. 25. Cor. 3. Multiplicetur diviſor E per hunc quotum, et productum C ſubtrahatur ab A, ſi eodem minus ſit; ſi autem C dividendo A majus inveniatur, quoti M nota ſiniſtima unitate eſt minuenda; et multiplicatio tentanda donec inveniatur productum C dividendo A immediate minus. Differentia D hujus producti C a diviſore A ſumatur pro novo dividendo per diviſorem E, ſimilibus operationibus repetitis quaeratur quotus N, qui multiplicatus per diviſorem E producat factum F priori reſiduo D immediate minus, hocque facto F a D ſubtracto notetur differentia G. Eaedem operationes repetantur, donec relinquatur reſiduum aliquod L, quod diviſore E minus ſit. Addantur quoti partiales M, N, O, P, et ſumma ſit $= B$, quo facto erit $B + \frac{L}{E}$ quotus, qui quaerebatur.

DEM. Eſt enim $C + F + H + K + L = A$, et $C = M \times E$, $F = N \times E$, $H = O \times E$, $K = P \times E$ (*per operat.*) ideo $A = M \times E + N \times E + O \times E + P \times E + L = (M + N + O + P) \times E + L$. Praeterea eſt $M + N + O + P = B$, hinc $A = B \times E + L$, et $\frac{A}{E} = B + \frac{L}{E}$ (§. 15. coll. §. 25. Cor. 4.).

COR. Quodſi diviſor et dividendum loca decimalia habeant adnexa, inveniuntur loca decimalia quoti ex §. 25. Cor. 3. Ex quo patet, hoc caſu in dividendo plures poſt locum unitatis notas debere adnexas eſſe, quam adſunt in diviſore. Quod ſi ſecus ſe habuerit, tot loca va-

cua dividendo verſus dextram adnecti debent et diviſi quousque lubet, continuari poteſt, donec quoti notae u mae eas minutias denotent, quae in praxi negligi poſſu

SECTIO III.

ALGORITHMVS FRACTIONVM.

§. 28.

D*atam fractionem per numerum integrum multi care.*

SOL. 1. Datae fractionis $\frac{A}{B}$ numerator A mul plicetur per numerum datum C, ut fiat $\frac{A \times C}{B}$.

DEM. Quia eſt $A : A \times C = \frac{A}{B} : \frac{A \times C}{B}$ (17.) et $A : A \times C = 1 : C$ (§. cit. coll. §. 14. Cor. 3. et Cor. 4.) erit $1 : C = \frac{A}{B} : \frac{A \times C}{B}$, ideoque $\frac{A \times C}{B}$ $= \frac{A}{B} \times C$.

2. Fractionis $\frac{A}{B}$ denominator B dividatur p integrum C, numeratore retento.

DEM. Nam $A \times C : B = \frac{A \times C}{C} : \frac{B}{C}$ (§. 1 *Arithm.*) et quia $\frac{A \times C}{C} = A$, (§. 25. Cor. 4.) exind ſequ

ſequitur, fore $A \times C : B = A : \frac{B}{C}$, id eſt, $\frac{A \times C}{B}$

$= \frac{A}{B:C}$ (§. 26. Cor. 3.) $= \frac{A}{B} \times C$. (*ſol.* 1)

§. 29.

Datam fractionem per numerum integrum dividere.

SOL. 1. Datae fractionis $\frac{A}{B}$ numerator dividatur per integrum datum C, retento denominatore, erit $\frac{A:C}{B}$ quotus. Vel

2. Denominator B multiplicetur per integrum C, retento numeratore, quod prodit, $\frac{A}{B \times C}$ erit quotus.

DEM. Numerus enim, qui multiplicatus per diviſorem producit dividendum, eſt quotus. Sed $\frac{A:C}{B}$ $\times C = \frac{A:C \times C}{C} = \frac{A}{B}$, et $\frac{A}{B \times C} \times C =$ $\frac{A}{B \times C : C} = \frac{A}{B}$.

COR. Ex hac propoſitione cum praecedente collata perſpicitur, valorem fractionis non mutari, ſi ejusdem numerator et denominatur per eundem numerum multiplicetur vel dividatur. Ultimo ſubſidio saepius fractio ad minores terminos reduci poteſt, ſi nimirum inveniri poſſit numerus quidam tertius, qui utrumque fractionis terminum absque reſiduo dividit.

§. 30.

Datae fractioni aliam datam addere.

SOL. 1. Si datarum fractionum denominatores ſi iidem, addantur earundem numeratores, retento den minatore.

DEM. Si datae ſint fractiones $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ e $\frac{A}{C}$ quotus ex diviſione ipſius A per C, et $\frac{B}{C}$ qu tus ex diviſione ipſius B per C emergens (§. 26. Cor. quare erit $\frac{A}{B}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$.

2. Si datarum fractionum denominatores non ſi iidem, additio inſtitui nequit, niſi reduci poſſint: alias fractiones ipſis aequales, quarum denominator ſint iidem, id eſt *ad eandem denominationem.* Si hoc ctum ſit, reliqua peragi poſſunt, uti in caſu primo.

Si vero datae ſint fractiones $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ uterq vero utriusque fractionis terminus per denominator alterius multiplicetur, ut habeantur fractiones $\frac{A \times D}{B \times D}$ et $\frac{C \times B}{D \times B}$; fractiones datae ad eandem denominati nem erunt reductae.

DEM. Eſt enim $\frac{A \times D}{B \times D}=\frac{A}{B}$ et $\frac{C \times B}{D \times B}$ $\frac{C}{D}$ (§. 29. Cor.) et $B \times D = D \times B$ (§. 14. Cor. 2.).

COR. Quia omnis numerus integer quoque ſpect poteſt, ut fractus, cujus denominator eſt unitas, iisd regulis abſolvitur additio numeri integri ad fractum.

§. 31.

Datam fractionem ab alia data ſubtrahere.

SC

SOL. Fractionibus, ſi non habeant eundem denominatorem, ad eandem denominationem reductis, numerator datae fractionis ſubtrahatur a numeratore alterius, retento denominatore: quod prodit, erit differentia quaeſita.

DEM. Sit generatim fractio $\frac{B}{C}$ ſubtrahenda a fractione $\frac{A}{C}$. Cum $\frac{B}{C}$ ſit quotus ex diviſione ipſius A per C emergens, (§. 26. Cor. 1.) erit $\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$ (§. 16.).

COR. Ex iis, quae in *Cor.* §. *praec.* ſunt monita, patent ſimul regulae, quarum uſu fractio a numero integro, vel numerus integer a fractione ſubtrahi poteſt.

§. 32.

Numerum fractum $\frac{A}{B}$ per alium fractum $\frac{C}{D}$ multiplicare.

SOL. Factum ex numeratoribus datarum fractionum ſumatur pro numeratore, et factum ex denominatoribus datarum pro denominatore fractionis $\frac{A \times C}{B \times D}$, quae erit factum.

DEM. Multiplicato numeratore A per alterum C, erit $1 : A = C : A \times C$. Sed $C : A \times C = \frac{C}{D} : \frac{A \times C}{D}$ (§. 17.) ideo $1 : A = \frac{C}{D} : \frac{A \times C}{D}$ (§. 170. Geom.)

Geom.) vel $1 : \frac{C}{D} = A : \frac{A \times C}{D}$ (§. 188. Geom.

Jam vero $A : \frac{A \times C}{D} = \frac{A}{B} : \frac{A \times C}{B \times D}$ (§. 17.

29.) ergo $1 : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} : \frac{A \times C}{B \times D}$ et $\frac{A \times C}{B \times D} =$

$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$.

§. 33.

Numerum fractum $\frac{A}{B}$ per alium numerum fracti

$\frac{C}{D}$ dividere.

SOL. Numerator dividendi multiplicetur per de nominatorem diviſoris, et denominator dividendi pe numeratorem diviſoris. Prius factum A × D eſt numera tor, et poſterius B × C denominator quoti $\frac{A \times D}{B \times C}$.

DEM. Numerus, qui multiplicatus per diviſorem producit dividendum eſt quotus (§. 25.). Sed numer $\frac{A \times D}{B \times C}$ multiplicatus per diviſorem $\frac{C}{D}$ producit di videndum $\frac{A \times D \times C}{B \times C \times D}$ (§. 32.) $= \frac{A}{B}$; (§. 29. Cor.

proinde numerus $\frac{A \times D}{B \times C}$ eſt quotus.

SECT

SECTIO IV.

DE PROBLEMATVM QVORVNDAM ARITHMETICORVM, QVAE PROPORTIONVM THEORIA NITVNTVR, SOLVTIONE.

§. 34.

In omni proportione arithmetica eſt ſumma terminorum mediorum aequalis ſummae extremorum.

DEM. Generalis proportionum arithmeticarum forma eſt $A - A + d = B - B + d$, vel $A + d - A = B + d - B$. Utroque caſu ſumma terminorum mediorum eſt $A + B + d$, et ſumma extremorum $A + B + d$, quae ſummae aequales ſunt.

COR. Si igitur proportio arithmetica fuerit continua, duplum termini medii aequalis eſt ſummae extremorum.

§. 35.

Datis tribus numeris A, B, C, invenire terminum quartum arithmetice proportionalem.

SOL. Addantur terminus ſecundus B et tertius C, atque a ſumma ſubtrahatur terminus primus A, quod prodit, erit terminus quartus proportionalis quaeſitus.

DEM. In omni proportione arithmetica $A - B = C - D$ eſt $A + D = B + C$ (§. *praec.*). Proinde terminus quartus $D = B + C - A$ (§. 21. *Geom.*).

COR. Si igitur fuerit $A + D = B + C$, erit $A - B = C - D$. Sit enim $A - B = C - X$, erit $X = B + C - A$. Ex hyp. vero eſt $A + D = B + C$, et proinde $D = B + C - A$; hinc $X = D$ et $A - B = C - D$.

§. 36.

Datis duobus numeris A et C invenire terminum m-dium arithmetice proportionalem.

SOL. Addantur numeri dati A et C, atque ſum-ma inventa dividatur per numerum 2, quotus erit te-minus medius quaeſitus.

DEM. Quia in proportione arithmetica contin- $A - B = B - C$ eſt $A + C = 2B$, erit terminus medi

$$B = \frac{A + C}{2}.$$

§. 37.

Datis tribus numeris A, B, C, invenire quartu proportionalem.

SOL. 1. Numerus ſecundus B dividatur per pr-mum A, et quod prodit multiplicetur per numerum Factum $\frac{B}{A} \times C$ erit numerus quartus proportio-lis quaeſitus.

2. Vel numerus ſecundus B multiplicetur per te-tium C. Factum $B \times C$ dividatur per numerum pr-mum A et quotus $\frac{B \times C}{A}$ erit numerus quartus pr-portionalis quaeſitus.

DEM. Quotus $\frac{B}{A}$ eſt exponens rationis nume A ad numerum B. Sit $\frac{B}{A} = m$, erit $B = mA$ et A $mA = C : mC$ (§. 26. Cor. 4.) proinde numerus quart proportionalis quaeſitus erit $mC = \frac{B}{A} \times C$. Q vero eſt $B : \frac{B}{A} = B \times C : \frac{B}{A} \times C$ (§. 17.)

proi

proinde $B : B \times C = \frac{B}{A} : \frac{B}{A} \times C$, atque praeterea $B : B \times C = \frac{B}{A} : \frac{B \times C}{A}$ (§. 17.), erit $\frac{B}{A} : \frac{B}{A} \times C = \frac{B}{A} : \frac{B \times C}{A}$ (§. 170. *Geom.*) ideoque $\frac{B}{A} \times C = \frac{B \times C}{A}$.

COR. I. In omni proportione geometrica $A : B = C : D$ eſt factum terminorum mediorum aequale facto extremorum. Quia enim eſt $D = \frac{B \times C}{A}$, utrinque per numerum A multiplicando fit $A \times D = B \times C$ (§. 15.).

COR. II. Viciſſim quoque ſi fuerit $D = \frac{B \times C}{A}$, erit $A : B = C : D$. Sit enim X quarta proportionalis ad quanta A, B, et C, ut vera ſit proportio $A : B = C : X$, erit $X = \frac{B \times C}{A}$. Sed $D = \frac{B \times C}{A}$ (*hyp.*) ideo $X = D$ (§. 13. Cor. 2. *Geom.*) et $A : B = C : D$ (§. 169. *Geom.*).

COR. III. Proinde ſi fuerit $A \times D = B \times C$, erit $A : B = C : D$. Quia enim $A \times D = B \times C$ (*hyp.*) erit $D = \frac{B \times C}{A}$ (§. 15.) id eſt $A : B = C : D$.

§. 38.

Si A et B fuerint duo quanta incommenſurabilia, impoſſibile eſt, ut B ex A tanquam numerus ex unitate poſſit componi. Atque ſi fingatur aliquis numerus, qui quantum B ex A tanquam unitate exprimat, is *Numerus Irra-*

Irrationalis vocatur. Reliqui numeri dicuntur *Rationale* Exponens igitur rationis quanti A ad quantum B erit numerus irrationalis, ſi A et B ſunt quanta incommenſurabilia.

COR. Si numerus irrationalis, in quem evadit B, ſi ſumatur pro unitate, ſit *m*, erit hoc quoque caſu 1 : *m* = A : B et B = *m*A (§. 14.). Atque ſi fuerit A : B = C : D, ratio C : D pariter erit irrationalis, et 1 : *m* = C : D (§. 170. *Geom.*) proinde D = *m*C, ita ut hoc quoque caſu forma proportionis generalis ſit A : *m*A = C : *m*C. Ex quo patet, ſolutionem problematis in §. praec. etiam locum habere, licet ratio A : B ſit irrationalis, ſi quidem exponens rationis ſit quarta proportionalis ad quanta A, B, et tertium aliquod quantum quodcunque pro unitate aſſumtum. Atque ſub eadem hypotheſi quoque verum erit, in omni proportione geometrica factum terminorum mediorum aequale eſſe facto extremorum et vice verſa ſi factum aliquod A × D aequale ſit facto B x C, eſſe A : B = C : D.

§. 39.

Si numerus quidam A multiplicetur per ſe ipſum factum A × A dicitur *numerus quadratus*, ſive *Quadratum* ſimpliciter, atque ipſe numerus A *radix hujus quadrati* vocari ſolet. Signum radicis quadratica hoc eſt √ quadrato, cujus radix indicanda, præfigendum.

COR. I. In omni igitur proportione geometrica continua A : B = B : C, quadratum termini medii aequale eſt facto termini primi in tertium.

COR. II. Si radix quadrati ſit numerus integer cum adnexis fractionibus decimalibus; quadratum bis tot loca decimalia adnexa habet, quam ejus radix (§. 24. Cor. 2

COR. III. Quadratum numeri integri eſt numerus integer. Quadratum vero fractionis verae iterum eſt fractio vera.

§. 40.

Numerus quilibet quadratus, cujus radix conſtat duabus partibus utcunque, continet quadratum unius partis

ei

cum duplo facto earum partium, atque quadratum alterius partis.

DEM. Sit A + B radix quadratica, illius quadratum erit $(A + B) \times (A + B)$. Eſt vero $(A + B) \times (A + B) = (A + B) \times A + (A + B) \times B$. Praeterea $(A + B) \times A = A \times A + B \times A$ et $(A + B) \times B = A \times B + B \times B$ (§. 16.). Cum igitur ſit $B \times A = A \times B$, erit $(A + B) \times (A + B) = A \times A + 2A \times B + B \times B$.

§. 41.

Quadratum numeri per notas ſimplices diverſorum ordinum expreſſi conſtat ex quadrato primae a ſiniſtris notae, duplo facto notae primae in ſecundam, quadrato ſecundae, duplo facti ex prima et ſecunda in tertiam, quadrato tertiae, duplo facti ex prima, ſecunda et tertia in quartam etc. ſervatis ubique notarum valoribus.

DEM. Sit numeri A quadratum formandum, atque is numerus concipi poteſt conſtare ex partibus 6 et 7340. Quaeſitum igitur eſt B, quadratum partis 6, tum C, duplum facti ex partibus et quadratum partis reliquae. Illa autem pars iterum in duas alias 7300 et 40 diviſa concipiatur, quare ejus quadratum componetur ex quadrato partis 40 D, ex E duplo facti ex partibus, et ex quadrato partis 7300. Denique quadratum partis 7300 iterum ex quadrato partis 300 F, duplo facti 7000 × 300 G, et ex H quadrato partis 7000 conſtat, unde patet propoſitum.

		73	46	A
			36	B
	8	80	80	C
	□	73	40	
		16	00	D
	58	40	00	E
	□	73	00	
	9	00	00	F
4	20	00	00	G
49	00	00	00	H
53	96	37	16	

COR. Ex demonſtratione patet, diviſo quadrato in claſſes binarum notarum a dextra verſus ſiniſtram, quadra-

drata omnium notarum radicis incipere a primis ear
claſſium notis, facta vero ex partibus a ſecundis.

§. 42.

Dati quadrati radicem reperire.

SOL. Reperienda ſit radix numeri 53963716. I
vidatur numerus datus in claſſes binarum notarum in

```
      53|96|37|16|  7346
      49| ..| ..| ..|H
   14) 4 96| ..| ..|
       4 2 | ..| ..|G
         9 | ..| ..|F
  146)  67 37| ..|
         58 4| ..|E
           16| ..|D
  1468)   881 16|
          880 8 |C
             36 |B
   -------------|
          881 16|
   -------------|
                O
```

piendo a dextris, ita ut ſiniſtima claſſis unam tant
notam contineat, ſi notarum numerus impar fue
Hoc facto a ſiniſtris verſus dextras procedendo ex ab
Pythagorico excerpatur quadratum 49, notis prim
claſſis immediate minus, notetur ejus radix 7 atque q
dratum 49 a notis primae claſſis ſubtrahatur, notato r
ſiduo 4. Ad hoc reſiduum referatur prima nota cl
proximae, ut fiat 49, quod diviſum per duplum radi
repertae dabit quotum 3, qui erit radicis pars alte
Augeatur claſſis ſecunda nota 6, ut jam ſit 496, ab
que ſubtrahatur factum ex quoto 3 per diviſorem 1
quod eſt 42, ut et quadratum quoti 9. Notetur re
duum 67, atque ad illud referatur prima nota 3 cl
proximae ut jam ſit 673. Dividatur 673 per duplam p

ri

tem radicis hactenus repertam, quae eſt 146, et quotus 4 erit pars radicis tertia. Factum ex quoto in diviſorem 584, ut et quoti quadratum 16 ſubtrahatur a numero 6737, qui eſt dividendus cum ſequente nota conjunctus, et notetur reſiduum 881, ad quod denuo referri debet prima nota claſſis ſequentis, ut fiat 8811, ieque numerus dividatur per duplam partem radicis jam repertam, ut habeatur pars ſequens radicis. Eodem modo procedendo habentur partes radicis reliquae, quod patet, comparando ſchema hujus calculi cum ſchemate calculi *ſphi praec.*

COR. I. Si datus numerus non fuerit quadratus numeri cujusdam integri, per easdem operationes reperietur numerus integer, cujus quadratum numero eo proxime minus ſit.

COR. II. Poteſt hoc caſu quoque inveniri numerus integer cum adjunctis fractionibus decimalibus, cujus quadratum a numero dato deficit differentia quantumvis parva; ſi numero dato adjiciantur tot claſſes binarum cifrarum, quot opus eſſe videtur, et operatio inſtituatur, ut in problemate, a radice vero reſecentur tot numeri pro fractionibus decimalibus, quot ſunt claſſes cifrarum adjectarum.

§. 43.

Si fuerit numerus integer n *major numero integro* m, *atque numerus* n *absque reſiduo non diviſibilis per numerum* m, *ut* $\frac{n}{m}$ *ſit fractio ſpuria, aequipollens numero integro cum adjuncta fractione vera; quadratum hujus numeri iterum erit fractio aequipollens numero quodam integro cum adjuncta fractione vera.*

DEM. Si quadratum $\frac{n \times n}{m \times m}$ aequale foret numero quodam integro *p*, eſſet $\frac{n \times n}{m} = pm =$ nume-

ro

ro quodam integro. Ergo $n \times n$ debet eſſe talis num
rus, qui dividi poteſt per numerum m absque reſidu
Sed numerus m non dividit numerum n absque reſidi
per hypotheſin. Proinde numerus m ipſe debet eſſe pr
ductum ex duobus factoribus r et s, quorum unus r d
videret unum factorem n absque reſiduo et alter
alterum factorem n. Sed unus factor n cu
altero idem eſt. Proinde uterque factor r et
tam unum, quam alterum factorem n divideret,
ideo ipſe numerus m eſſet factor ipſius n eundem ab

que reſiduo dividens *contra hyp.* Ergo quadratum $\frac{n \times n}{m \times n}$
non poteſt eſſe numerus integer.

COR. I. Si igitur radix quadratica numeri integri no
ſit numerus integer, eadem nec fractio vera erit, ne
integer cum adjuncta fractione vera. Si enim radix fi
ret fractio vera, etiam quadratum eſſet fractio vera:
autem radix foret integer cum adjuncta fractione ver
etiam quadratum ejusmodi numerus foret, utrumqu
contra hyp.

COR. II. Radix quadratica non aliud eſt, niſi termin
medius geometrice proportionalis inter unitatem et qu
dratum. Si igitur quadratum ſit numerus integ
cujus radix non eſt numerus integer, radix quadra
tica unitati illi incommenſurabilis eſt, et proinde ipſ
eſt numerus irrationalis.

§. 44.

Datis duobus numeris A et C invenire medium geom
trice proportionalem.

SOL. Dati numeri A et C multiplicentur in ſe in
vicem, atque ex producto extrahatur radix quadratic
quae erit medius proportionalis quaeſitus.

DEM. In omni proportione geometrica continu
$A : B = B : C$ eſt $A \times C = B \times B$. Proinde $B =$
$\sqrt{(A \times C)}$.

§. 45

§. 45.

Si dentur duae proportiones geometricae, atque termini earum ordine in ſe invicem multiplicentur vel dividantur; facta vel quoti iterum erunt in proportione geometrica.

DEM. Proportionum A : *n*A = B : *n*B et C : *m*C = D : *m*D terminis ordine in ſeinvicem multiplicatis habetur A × C : *n* × *m* × A × C = B × D : *n* × *m* × B × D; diviſis vero terminis hiſce ordine in ſe invicem, invenitur $\frac{A}{C} : \frac{n}{m} \times \frac{A}{C} = \frac{B}{D} : \frac{n}{m} \times \frac{B}{D}$. Utramque harum proportionum veram eſſe, patet ex (§. 38. Cor.).

COR. Hinc et plurium, quam duarum proportionum terminis ordine in ſe invicem multiplicatis, facta erunt in proportione geometrica.

§. 46.

Rationem geometricam, quae ex quotcunque aliis in numeris datis K : L, M : N, O : P, etc, componitur, per duos numeros exprimere.

SOL. Multiplicentur datarum rationum termini ordine in ſe invicem, et facta erunt in ratione compoſita ex rationibus datis.

DEM. Si fuerit A : B = K : L
B : C = M : N
C : D = O : P, etc.

erit ratio A : D compoſita ex rationibus K : L, M : N, O : P, atque A × B × C : B × C × D = K × M × O : L × N × P (§. *praec.* Cor.). Eſt vero A × B × C : B × C × D = A : D (§. 17.). Ideo A : D = K × M × O : L × N × P.

§. 47.

Series eſt numerorum communi quadam lege ſeſe conſequentium multitudo. Series in qua numerus quilibet antecedens ad conſequentem eſt in eadem ratione

 arith-

arithmetica dicitur *Series* ſive *Progreſſio Arithmetica.* S
ries in qua antecedens numerus quilibet ad conſequ
tem eſt in eadem ratione geometrica vocari ſolet *Se*
ſ. *Progreſſio Geometrica.*

COR. I. Series arithmetica datur dato quocunque t
minorum ipſius cum denominatore rationis ad ter
num proximum. Addendo enim hunc denominator
ad terminum datum vel ſubtrahendo, ſeries utrinq
quousque lubet, poteſt continuari.

COR. II. Series gemetrica datur, dato quolibet i
terminorum et ratione ejus ad proximum. Tum e
terminus dato proximus poteſt reperiri et hoc rep
proximus *per* §. 37.

§. 48.

Quodſi ſeries numerorum A, B, C, D, E, F,
H, I, etc. fuerit geometrica, et ratio A : B conci
tur ut ſimplex, erit A : C duplicata A : D triplicata,
: E quadruplicata, A : F quintuplicata, etc, rationis A:
atque tum concipi poteſt numerus exprimens, quom
ratio numeri A ad terminum quemcunque progreſſi
ex ſimplici A : B eſt compoſita. Dependet autem m
gnitudo hujus numeri a ratione, quae ut ſimplex co
pitur. Nimirum, ſi ratio A : B concipiatur ut ſimpl
erit is numerus in ratione A : C, = 2, in ratione
D, = 3, in ratione A : E, = 4, etc. Si vero ratio
D concipiatur ut ſimplex, erit is numerus in ratione
G, = 2, et in ratione A : K = 3, ſicque porro. U
de ſub hac hypotheſi numerus exprimens, quomodo
tio A : B, vel A : F, vel alia ſimilis ex ſimplici A
componatur, non poteſt eſſe, niſi numerus fractus. V
catur autem is numerus exprimens, quomodo ratio q
cunque geometrica, ut A : F, ex aſſumta ſimplici co
ponatur *Logarithmus illius rationis* A : F atque ſi A f
rit unitas, logarithmus rationis 1 : F etiam dici ſolet
garithmus numeri F.

CO

COR. I. Sumatur progreſſio numerorum geometrica quaecunque ab unitate incipiens e. gr. ea 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000, etc. atque ratio 1 : 10 concipiatur ut ſimplex, erit Logarithmus unitatis = 0, Logarithmus numeri 10 = 1, Logarithmus numeri 100 = 2, Logarithmus numeri 1000 = 3, numeri 10000 = 4, numeri 100000 = 5, etc. Jam vero ultro patet, Logarithmum numeri integri denario minoris, fore numerum fractum unitate minorem, logarithmum numeri centenario minoris et denario majoris fore numerum fractum unitate majorem ſed numero 2 minorem et ita porro.

COR. II. Quodſi non ratio 1 : 10 ſed alia atque alia concipiatur ut ſimplex, etiam pro eodem numero invenitur Logarithmus alius atque alius, ita, ut totum ſyſtema logarithmicum dependeat a magnitudine numeri, cujus logarithmus eſt unitas, qui eam ob cauſſam vocatur *Baſis Logarithmica*.

COR. III. Quodſi ſeriei geometricae P,

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. etc.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8,

ratione quacunque, ut 1 : 2, pro ſimplici aſſumta, adſcribantur logarithmi L, logarithmus rationis quorumvis terminorum ſeriei P invenitur ſubtracto logarithmo prioris termini a logarithmo poſterioris. Sic erit e. g. *l.* (8 : 128) = *l.* 128. − *l.* 8 = 4.

§. 49.

Tabulae Logarithmorum vulgares exhibent logarithmos numerorum naturalium ab 1 ad 10000 pro baſe 10 computatos. Calculus vero, cujus ope ſunt reperti, non in Matheſi Elementari ſed Sublimiori eſt explicandus. A Briggrio quidem et Vlacquio conſtructae ſunt tabulae calculo admodum operoſo, poſtea autem in Matheſi Sublimiori eximia inventa ſunt compendia, quorum ope logarithmi multo expeditius ſupputari poſſunt.

Notari autem meretur, ex §. 48. Cor. 1. quod logari
mi omnium numerorum praeter eos, qui in ſerie g
metrica 1. 10. 100. 10000. etc. occurrunt, in fracti
bus decimalibus exhibeantur, adeoque numerorum i
1 et 10 contentorum logarithmi intra limites 0 et 1,
merorum inter 10 et 100 contentorum logarithmi i
limites 1 et 2, et ita porro, contineantur, ita ut lo
rithmus quisque conſtet ex numero integro et fracti
decimali. Ille numerus integer vocari ſolet *Charact
ſtica*; fractio decimalis autem *Mantiſſa*.

COR. Characteriſtica igitur unitate deficit a num
notarum ſimplicium, quibus conſtat numerus logari
mo reſpondens.

§. 50.

In eodem ſyſtemate logarithmico rationes, quorum lo garithmi aequales ſunt, ipſae ſunt aequales: rationes, inaequales ſunt, quorum logarithmi ſunt inaequales.

DEM. 1) Sint Logarithmi rationum A : E et
K aequales, e. g. = 4, et inter A et E pariter atque
ter F et K quatuor intercedent rationes ſimplices,
omnes erunt aequales. Adeo ſi fuerint rationes A :
B : C, C : D, D : E illae, quae inter A et E inte
dunt, atque rationes inter F et K intercedentes iſtae
G, G : H, H : I, I : K; erit

$$A : B = F : G$$
$$B : C = G : H$$
$$C : D = H : I$$
$$D : E = I : K,$$

unde ſequitur eſſe A : E = F : K (§. 175. Cor. Geom

2) Si praeterea logarithmus rationis A : E fueri
et logarithmus rationis F : I fuerit 3; ratio A : E com
nitur ex quatuor rationibus aequalibus, ratio autem
tantum ex tribus, quae ſigillatim ſumtae prioribus ſi
latim ſumtis aequales ſunt. Ideo rationes A : E et
aequales eſſe nequeunt.

C

COR. In eodem igitur ſyſtemate logarithmico aequalium rationum aequales ſunt logarithmi. Si enim inaequales fuerint logarithmi, etiam rationes eſſent inaequales, *contra hyp.*

§. 51.

Datis logarithmis trium numerorum invenire logarithmum numeri quarti proportionalis.

SOL. Dati ſint logarithmi lA, lB, lC numerorum A, B, C, ſitque reperiundus numeri quarti proportionalis D logarithmus: dico fore $lB + lC - lA = lD$.

DEM. Logarithmus rationis A : B eſt $lB - lA$ et logarithmus rationis C : D eſt $lD - lC$ (§. 48. Cor. 3.) Ponitur autem $A : B = C : D$, ideo eſt $lB - lA = lD - lC$ (§. 50. Cor.) et proinde $lB + lC - lA = lD$ (§. 21. ...m.).

COR. I. Si fuerit $A = 1$, erit $lA = 0$, ideoque $lD = lB + lC$. Tum vero eſt $D = B \times C$: ideo logarithmus facti invenitur, ſi factorum logarithmi addantur.

COR. II. Deinde ſi fuerit $B = 1$, eſt $lB = 0$, atque adeo $lD = lC - lA$. Sed ſub hac hypotheſi eſt $D = \frac{C}{A}$, proinde logarithmus quoti invenitur ſubtractione logarithmi diviſoris a logarithmo dividendi.

COR. III. Quia eſt quadratum numeri $A = A \times A$ et $l\,A \times A = lA + lA = 2\,lA$; erit logarithmus quadrati duplum logarithmi radicis, hincque logarithmus radicis logarithmi quadrati dimidium. Patet ex his modus ope logarithmorum extrahendi radicem quadraticam.

§. 52.

Invenire numerum reſpondentem logarithmo, qui in tabulis accuratus non occurrit, non autem major eſt iis, qui in tabulis continentur.

SOL. Logarithmus proxime minor dato ſubtrahatur a proxime majore, itemque a logarithmo dato. Tum vero inferatur: Ut differentia prior ad differen-

tiam ſecundam, ſic 1 ád numerum inveniendum et numero, qui logarithmo proximo minori in tabulis reſpondet addendum, ut habeatur numerus *proxime verus*, cui logarithmus datus reſpondet. Dico numerus *proxime verus*, differentiae enim logarithmorum differentiis numerorum exacte proportionales non ſunt; ad praxin tamen, ubi errores haud ſenſibiles negliguntur, methodus tradita ſufficit.

EXEMPLUM. Quaerendus ſit numerus reſpondens logar. 2, 1758774, erit logarithmus proxime major 2, 1760913, et proxime minor 2, 1731863, proinde differentia prima 29050, et differentia ſecunda 26911; praeterea numerus logarithmo proxime minori reſpondens 149, ideo concludendo 29050 : 26911 = 1, 0000 : 0, 9264, erit numerus quaeſitus 149, 9264.

COR. Patet ſimul ex ſolutione problematis, qualis operatio ſit inſtituenda, ſi quaeratur logarithmus conveniens numero integro cum adnexis fractionibus decimalibus, ſi major non ſit numero 10000. Quaerendus nimirum eſt logarithmus integri illius ex tabulis, isque a logarithmo proxime majore ſubtrahendus, tum vero eſt concludendum: ut 1 ad fractionem decimalem integro dato adnexam, ita differentia logarithmorum inventa ad numerum logarithmo minori addendum, ut prodeat logarithmus quaeſitus proxime verus.

EXEMPLUM. Quaerendus ſit logarithmus reſpondens numero 149, 9264, erit numeri integri 149 logarithmus 2, 1731863, et logarithmus proxime major 2, 1760913, differentia eorum 29050, hinc inferendo, 1 : 0, 9264 = 29050 : 26911, erit logarithmus quaeſitus 2, 1758774.

Tabularum logarithmicarum ampliſſimus uſus in contrahendis calculis numericis ex his ſatis elucet, eo quod ex ejusmodi tabulis non ſolum dati cujuscunque numeri logarithmus, ſed etiam cujuscunque logarithmi propoſiti numerus conveniens reperiri poteſt. Verum tamen

tamen in praxi propoſitus eſſe poteſt numerus major numero 10000, cujus proinde logarithmus in Tabulis Vulgaribus non proſtat: prodit quoque, calculo propoſiti problematis ad finem perducto, ſaepius logarithmus numero 4 major, cujus logarithmi numerus conveniens pariter in Tabulis vulgaribus fruſtra quaeritur. Haec eſt ratio, cur duo adhuc ſolvenda ſunt problemata, quae ſequuntur.

§. 53.

Invenire logarithmum convenientem numero majori iis, qui in tabulis vulgaribus exhibentur.

SOL. 1. Quaerantur numeri maximo tabulae minores, quorum in ſe invicem multiplicatione numerus propoſitus produci poteſt. Logarithmi ejusmodi factorum ex Tabula excerpti addantur, et ſumma erit logarithmus quaeſitus. (§. 51. Cor. 1.) Sit e. gr. propoſitus numerus 36480, qui oritur ex multiplicatione numerorum 304 et 120, quaeratur logarithmus utriusque, eorum ſumma eſt logarithmus numeri 36480.

2. Si propoſitus numerus ita in factores integros non eſt reſolubilis vel non cogniti ſint factores eum producentes, dividatur is per numerum 10, vel 100, vel 1000, vel 10000 etc., ut prodeat quotus numero 10000 minor, qui erit numerus integer cum adjunctis fractionibus decimalibus. Quaeratur hujus numeri logarithmus, (§. 52. Cor.) logarithmo invento addatur logarithmus illius numeri, per quem facta eſt diviſio, et ſumma erit logarithmus quaeſitus (§. 51. Cor.).

EXEMPLVM. Quaerendus ſit logarithmus numeri 3567894. Quotus, qui prodit hoc numero per 1000 diviſo, erit 3567, 894. Hujus numeri logarithmus ſecundum §. 52. Cor. quaeſitus eſt 3, 5524118. Si igitur eidem addatur logarithmus numeri 1000, qui eſt 3, habetur 6, 5524118 pro logarithmo quaeſito.

§. 54.

Invenire numerum convenientem logarithmo majori quos Tabulae Vulgares exhibent.

SOL. A logarithmo dato ſubtrahatur logarith numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, etc. donec linquatur logarithmus ultimo tabulae minor. Qua tur numerus ei reſpondens per §. 52, qui multiplic per numerum, cujus logarithmus a dato fuit ſubtra dabit numerum quaeſitum (§. 51. Cor. 1.).

EXEMPLVM. Quaerendus ſit numerus reſp dens logarithmo 7, 7589982. Subtrahatur ab eo lo rithmus numeri 10000, qui eſt 4, erit reſiduum 3, 7589 Numerus, qui huic logarithmo reſpondet, eſt 5741, ideoque numerus quaeſitus eſt 5741, 14 × 10000 = 57411400.

SECTIO V.

BREVIS INTRODVCTIO IN ARITHME- TICAM PRACTICAM.

§. 55.

Explicatae huc usque ſunt operationes praecipuae, q bus ex datis numeris et datis relationibus eorund ad incognitos, ipſi incogniti inveniuntur. Sed ipſas lationes quantorum ad alia quanta docere, non eſt Ari metici. Repetendae ſunt iſtae relationes quantorum aliis diſciplinis, in quibus quaelibet quantitatum gen ſpeciatim exponuntur; atque ab eo demum applicari teſt Arithmetica, qui easdem diſciplinas habet perſ ctas. Multae tamen harum rationum et ſolo ſenſu co muni perſpiciuntur: aliae ab arbitrio hominum pende

...la pactis et legibus, quae omnia cum negotiis in vita ...muni expediendis adeo connexa ſunt, ut a nemine ſe-...ſe ignorentur. Atque hujusmodi exempla quaedam ad-...imus, praeguſtum quendam adplicationis Arithmeti-...ae Matheſeos Studioſis ſuppeditaturi.

§. 56.

Quantum aliquod per numerum expreſſum per alium exprimere numerum, cujus unitates ab unitatibus prioris numeri diverſae ſint.

SOL. Cognitum eſſe debet, quot unitates prioris ...eris aliquem numerum unitatum poſteriorum produ-...ant, ex quo ratio ipſarum unitatum colligitur. Sint ...itates A et B, atque ſi 5A efficiant 7B erit 5A = 7B, ...eſt A : B = 7 : 5 (§.37. Cor. 3.). Deinde ſi dentur 36A ...et quaeratur quot unitates B ſint ipſis 36A aequales; nu-...merus quaeſitus unitatum B denotetur littera x et habe-...bitur 36A = xB, unde fit B : A = 36 : x, proinde $x =$ $\frac{A}{B} \times 36 = \frac{7}{5} \times 36$, quia $\frac{A}{B} = \frac{7}{5}$ *per antecedentia.*

EXEMPLA.

Si pecuniae ſumma expreſſa per numerum thalero-...rum, qui in ea continetur, exprimenda ſit per numerum ...florenorum; cognitum eſſe debet, quot thaleri efficiant ...determinatum numerum florenorum. Conſtat vero, 2 ...thaleros efficere 3 florenos, ergo eſt 2 *th.* = 3 *fl.*, et *th.* : *fl.* = 3 : 2. Si igitur quaeratur, quot floreni ſint 31 ...thaleri, ponatur 31 *th.* = x *fl.*, erit *fl* : *th* = 31 : x, et ...cum *fl* : *th* = 2 : 3 inferatur 2 : 3 = 31 : $\frac{31 \times 3}{2} = \frac{93}{2}$ $= 46\frac{1}{2}$ *fl.*

Si dentur 136 *fl.* et quaeratur, quot efficiant thale-...ros, ponatur 136 *fl.* = x *th.* eritque *th* : *fl* = 136 : x, id eſt ...eſt 3 : 2 = 136 : $\frac{136 \times 2}{3} = \frac{272}{3} = 90\frac{2}{3}$ *fl.*

 Dantur

Dantur 397 groſſi, quaeritur quot ſint thaleri Cum 24 groſſi efficiant 1 thalerum, erit primo $24\,gr =$ $1\,th$, proinde $gr : th = 1 : 24$. Deinde ponatur $397\,gr$ $= x\,th$, et erit $th : gr = 397 : x$, ergo inſeratur $24 :$

$$= 397 : \frac{397}{24} = 16\,\frac{13}{24}\text{ thal.}$$

Dantur 238 thaleri, quaeritur, quot ſint groſſi. Ponatur $238\,th = x\,gr$, erit $gr : th = 238 : x$. Inſeratur itaque $1 : 24 = 238 : 238 \times 24 = 5712$ groſſ.

Ita quoque in aliis ſimilibus caſibus procedendum eſt. Si v. g. quantitas ſecundum aliquam menſuram menſurata exprimenda ſit per aliam menſuram a priori diverſam; cognita eſſe debet ratio menſurarum. Sit p pes pariſinus et r pes rhenanus, erit $p : r = 14400 : 13913$. Si igitur aliqua longitudo menſurata ſit ſecundum pedem pariſinum, et horum pedum contineat 328, quaeraturque, quot contineat pedes rhenanos; ponatur $328\,p =$ $x\,r$ erit $r : p = 328 : x$, vel $13913 : 14400 = 328 : x =$ $\frac{14400 \times 328}{13913}$. Atque ex his alii caſus hiſce ſimiles ſatis promte reſolvuntur.

§. 57.

Data fractione invenire aliam datae aequalem, cujus denominator datus eſt.

SOL. Fractionum aequalium denominatores ac numeratores eandem habent rationem. Si igitur datae fractioni alia aequalis reperienda ſit, cujus denominator eſt datus; inſeratur ut denominator fractionis datae ad ipſius numeratorem, ſic denominator datus ad numeratorem quaeſitum.

EXEMPLA.

Dantur $\frac{3}{5}$ thal. quaeritur, quot ſint groſſi. Cum thalerum dividamus in 24 groſſos, inſeratur $5 : 3 = 24 :$

$$\frac{24 \times 3}{5} = \frac{72}{5} = 14\tfrac{2}{5}\text{ groſſ.}$$

Dan

Dantur $\frac{2}{5}$ groſſ. quaeritur quot ſint obuli. Groſſum dividimus in 12 obulos. Ideo erit 5 : 2 = 12 : $\frac{12 \times 2}{5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$ obul.

Dantur $\frac{7}{8}$ fl. quaeritur, quot ſint aſſes. Aſſes 32 faciunt unum florenum. Proinde 8 : 7 = 32 : $\frac{32 \times 7}{8} = \frac{224}{8} = 28$ aſſ.

§. 58.

Numeros ex diverſis unitatibus compoſitos addere.

SOL. Addantur numeri dati unitatum earundem; atque ſumma exprimatur in maximis, quantum fieri poteſt, unitatibus.

	Thal.	Groſſ.	Obul.	
	15	23	9	add.
	100	17	5	
	17	21	0	
	5	6	2	
Summa	137	67	16	
ſive	139	20	4	

§. 59.

A numero ex unitatibus diverſorum generum compoſito ſubtrahere alium ejusmodi numerum.

SOL. Subtrahantur omnes ejusmodi numeri partes ab omnibus partibus alterius cum prioribus homogeneis; atque ſi aliqua partium numeri minoris parte reſpondente numeri majoris major ſit, reſolvatur aliqua unitatum proxime majorum in unitates minores.

	Thal.	Groſſ.	Obul.	
	18	3	9	
	7	18	5	ſubtr.
Different.	10	9	4	

§. 60.

§. 60.

Numerum ex diverſis unitatibus compoſitum per ali multiplicare.

SOL. Multiplicentur partes numeri dati per datu multiplicatorem ſeorſim. Tum vero factum exprim tur per unitates, quantum fieri poteſt, maximas.

	Thal.	Groſſ.	Obul.
	5	16	7
			8 Multipl.
Factum	40	128	56
vel	45	12	8

§. 61.

Datum numerum, qui ex unitatibus diverſorum gen rum componitur, per alium dividere.

SOL. 1. Quaelibet pars numeri ſeorſim dividat per datum diviſorem, incipiendo ab unitatibus maxim Atque ſi alicubi maneat reſiduum, fractiones, quae inven untur, reducantur ad alias ipſis aequales ejusmodi den minationum, ut unitatibus proxime minoribus poſſi addi, ſicque pergendo diviſio per partes inſtitui.

	Thal.	Groſſ.	Obul.
	19	13	2
divid.	5		
Quotus	$3\frac{4}{5}$	$2\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
vel	3	12	$2\frac{4}{5}$

2) Ad evitandas fractiones praeſtat fere, p omnes dividendi partes in minimas unitates reſolv Tum enim inſtituta diviſione iterum quotus exprimi teſt in maximis, quantum fieri poteſt, unitatibus.

Sic 19 thal. 13 groſſ. 2 obul. = 5630 obulis.

Eſt vero $\frac{5630}{5}$ obul. = 1126 obul. = 3th. 12gr. 2⅘

§.

§. 62.

Regula trium directa.

Iis quae huc uſque expoſita ſunt perſpectis facili negotio reſolvi poſſunt omnia iſta problemata, quae eo reducuntur, ut datis tribus numeris reperiendus ſit quartus proportionalis. Sic pretia rerum earundem plerumque ſunt uti ipſae rerum quantitates; mercedes operarum ſunt vel uti tempora, quibus laboratum eſt, vel uti quantitates operum. Ideo per regulam proportionum ex datis duarum mercium quantitatibus, et pretio unius reperietur pretium alterius; ex duobus ſimilium mercium pretiis, et quantitate unius habebitur quantitas alterius, et ſic in reliquis. Ita ſi alicujus mercis 5 ℔ veneant thaleris 13, et quaeratur quanti veneant 17 ℔, reperietur quartus proportionalis $\frac{17 \times 13}{5} = 44\frac{1}{5}$ numerus thalerorum quaeſitus.

Effectus a ſimilibus cauſſis temporibus aequalibus praeſtiti ſunt uti cauſſae, et ſi cauſſae ſint aequales, uti tempora. Si 17 operarii transferant aquae menſuras 39 certo aliquo tempore, quaeraturque, quot requirantur operarii ad menſuras 87 eodem tempore per eandem viam transferandas, invenietur eorum numerus $\frac{87 \times 17}{39} = 37$ vel 38. Si aliquis operariorum numerus transferat aquae menſuras 87 tempore 2 horarum, et quaeratur, quot aquae menſuras idem operarum numerus per eandem viam transferre poſſit tempore 5 horarum, fiet quartus proportionalis $\frac{87 \times 5}{2} = 217\frac{1}{2}$, qui erit numerus menſurarum quaeſitus.

§. 63.

Regula trium inverſa.

Saepius termini proportionis, quam problema continet, homologi ſibi invicem ita non reſpondent, ut

ut v. g. merces et pretia, qui caſus obtinet, quan duae quantitates ſunt ut duae aliae reciproce. Arit metica ipſa non tradit regulas ex quibus dijudicari p teſt, ubi iſte caſus habeat locum, ſed ex notionibus r rum et earum relationibus ipſis aliunde cognitis ill dijudicari debet. Sic ſi effectus ſunt iidem, tempo quibus praeſtantur, ſunt uti cauſſae inverſe. Si v. 6 homines transferant 100 menſuras aquae tempore minutorum ut eadem quantitas tempore 2 minutoru transferatur, requirentur bis ſex ſive 12 homines. P haec ſolventur hujus generis quaeſtiones omnes.

Homines 30 diebus 40 effodiunt certam te quantitatem. Quaeritur, quot homines eandem qu titatem terrae effodiunt, tempore 15 dierum. Infe

$$15 : 40 = 30 : \frac{40 \times 30}{15} = 80,$$ qui erit numerus hom num quaeſitus.

§. 64.

Regula quinque.

Proponi quoque ſaepius poſſunt ejusmodi probl mata, ubi ex datis quinque numeris reperiundus eſt ſe tus ita quidem, ut quintus ſit ad ſextum in ratione co poſita ex rationibus primi ad ſecundum et tertii ad qu tum. Sic uſurae aequalium ſortium ſunt in ratione te porum, quibus ſortes illae commodatae ſunt: ſi ve tempora ſunt aequalia, inaequalium ſortium uſurae ſi uti ſortes. Proinde horum computus per *regulam tri* abſolvitur. Si autem tempora et ſortes ſint inaequal ac verbi gratia 330 thaleri tempore 17 menſium de uſuram 15 thalerorum, quaeraturque, quantum uſu redditurі ſint 500 thaleri commodati 30 menſibus; p natur uſura, quam 500 thaleri reddunt tempore 17 me ſium aequalis n et uſura quaeſita ſit x, erit

$$330 \text{ } thal. : 500 \text{ } thal. = 15 : n$$
$$17 \text{ } menſ. : 30 \text{ } menſ. = n : x$$

Uſu

Uſura igitur data 15 eſt ad uſuram quaeſitam x in ratione compoſita ex rationibus ſortium et temporum, et proinde haec ratio aequalis eſt rationi factorum ex ſortibus per tempora, atque in hoc caſu $330 \times 17 : 500 \times 30 = 15 : x$, et proinde $x = \frac{500 \times 30 \times 15}{330 \times 17} = 40 \frac{20}{187}$ Thal.

Simili modo plura hujus generis problemata ſolvuntur. Homines 36 transferunt aquae menſuras 80 tempore 25 minutorum. Quaeritur quot aquae menſuras transferre poſſint homines 50 tempore 40 minutorum. Ponatur aquae quantitas, quam homines 36 poſſint transferre tempore 40 m. aequalis u, et quaeſita quantitas ſit x, erit iterum

$$25 \text{ min.} : 40 \text{ min.} = 80 \text{ menſ.} : u$$
$$36 : 50 = u : x$$

erit $x = \frac{40 \times 50 \times 80}{25 \times 36} = 177\frac{7}{9}$.

§. 65.

Regula ſeptem, novem, etc.

Sic quoque ſaepenumero ex datis ſeptem numeris reperiendus eſt octavus, ut ſit ſeptimus ad octavum in ratione compoſita ex rationibus primi ad ſecundum, tertii ad quartum, quinti ad ſextum; vel ex datis novem numeris decimus, ut ſit nonus ad decimum in ratione compoſita ex rationibus primi ad ſecundum, tertii ad quartum, quinti ad ſextum, ſeptimi ad octavum, et ita porro. Quando vero ejusmodi caſus locum habeant, id ex conditionibus problematis eruendum eſt, et ipſis rationibus datorum quartorum aliunde cognitis. Sit propoſita haec quaeſtio. Sors 3300 imperialium reddit tempore 18 menſium uſuram 180. Sors autem 5000 commodata eſt 30 menſibus ſimili uſura. Hujus ſortis uſura cum ſolvenda eſt, arbitrio judicis vel pacto reducitur eo, ut pro 5 imperialibus tantum ſolvendi ſint 4. Quod

Quod ita ſolvitur, intra fratrem et ſororem ſic divid-
dum eſt, ut ex tribus partibus duas accipiat frater. Qu-
ritur pars fratris?

Inferendum eſt $3300 : 5000 = 180 : m$
$18 : 30 = m : n$
$5 : 4 = n : p$
$3 : 2 = p : q$,

erit m uſura ſortis 5000 tempore 18 menſium, n uſu-
ejusdem ſortis tempore 30 menſium' p uſura haec ſe-
tentia judicis vel pacto ad minorem quantitatem red-
cta, q pars ejus, quam accipit frater. Erit igitur q

$$\frac{5000 \times 30 \times 4 \times 2 \times 180}{3300 \times 18 \times 5 \times 3} = 242\frac{14}{33}.$$ Ad abbrevia-

dum calculum conducit, ſi numerus q primum in m-
dum fracti ita ſcribatur, ut factum eſt. Quolibet enim
factorum, qui in numeratore hujus fracti inſunt, p-
aliquem numerum diviſo, qui et aliquem eorum facto-
rum dividit, qui ſunt in denominatore, multiplicatio-
nes contrahentur, fientque ſaepe admodum faciles. Si
diviſis 5000 et 3300 per 100, inveniuntur numeri 5-
et 33, deinde diviſis 50 et 5 per 5, prodeunt 10 et
Porro diviſis 180 et 18 per 18, iterum habentur 10 et
Denique diviſis 30 et 3 per 3 pari ratione invenitur 1
et 1. His factis fit $\frac{10 \times 10 \times 4 \times 2 \times 10}{33 \times 1 \times 1 \times 1} = \frac{8000}{33} =$
$242\frac{14}{33}$.

§. 66.

Poſſunt in ejusmodi problematum ſolutionibus qu-
libet analogiae, ut in praecedenti caſu $3300 : 5000 =$
$180 : m$ ſeparatim ſolvi et quaeri numerus m. Sicque
deinde ſolvenda erit analogia $18 : 30 = m : n$, et quae-
rendus erit numerus n, ſicque porro. Verum methodus
in antecedentibus deſcripta brevior eſt, et ideo huic prae-
fertur. Vocatur a quibusdam haec methodus *regula cate-*
nari

naria (*die kettenregel*). Atque haec methodus in multis aliis caſibus magno cum fructu applicatur, veluti in comparatione monetarum, menſurarum, ponderum etc, quarum ratio datur mediantibus aliis hujus generis quantitatibus. Sic ex datis 16 groſſ = 1 fl. 3 fl = 2 thal, 11 thal. = 4 duc. quaeritur quot groſſi efficiant ducatum? Erit

groſſ : flor. = 1 : 16
flor : thal = 2 : 3
thal : ducat = 4 : 11

Proinde groſſ : ducat = 1 × 2 × 4 : 16 × 3 × 11 = 8 : 528 = 1 : 66, et ideo 66 groſſ = 1 ducat.

§. 67.

Datum numerum quendam a ſecare in aliquot partes, ita ut iſtae partes ſint inter ſe in data ratione.

SOL. Secandus ſit numerus a verbi gratia in 3 partes x, y, z, ita quidem, ut hi numeri x, y, z, ſint inter ſe, ut numeri dati f, g, h. Inferendum eſt $f : g = x : y$, proinde $f+g : g = x+y : y$ et $f+g : x+y = g : y$. Praeterea eſt $y : z = g : h$ (*per cond. probl.*) vel $g : y = h : z$, ergo $f+g : x+y = h : z$ vel $f+g : h = x+y : z$, et $f+g+h : h = x+y+z : z$, $f+g+h : x+y+z = h : z = g : y = f : x$. Cum igitur ſit $x+y+z = a$ (*per cond. probl.*) fiet $\frac{a \times h}{f+g+h} = z$; $\frac{a \times g}{f+g+h} = y$; $\frac{a \times f}{f+g+h} = x$.

Si numerus a in plures hujusmodi partes datae rationis ſit dividendus, haec ratiocinia continuari poſſe, ultro patet. Si in duas ſecandus ſit partes x et y, quarum ratio data eſt $f : g$, eſt $z = 0$, eſt $h = 0$.

§. 68.

Regula ſocietatis.

Ad praxes problematis §phi praec. multi referri poſſunt quaeſtiones in vita communi obviae. Sic lucrum

 cujus-

cujusque ſociorum, qui ad ſortem quandam ali contulerunt partem, eſt ad lucrum alterius, ſicut bent ſummae collatae.

Tres mercatores A, B et C contulerunt ad ſo quandam ſequentes ſummas

A	1000 thal.	=	f
B	700	=	g
C	900	=	h
	2600	=	$f+g+h$

Lucrum eſt 1500 thal $= x + y + z = a$; erit

$$2600 : 1500 = 1000 : x$$

$$\text{vel} \quad 26 : 15 = 1000 : x = \frac{15 \times 500}{13} = 576$$

$$= 700 : y = \frac{153 \times 350}{13} = 403$$

$$= 900 : z = \frac{15 \times 450}{13} = 510$$

§. 69.

Regula alligationis.

Alia praxis eſt, ubi quaeritur, quot materiae plicis in datam maſſam compoſitam ingrediatur, tio ſimplicium data fuerit. Sic ad *pulverem pyrium* ponendum ad 1 ℔ *nitri* requiruntur 6 L. *carbonum* et *Sulphuris*. Quaeritur quot cujuslibet materiae ſimp requirantur ad 1000 ℔ *Pulveris pyrii*. Erunt rationes carbonum et ſulphuris datae 32 L, 6 L, 4 L, vel quod eſt 16, 3, 2, ut ſit $f = 16$, $g = 3$, $h = 2$, et $f + g$ $= 21$, erit $x = \frac{16000}{21} = 261 \frac{19}{21}$, $y = \frac{300}{21}$ $= 142 \frac{6}{7}$, $z = \frac{2000}{21} = 95 \frac{5}{21}$.

§. 7

§. 70.

Regula falſi.

Sunt et alii modi ejusmodi problemata ſolvendi, nimirum ex falſo pro arbitrio aſſumto eruitur verum quaeſitum. Atque hic quidem tribus praeceptis omne negotium abſolvitur. Primum eſt, ut is numerus ponatur verus eſſe, qui aptus videtur. Secundum, ut examinetur, an actu fuerit is, quem problema poſtulat. Tertium, ut ope regulae proportionum eruatur verum. In exemplo res clara erit.

Sit numerus 100 dividendus in tres partes, quarum prima ſit tripla ſecundae, ſecunda dupla tertiae. Supponatur illa minima pars eſſe 2, ſecunda erit 6, tertia 12. Eſt vero $2 + 6 + 12 = 20$. Falſa igitur eſt ſuppoſitio. Iam vero concluditur $20 : 2 = 100 : \frac{100 \times 2}{20} = 10 =$ parti minimae, cujus triplum eſt 30, hujusque duplum 60, eſt vero $60 + 30 + 10 = 100$.

Sunt et modi, quibus ex duobus ſuppoſitis falſis verum eruitur, quibus explicandis hic non immoror, cum analyſis mathematica ejusmodi problemata multo expeditius ſolvat, quam ipſam eodem hoc libro explico. Qui pluribus exemplis expoſitas methodos ſibi reddere cupit familiares, ſcriptores practicos conſulat.

CALCVLVS EXTENSORVM.

SECTIO I.

DE MENSVRATIONE LONGITVDINVM ET ANGVLORVM PLANORVM RECTILINEORVM, VVLGO DE LONGIMETRIA ET TRIGONOMETRIA PLANA.

§. 1.

Menſurare quantum eſt determinata quadam ipſius parte pro unitate aſſumta quantum illud ut numerum exprimere. Pars quanti pro unitate aſſumta *Menſura* dicitur.

COR. Menſura quanto menſurando debet eſſe homogenea. Quantum enim ex heterogeneo tanquam parti componi nequit.

§. 2.

Menſurare lineam rectam.

SOL. Aſſumatur aliqua ex menſuris receptis, *Pes*, isque ſupra menſurandam lineam aliquoties applicetur. Dividatur pes in decem partes aequales nomine *Pollicum*, et pollex unus iterum in decem partes aliquae *Lineae* dicuntur. Linea in decem *Scrupulos primos* diviſa concipitur, et horum quilibet in decem *Scrupulos ſecundos*, ſicque porro, quod tamen raro opus eſt, quia ſcrupuli primi jam fiunt rectae adeo parvae, ut in praxi plerumque negligi queant. Conſtructa ejusmodi menſurarum ſcala linea recta data circino capta, eandem ſupe

ſuper ſcalam adplicando, ſatis accurate menſurabitur. Practici ſcriptores varias explicare ſolent methodos, quibus admodum exactae conſtrui poſſunt ſcalae, qui eum in finem conſulendi ſunt.

COR. I. Sunto pede pro unitate pollices fiunt partes unitatis decimae, lineae centeſimae, ſcrupuli primi milleſimae, ſecundi decies milleſimae et ita porro, unde numerus 5, 8 3 7 ſub hac hypotheſi notabit 5 pedes cum 8 pollicibus, 3 lineis et 7 ſcrupulis.

COR. II. Pro longioribus lineis menſurandis ſumi ſolet recta decem pedes longa *Decempeda* dicta pro unitate, quo caſu numerus 5, 8 3 7 notabit 5 decempedas cum 8 pedibus 3 pollicibus et 7 lineis. Ex quibus facile perſpicitur, quomodo legendus ſit ejuſmodi numerus, ſi pollex vel linea etc. pro unitate fuerit aſſumta.

§. 3.

Menſura alii menſurae *analoga* eſt ſcala menſurarum eodem modo diviſa, quo diviſa eſt alia, quae menſura eſſe ſupponitur, etſi partes magnitudine differant. Si menſura analoga minor ſit menſura, cui analoga eſt; *Menſura analoga minuta* vocatur.

COR. Menſura alteri analoga facile conſtruitur, aſſumta recta quacunque, quae pedi analoga ſit, eaque in decem partes diviſa pro pollicibus, deciesque repetita pro decempedis, etc. Tum vero rectae A et B atque C et D, ſi A et C atque B et D ſecundum menſuras analogas menſuratae per eosdem exprimantur numeros, proportionales ſunt; et, ſi proportionales ſint A, B, C, D, atque B et D ſecundum menſuras analogas menſuratae per eundem exprimantur numerum, etiam A et C per eundem numerum exprimentur, ſi A eadem cum B et C eadem cum D menſura menſuretur (§. 178. Cor. 2. et 13. Cor. Geom.).

§. 4.

Menſurare angulum planum rectilineum.

SOL. Pro menſura anguli plani angulus quid
planus determinatae magnitudinis eſt eligendus. Q
nam eligatur, perinde eſt. Solet hunc in finem ſu
ma quatuor rectorum pro unitate aſſumi et in menſur
do angulo explorari, quot partium earum, quae ſu
mam hanc conſtituunt, in angulo dato contineant
Ex §.220. Cor. 3. *Geom.* notum eſt, quod, ſi ex ap
anguli ut centro deſcribatur circulus radio magnitudi
arbitrariae, quatuor anguli recti ſint ad datum angulu
uti tota peripheria ad arcum inter crura dati anguli i
terceptum. Proinde ſi peripheria ſumatur pro unit
in menſurando arcu, hic arcus per eundem exprim
numerum, in quem evaderet angulus, ſi quatuor re
ſumantur pro unitate. Omnis igitur labor eo redit,
peripheriam circuli in determinatum numerum parti
aequalium diviſam cogitemus. Atque in praxi recept
eſt, ut dividatur in 360 partes aequales, quae *gra*
vocantur. Gradus quilibet dividitur in 60 partes aequ
les, *minuta prima* dictas; minutum primum iterum
dividitur in 60 *minuta ſecunda*, et quodlibet eorum
60 *minuta tertia*, ſicque porro pergendo, quoad op
eſt. Gradus denotari ſolent, impoſito eorum nume
ſigno (o) minuta prima impoſito (I) ſecunda impoſ
(II) et ita porro.

F351. Jam peripheria in ſuos gradus et ſi neceſſe ſit in m
nuta quoque diviſa, adplicetur angulo menſurando A
ita, ut C centrum peripheriae cadat in anguli apicem,
punctum peripheriae, a quo numeri graduum incipiu
in unum anguli crurium ut AC: quo facto numeratis gr
dibus minutis primis etc. inter crura interceptis menſ
ra anguli habetur. Si anguli crura in plano ducta ſin
inſtrumento admodum ſimplici res perficitur, quale f
gura exhibet, quodque *Inſtrumentum Transportatoriu*
appellari ſolet, pronti et hujus inſtrumenti ope faci
ad datum punctum conſtruitur angulus, cujus menſu
in numeris data eſt.

COR.

COR. I. Menſura anguli duobus rectis aequalis eſt arcus 180 graduum, et menſura anguli recti arcus 90 graduum. Hinc ſumma omnium angulorum trianguli plani rectilinei in numeris expreſſa efficit 180 gradus, et datis in ejusmodi triangulo ſumma duorum angulorum in numeris per calculum invenitur tertius, ſi datus numerus in gradibus et minutis primis expreſſus ſubtrahatur ab 180 gradibus, vel 179 gradibus et 60 minutis primis.

COR. II. In triangulo aequilatero menſura cujuslibet anguli eſt 60°.

SCHOL. Haec de menſuratione rectarum et angulorum planorum rectilineorum immediata menſurae adplicatione inſtituenda. In praxi ejusmodi menſurae immediata applicatio raro in poteſtate eſt, atque tum magnitudo rectarum linearum et angulorum planorum rectilineorum in numeris expreſſa ex aliis rectis vel angulis datis, quibus immediate adplicari poteſt menſura, elicienda eſt per calculum magno in practicis commodo, cujus regulae jam erunt explicandae.

§. 5.

Quodſi ſupra diametrum AC centro D deſcriptus F. 206. ſit ſemicirculus ABC, atque in peripheria ſumatur punctum F quodcunque, a quo ducta ſit ad AC perpendicularis FG, haec FG dicitur *ſinus* arcuum AF, FC, in quas peripheriam dividit, ut et angulorum ADF, FDC ſuper hac recta AC ſibi contiguorum, qui ab his arcubus menſurantur. Recta FH perpendicularis ad radium DB vel ei aequalis GD, quae eſt ſinus complementi anguli ADF ad angulum rectum, vocatur *Coſinus* ejusdem anguli ADF, et AG hujus anguli *Sinus verſus*.

§. 6.

Quodſi ex radii DA puncto extremo A erigatur perpendicularis, ea circulum ABC in puncto A tanget (§. 256. Geom.). Producta autem recta DF donec iſtam tangentem in E ſecet, AE dicitur *tangens arcus* AF ut et

anguli ADF, cujus menſura eſt arcus AF. Ducta praete ea NB ad radium DB perdendiculari eaque producta, de nec ipſam DE in N ſecet, haec BN, quae eſt tange anguli BDN complementi ipſius ADF ad angulum rectum *cotangens arcus* AF vel *anguli* ADF vocari ſolet. Den que DE dicitur hujus arcus vel anguli *ſecans* DN ver ejus *coſecans*.

§. 7.

Ejusdem anguli ſinus, coſinus, ſinus verſi, tangente f. 206. *cotangentes, ſecantes, coſecantes, ad diverſos radios relat ſunt inter ſe ut illi radii.*

DEM. Dati anguli ADF menſurae radiis AD = FD et KD = LD deſcriptae ſint AF et KL, ſinus ad di verſos radios relati FG, LM, coſinus GD, MD, ſinu verſi AG, KM, tangentes AE, KI, ſecantes ED, ID Jam rectae EA, FG, IK, LM ſunt parallelae (§. 89. Cor 1. *Geom.*) proinde FD : LD = FG : LM = GD : MD (§ 202. Cor. 3. *Geom.*). Set et FD : LD = AD : KD proin de AD — GD : KD — MD = AD : KD, id eſt AG : KM = AD : KD. Praeterea eſt AD : KD = AE : KI = ED FD. De contagentibus et coſecantibus idem exinde pa tet, quia ſunt tangentes et ſecantes complementi dat anguli ADF.

COR. Ratio igitur radii ad ſinum, tangentem, et qua ſunt reliqua, ejusdem anguli eadem prodit, quicunqu ſumatur radius, ideoque eadem ratio ad quemvis angu lum ut per lineas rectas ita et per numeros quantumvi adcuratos exhiberi poteſt.

SCHOL. Supputatae ſunt iſtae rationes pro omnibu angulis, qui gradibus atque minutis primis menſurantu in Tabulis, quae *Canonem Sinuum et Tangentium* eff ciunt, calculo ſatis laborioſo, quem hic exponere ni mis longum foret, quippe qui potius ſpectat ad Mathe ſin ſubliniorem, quam elementarem.

§. 8.

In triangulo rectangulo EAD eſt hypothenuſa ED a

quen

quemcunque cathetorum EA, ut Radius ad ſinum anguli EDA illi catheto oppoſiti; et unus cathetorum AD eſt ad alterum AE ut radius ad tangentem anguli EDA poſteriori catheto oppoſiti.

DEM. Radio quocunque DL = DK deſcribatur anguli EAD menſura KL, ejus ſinus LM et tangens KI, atque patet, eſſe ED : EA = LD : LM = R : *ſin.* EDA; et AD : AE = KD : KI = R : *tang.* EDA.

COR. Si in triangulo ABC ex apice anguli B ducatur F.205. BD ad latus oppoſitum AC, ſi opus ſit productum, perpendicularis, erit BD : DA = R : *tang.* DBA, et BD : DC = R : *tang.* DBC, ideo eſt DA : DC = *tang.* DBA : *tang.* DBC.

§. 9.

In omni triangulo ABC duo quaevis latera AB, BC ſunt inter ſe, ut ſinus angulorum iis oppoſitorum ad eundem radium relati.

DEM. Quodſi ex B ad latus oppoſitum AC, ſi opus ſit, productum demiſſa ſit perpendicularis BD, erit AB : BD = R : *ſin.* A, et BC : BD = R : *ſin.* C (§. 8.). Proinde AB : BC = *ſin.* C : *ſin.* A (§. 193. Cor. 1. *Geom.*).

§. 10.

Datis in triangulo plano rectilineo ABC duobus angulis A, B, et uno latere AB in numeris, invenire latera reliqua per calculum.

SOL. Datis duobus angulis A et B in numeris ſimul habetur menſura anguli tertii C (§. 4. Cor.). Deinde inferatur *ſin.* C : *ſin.* A = AB : BC (§. 9.). Cujus analogiae, cum terminus tertius ſit datus in numeris, et terminus primus cum ſecundo habeantur in canone ſinuum et tangentium, per calculum invenitur quartus BC ex §. 37. *Ar.* Invento ſic latere BC porro inferatur *ſin.* A : *ſin.* B = BC : AC, et per ſimilem calculum invenietur menſura lateris AC.

Cum in Canone ſinuum et tangentium radius pro unitate ſumtus concipiatur in partes 10000000 diviſus,

atque ideo numeri harum partium, quibus conſtant ſinus et tangentes arcuum vel angulorum ſint admodum prolixi; multiplicatio et diviſio in *ſol. probl.* inſtituenda, ut habeatur terminus quartus proportionalis, fit nimis operoſa. Ad hunc calculum et alios huic ſimiles abbreviandos computati ſunt *logarithmi* ſinuum et tangentium in Tabulis vulgaribus, qui ſinubus et tangentibus e regione adſcripti ſunt, quorum uſus in ſolvendis hujusmodi problematibus ex §. 51. ſeq. *Ar.* perſpicitur.

EXEMPLVM. Sit angulus A = 53° 24ʹ, B = 60° 18ʹ, eritque A + B = 113° 42ʹ, et C = 66°, 18ʹ. Praeterea ſit latus AB = 171ʹ: quaerendum ſit latus BC per calculum ope logarithmorum. Quia eſt *ſin.* C : *ſin.* A = AB : BC, erit *l. ſin.* A + *l.* AB — *l. ſin.* C = *l.* BC. Logarithmis igitur trium terminorum datorum ex Canone Vulgari excerptis calculus ita erit inſtituendus.

$$\begin{aligned} l.\,\text{ſin.}\,A &= 9,\,9046168 \\ l.\,AB &= 2,\,2329961 \\ \hline l.\,\text{ſin.}\,A + l.\,AB &= 12,\,1376129 \\ l.\,\text{ſin.}\,C &= 9,\,9617355 \\ \hline l.\,\text{ſin.}\,A + l.\,AB - l.\,\text{ſin.}\,C &= 2,\,1758774 \end{aligned}$$

= *l.* BC. Logarithmus inventus in Canone vulgari accuratus non occurrit. Invenitur nimirum 2, 1760913 = *l.* 150 juſto major, et praecedens 2, 1731863 = *l.* 149 juſto minor; quare numerus menſuram lateris BC exprimens major eſt, quam 149ʹ ſed minor quam 150ʹ, quod indicio eſt, latus illud praeter 149ʹ aliquot pollices, lineas ſcrupula etc. continere, quae minutiae in praxi ſaepe negligi poſſunt, ſi tamen deſiderentur, inveniri poſſunt ex problemate, quod ſolutum eſt §. 52. *Ar.*

§. 11.

Datis in triangulo ABC uno angulo A et praeterea duobus lateribus AB et BC angulum datum A non comprehendentibus, invenire latus tertium AC.

SOL

SOL. Generatim anguli omnes trianguli ante debent eſſe cogniti, quam latera inveſtigari poſſunt. Quaeri igitur debet angulus C dato lateri AB oppoſitus, quod fit, concludendo BC : AB = ſA : ſC (§. 9.) et calculo ope logarithmorum inſtituendo ſecundum praecepta §phi 10. Invento angulo C ſimul innoteſcit magnitudo anguli B, quare porro inferendo ſ. A : ſ. B = BC : AC, invenitur latus quaeſitum. Ex §. 86. *cum Cor. Geom.* notum eſt, datis angulo A, et lateribus AB et BC eum non comprehendentibus non determinari triangulum unicum, ſed indifferenter duo triangula diverſa, niſi latus BC angulo dato A oppoſitum majus ſit latere AB angulo A adjacente, vel ſaltem triangulum ſit rectangulum, in quo latus AB dato angulo adjacens eſt hypothenuſa. Idem et calculum hujus problematis reddit dubium, ſi latus BC latere AB minus eſt. Poteſt enim hoc caſu angulus C indifferenter acutus vel obtuſus eſſe, quia ſ. C per calculum inventus ad hunc aeque ad illum pertinet. (*conf.* §. 86. Cor. 1. *Geom.*) niſi inveniatur ſC = 10000000, quo caſu angulus C eſt rectus. F. 201.

§. 12.

Datis in triangulo aequicruro ABC tribus lateribus ſigillatim in numeris, invenire ejus angulos.

SOL. Ex apice anguli A baſi oppoſiti demittatur AD ad baſin BC perpendicularis, quae baſin biſecabit et triangulum dividet in duo triangula apud D rectangula et aequalia (§. 94. Cor. 2. *Geom.*). Dantur ideo in quolibet horum triangulorum ut ABD latera AB et BD praeter angulum rectum D, ex quibus datis inveniuntur reliqui hujus trianguli anguli per *Sol.* §*phi praec.* Eſt vero B = C, quare ſimul omnes trianguli aequicruri ABC anguli ſunt cogniti. F. 352.

§. 13.

Datis in triangulo ſcaleno ABC omnibus lateribus ſigillatim in numeris invenire ejus angulos.

SOL.

207.
F. 157. SOL. Ex apice anguli A lateri maximo oppoſi tanquam centro, radio AC, quod laterum minimu eſt, deſcribatur circulus. Producatur AB donec occu rat peripheriae apud E, ducaturque AD, erit ADC tria gulum aequicrurum latus AC et angulum C cum dat ABC communem habens, qui angulus invenitur, ſi co gnita ſit menſura baſis DC, ſecundum praecepta §pl *praec.* Invenitur autem DC ſequentem in modum ar gumentando. Ex §. 203. *Geom.* conſtat, eſſe BC : B $=$ BF : BD, hinc reperitur BD ex §. 37. *Ar.* vel ope lo garithmorum, ſi data ſint BC, BE, BF in numeris. S BC eſt unum datorum laterum trianguli ABC, BE $=$ B $+$ AC et BF $=$ BA $-$ AC. Proinde quoque BE et B ſunt data. Denique reperta BD, eſt DC $=$ BC $-$ BD Quaeratur jam angulus C ex §. *praec.* Tum vero reli qui anguli inveniuntur per *Sol.* §. 10.

§. 14.

Si ſemiſummae duorum quantorum inaequalium addi tur eorundem ſemidifferentia, invenitur quantum maju ſi vero a ſemiſumma ſubtrahatur ſemidifferentia, quod pr dit, eſt quantum minus.

DEM. Sit A quantum majus, B vero quantu minus, horumque quantorum differentia $=$ D, erit A $-$ B $=$ D, et A $=$ B $+$ D. Addatur utrinque B, ut fi A $+$ B $=$ 2B $+$ D, deinde dividatur utrinque per 2 eritque $\frac{A+B}{2} = \frac{2B+D}{2} = B + \frac{D}{2}$. Ex qu porro fluit, ſi utrinque addatur $\frac{D}{2}$, eſſe $\frac{A+B}{2} +$ $\frac{D}{2} = B + \frac{D}{2} + \frac{D}{2} = B + D = A$, ſi ver utrinque ſubtrahatur $\frac{D}{2}$, eſſe $\frac{A+B}{2} - \frac{D}{2} = B$ $\frac{D}{2} - \frac{D}{2} = B$.

§.

§. 15.

Si A et B denotent duos arcus ejusdem circuli dimidia peripheria minores, vel angulos, qui ab iis arcubus menſurantur, atque tang. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ *denotet tangentem dimidiae eorum ſummae pariter ac* tang. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ *tangentem dimidiae differentiae eorum arcuum vel angulorum, erit* tang. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$: tang. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = ($ſin. A + ſin. B$)$: $($ſin. A − ſin. B$)$. fig 208

DEM. Dimidia ſumma arcuum A et B eſt vel minor quadrante, vel major. Si *prius*, in circulo centro C, radio CD deſcripto ſit $DE = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ et $EF = EG = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$. Ducantur radii FC et EC atque producatur FG, donec radium CD productum ſecet in puncto I. Hoc facto erit CE ſecans chordam GF in puncto H ipſi perpendicularis (§. 140. Cor. 6. *Geom.*) et proinde in triangulo ICF eſt HI : (HF = HG) = *tang.* ICH : *tang.* HCF = *tang.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$: *tang.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Deinde arcus $DG = DE - EG = (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) - (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = B$, (§. 14.) ideo GM = *ſin.* B. Praeterea arcus $DF = DE + EF = (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) + (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = A$, (§. 14.) proinde FN = *ſin.* A. Quare ſi per punctum G ducatur recta diametro DP parallela, ſecans FN in K, erit FK = *ſin.* A − *ſin.* B. Eſt vero GF : GH = 2 : 1 = FK : HL, ergo HL = $\frac{1}{2}$*ſin.* A − $\frac{1}{2}$*ſin.* B, ideoque HO = HL + GM = $\frac{1}{2}$*ſin.* A − $\frac{1}{2}$*ſin.* B + *ſin.* B = $\frac{1}{2}$*ſin.* A + $\frac{1}{2}$*ſin.* B. Denique eſt HI : GH = HO : HL, proinde *tang* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$: *tang.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ = ($\frac{1}{2}$*ſin.* A + $\frac{1}{2}$*ſin.* B) : ($\frac{1}{2}$*ſin.* A − $\frac{1}{2}$*ſin.* B) = (*ſin.* A + *ſin.* B) : (*ſin.* A − *ſin.* B).

Sit *poſterius*, atque vocetur arcus major B minor vero A, et ponatur $PE = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$, EF vero vel $EG = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$. Jam hoc quoque caſu eſt IH : (HF = HG) = *tang.* $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$: *tang.* $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Eſt vero $PG = PE + EG = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = B$ (§. 14.) ideoque GM = *ſin.* B. Praeterea $PF = PE - EF = (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) - (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A) = A$, proinde FN = *ſin.* A; ideo

et

et in hoc caſu eſt *tang.* $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$: *tang.* $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$
(*ſin.* A + *ſin.* B) : (*ſin.* A + *ſin.* B).

§. 16.

Datis in triangulo ABC *duobus lateribus* AC *et* BC *a angulo* C *ab hiſce lateribus comprehenſo, invenire angu reliquos ut et latus tertium* AB.

f. 105

SOL. 1. Dato angulo C ſimul datur ſumma re quorum $B + A = 180° - C$, et hujus dimidium $\frac{1}{2}B$ $\frac{1}{2}A$. Inferatur $AC + BC : AC - BC =$ *tang.* $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}$: *tang.* $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Reperta hoc modo per calcul jam ſatis cognitum dimidia angulorum quaeſitorum d ferentia erit angulus major $B = (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) + (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}$ et minor $A = (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) - (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$ (§. 14.). De de inveſtigabitur latus AB per *ſol.* §*phi* 10.

DEM. In triangulo ABC eſt AC : CB = *ſin.* B : *ſin.* A (§. 10.) ideo AC + CB : CB = (*ſin.* B + *ſin.* A *ſin* A, vel AC + CB : (*ſin.* B + *ſin.* A) = CB : *ſin.* Praeterea AC − CB : CB = (*ſin.* B − *ſin.* A) : *ſin.* A, AC − CB : (*ſin.* B − *ſin.* A) = CB : *ſin* A proinde AC CB : (*ſin.* B + *ſin.* A) = AC − CB : (*ſin.* B − *ſin* A) AC + CB : AC − CB : *ſin.* B + *ſin.* A) : (*ſin.* B − *ſin.* ſed eſt (*ſin.* B + *ſin.* A) : (*ſin.* B − *ſin.* A) = *tang.* $(\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}A)$: *tang.* $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$, ergo et AC + CB : AC − = *tang.* $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$: *tang.* $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$.

SOL. 2. Si triangulum datum fuerit rectangulu ut ABD, et angulus datus D rectus, quilibet angulor acutorum ut A ſeparatim calculo breviori inveniri teſt, ſi dati ſint catheti AD, et BD, inferendo AD : = R : *tang.* A (§. 8.). Invento autem angulo A mul inventus eſt B ejus complementum ad angul rectum.

§. 16.

Invenire rationem diametri circuli ad peripheriam numeris proxime veris.

F. 109 SOL. Radius circuli AB diviſus concipiatur in pa tes 10000000, uti in Canone ſinuum et tangentium fieri

let. Inſcribatur circulo polygonum regulare 1080 laterum, ac totidem laterum polygonum circulo circumſcribatur. Sint dimidia polygonorum latera DE et CA, eritque angulus DBA 10 minutorum, DE ſinus ejus anguli, CA vero ejus tangens. Jam in Tabulis ſinuum invenitur DE = 29089 radii partium, et totidem quoque partium invenitur CA, ita ut CA a DE non differat unica radii parte 10000000ma. Proinde latus polygoni inſcripti = 2DE = 58178, et ejus peripheria = 58178 × 1080 = 62832240. Idem numerus etiam quam proxime exprimit peripheriam polygoni circumſcripti, unde tanto magis peripheria circuli erit 62832240 radii partium. Eſt igitur radii duplum ſive diameter ad peripheriam, ut 2, 0000000 ad 6, 2832240 ſive ut 1, 0000000 ad 3, 1416120, aut in numeris minoribus = 1, 00 : 3, 14, = 100 : 314.

COR. I. Hinc data diametro in numeris reperitur peripheria, et data in numeris peripheria reperitur diameter ex §. 37. *Ar.*

COR. II. Dato arcu circuli quocunque per gradus et minuta expreſſo datur ejus ratio ad peripheriam nimirum 360°. Dato igitur radio et arcu in gradibus expreſſo, reperta peripheria *per Cor.* 1. invenitur longitudo arcus in menſura conſueta expreſſa ex §. 37. *Ar.*

COR. III. Si peripheria fuerit 360 partium, diameter erit partium 114, et radius partium 57. Data igitur longitudine arcus et numero graduum quem continet facile reperitur radii longitudo.

§. 17.

Circuli dati peripheriam in datum numerum partium aequalium dividere.

SOL. Dividatur numerus 360° per datum partium numerum. Ad centrum circuli dati inſtrumenti tranſportatorii ope conſtruatur angulus, cujus menſura eſt notus jam inventus. Crura hujus anguli determinabunt unam ex partibus peripheriae aliquotis, quae deſiderantur

tur. Reliqua diviſio peragitur auferendo arcum inve
tum a peripheria quoties fieri poteſt *per* §. 142. Co
Geom.

COR. Hinc habetur ſolutio mechanica problema
§phi 150. et 158. *Geom.*

§. 18.

Invenire menſuram anguli cujuscunque polygoni re
laris per calculum.

SOL. Numerus 360° dividatur per numerum l
terum polygoni dati et quotus ſubtrahatur ab 180°, d
ferentia, quae prodit, eſt menſura quaeſita. Si e
n denotet numerum laterum, eſt angulus polygoni $=$

$$-\frac{4R}{n}$$ (§. 202. Cor. 2. *Geom.*).

§. 19.

Super data recta AB *conſtruere polygonum regul*
f. 210 *dati numeri laterum.*

SOL. Quaeratur angulus polygoni dati numeri l
terum (§. 18.). Dimidium ejus ope inſtrumenti tra
portatorii ſtatuatur ad utrumque extremum A et B la
ris AB dati, atque crura AC et BC producantur, do
ſeſe apud C ſecent, quod tandem fiet (§. 96. *Geom*
Centro C radio CA vel CB deſcribatur circulus, qui e
is cui polygonum deſideratum eſt inſcribendum, lat
AB peripheriae toties applicando, quoties fieri poteſt.

DEM. Eſt angulus CAB $=$ CBA dimidius an
lus polygoni, proinde CAB $+$ CBA ipſe angulus po
goni $= 2R - \frac{4R}{n}$ (§. 202. Cor. 2. *Geom.*). Quia praeter

$$CAB + CBA + C = 2R, \text{ erit } 2R - \frac{4R}{n} + C = 2R;$$

$\frac{4R}{n}$ utrinque addito fit $2R + C = 2R + \frac{4R}{n}$ ad

que C $= \frac{4R}{n}$. Sed menſura anguli, qui eſt $= 4R$, eſt tota circuli peripheria, quae ponatur $= P$, erit menſura anguli C $= \frac{P}{n} =$ arcui AB.

COR. In hexagono triangulum ACB fit aequilaterum, quod igitur ſuper dato quolibet latere facile conſtruitur.

SECTIO II.

DE MENSVRATIONE SVPERFICIERVM ET SOLIDORVM VVLGO DE PLANIMETRIA ET STEREOMETRIA.

§. 20.

Menſurare Parallelogrammum

SOL. Sit menſurandum parallelogrammum P, cujus baſis eſt B et altitudo A. Pro menſura ſumatur quadratum Q, cujus latus eſt aliqua ex menſuris receptis e. g. Pes. Menſuretur baſis B parallelogrammi pariterque ejus altitudo A ex *Pede* pro unitate aſſumta ſitque numerus exprimens baſin $= b$, et numerus exprimens altitudinem $= a$, erit $Q : P = \left\{ \begin{matrix} 1 : b \\ 1 : a \end{matrix} \right\}$ (§. 210. Cor. 1. *Geom.*) vel $Q : P = 1 : a \times b$ (§. 46. *Ar.*). Menſura igitur parallelogrammi habebitur menſurata ejus baſe et altitudine menſura quadam longitudinum recepta, hisque numeris in ſeinvicem multiplicatis; quod prodit, erit area parallelogrammi expreſſa in numeris ex quadrato, con-

R ſtructo

ſtructo ſuper ea longitudinum menſura, ex qua baſis
altitudo exprimuntur, pro unitate aſſumto.

COR. I. Area quadrati habetur, ſi numerus, qui ex
primit ipſius latus, per ſe ipſum multiplicetur, quae ra
tio eſt, cur in Arithmetica numerus, qui ejusmodi mu
tiplicatione alterius numeri perſeipſum invenitur, *nume
rus quadratus* vocatus eſt, et factor in ſeipſum ductus hu
jus numeri *radix quadratica*.

COR. II. Cum pes in decempeda decies contineatur
quadratum pedis in quadrato decempedae centies cont
nebitur, quadratum pollicis in quadrato pedis pari
centies, et ita porro, quod probe notandum eſt in de
terminandis valoribus numerorum, qui figurarum pla
narum areas exprimunt.

§. 21.

Menſura trianguli planum rectilineum.

F. 211. SOL. Datum ſit triangulum ABC, cujus baſis AB
$= b$, et altitudo CD $= a$. Quodſi ſuper eadem ba
conſtructum fuerit parallelogrammum ejusdem altitudi
nis, foret hoc $= a \times b$. Sed triangulum ABC eſt hu
jus dimidium, (§. 115. *Geom.*), ideo eſt ejus area
$\frac{a \times b}{2} = a \times \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \times b$.

COR. I. Ex his ſimul habetur menſura earum figura
rum planarum, quae in Geometria cum triangulis ſu
comparatae. Sic polygoni regularis area erit dimidium
factum ex ejus peripheria in perpendicularem ex centr
circuli cui inſcribi poteſt ad latus. Circuli area eſt dimi
dium factum ex peripheria in radium, et area ſectori
eſt dimidium factum, quod prodit radio per arcum ſe
ctoris multiplicato. Hinc area ſegmenti invenitur, quae
rendo aream ſectoris, qui ab eodem arcu terminatur
deinde vero aream trianguli, qui terminatur iisdem cum
ſectore radiis et ſegmenti chorda; differentia area poſte
rioris a priori eſt quaeſita ſegmenti area.

COR. II

COR. II. Si diameter circuli ſit 100, peripheria *proxime* eſt 314 et area $= 25 \times 314 = 7850$. Ideo eſt circuli area ad quadratum ſuae diametri *proxime* ut 7850 ad 10000, ſive ut 785 ad 1000.

COR. III. Quaelibet figura plana rectilinea menſuratur, ſi dividatur in triangula per lineas diagonales, atque eorum ſigillatim ſumtorum areae quaerantur, quae in ſummam collectae dabunt integrae figurae menſuram.

COR. IV. Priſmatum igitur et pyramidum ſuperficies menſurantur, omnibus figuris planis ea ſolida terminantibus ſeparatim menſuratis, iisque menſuris in ſummam collectis.

COR. V. Priſmatis recti ſuperficies demtis baſibus aequalis eſt rectangulo cujus baſis aequalis eſt peripheriae baſeos ſolidi, et altitudo priſmatis altitudini aequalis (§. 113. Cor. 3. *Geom.*) ideo ſuperficies priſmatis recti demtis baſibus menſuratur multiplicata peripheria baſeos per corporis altitudinem.

COR. VI. Cylindri quoque recti ſuperficies demtis baſibus menſuratur multiplicata peripheria baſeos per altitudinem cylindri. Coni recti ſuperficies eſt dimidium factum ex latere coni in baſeos peripheriam.

COR. VII. Superficies ſphaerae menſuratur, diametro ſphaerae per circuli maximi peripheriam multiplicata. §. 360. *Geom.*

§. 22.

Super data baſe AB *conſtruere triangulum datae areae.*

SOL. Quia ſi trianguli altitudo eſt CD, ejus area eſt $= \frac{1}{2}AB \times CD$; reperietur altitudo trianguli, area data per dimidium baſeos diviſa. Quodſi tum ducatur recta EF baſi AB parallela in diſtantia CD; quodvis triangulum ſuper AB conſtructum, cujus vertex cadit in EF erit datae areae. F. 211.

COR. Si ſuper AB conſtruendum ſit parallelogram-

 mum

mum datae areae, quia hoc, ſi ejus altitudo fuerit CD, e =AB × CD, data area per integram baſin dividenda e ut habeatur altitudo. Si igitur et hoc caſu ducatur l ipſi AB parallela in diſtantia CD, omne parallelogra mum cujus latus baſi AB oppoſitum cadit in paralleli EF, erit areae datae.

§. 23.

Data quacunque figura plana earum, quae in G metria Elementari ſunt conſideratae, invenire quadrati eidem figurae aequale.

SOL. Quaeratur area hujus figurae per calcul Ex numero, qui aream exprimit extrahatur radix qu dratica, quae erit menſura lateris quadrati quaeſiti.

§. 24.

Duobus trianguli rectanguli cathetis per numeros e preſſis invenire numerum exprimentem hypothenuſam, data hypothenuſa et uno cathetorum in numeris, inveni numerum, qui exprimit alterum cathetorum.

SOL. 1. Quaerantur quadrata numerorum dat rum, iisque additis ex ſumma extrahatur radix quadr tica, quae erit hypothenuſa.

2. A quadrato numeri, qui exprimit hypothen ſam, ſubtrahatur quadratum numeri, qui exprimit d tum cathetum: ex differentia eorum quadratorum extr hatur radix quadratica, quae erit lateris quaeſiti menſur

COR. Per eadem invenitur numerus exprimens di metrum circuli, qui aequalis eſt ſummae vel differe tiae duorum datorum ex ſumma nimirum vel different quadratorum ex diametris extrahendo radicem qu draticam, quae erit diameter circuli quaeſiti.

EXEMPLVM. Sit AB = 1, et BC = 1, erit AC = radici quadraticae ex numero 2, quae cum non ſit nu merus integer, nec erit numerus fractus, quare hoc caſ recta AC ex AB vel BC pro unitate aſſumta ut numer exprimi nequit, ideo nec ratio AB : AC numeris expri mi poteſt, quae proinde irrationalis eſt.

§.

§. 25.

Priſma menſurare.

SOL. Pro menſura ſumatur cubus, cujus latus eſt aliqua ex menſuris receptis, e. g. *Pes*, eritque baſis cubi = 1, ut et ejus altitudo = 1. Sit B numerus priſmatis baſin exprimens ſecundum eandem menſuram, et A numerus exprimens ejus altitudinem, ac erit cubus pro menſura ſumtus ad priſma menſurandum, ut 1 × 1 : B × A (§. 329. Cor. 3. *Geom.* coll. §. 46. *Ar.*). Hinc generaliter priſma menſurabitur, ſi numerus exprimens baſin multiplicetur per numerum, qui exprimit altitudinem.

COR. I. Eodem modo ex cubo, cujus latus eſt 1, menſurabitur cylindrus (§. 344. Cor. 3. *Geom.*).

COR. II. Soliditas cubi habetur ſi quadratum numeri, qui exprimit latus cubi, denuo per radicem multiplicetur. Unde ejusmodi numerus, qui prodit, ſi quadratum numeri A cujuscunque multiplicetur per radicem, vocatur *numerus cubicus*, et hujus reſpectu numerus A vocatur *radix cubica.*

COR. III. Cubus, cujus latus eſt pes, millies continetur in cubo, cujus latus eſt decempeda, ac toties etiam continetur cubus, cujus latus eſt pollex, in cubo, cujus latus eſt pes, ſicque porro, quod notandum eſt in legendis numeris, qui exprimunt volumina ſolidorum.

COR. IV. Pyramides et coni menſurantur multiplicando baſin in altitudinis partem tertiam (§. 345. Cor. 5. *Geom.*).

COR. V. Sphaera menſuratur reperto volumine cylindri, cujus baſis circulo ſphaerae maximo et altitudo diametro ſphaerae aequalis eſt, ſumtisque ejus duabus partibus tertiis (§. 350. Cor. 2. *Geom.*).

§. 26.

Dato numero qui exprimit latus cubi cujuscunque AB *invenire latus cubi dupli.*

SOL. Sit BC latus cubi dati. Fiat recta F = 2BC, et quaerantur duae aliae rectae D et E inter BC et F F. 212.

continuae proportionales, i. e. tales, ut ſit BC : D = D : E, et D : E = E : F, atque ideo quatuor rectae BC, D, E, F, ſint in proportione geometrica. Erit igitur ratio BC : F triplicata rationis BC : D. Quodſi vero ex latere D fiat cubus, erit AB ad hunc cubum in ratione triplicata rationis BC : D, proinde ut BC : F, id eſt ut 1 ad 2. Recta igitur D eſt latus cubi quaeſiti.

Geometrica eſſet haec ſolutio eaque ſimul ita univerſalis, ut non tantum latus cubi dupli, ſed *n*tupli cujuscunque inveniatur, ſumendo F = *n*BC; ſi inventio duarum mediarum continue proportionalium eſſet in poteſtate Geometriae Elementaris. Solius autem circuli cum recta combinatione, mediae iſtae proportionales reperiri nequeunt, ſaltem nulla methodus illud efficiendi hucusque cognita eſt, licet multis modis id praeſtari queat, aliis curvis in ſubſidium vocatis, quorum igitur explicatio pertinet ad Geometriam Sublimiorem.

Calculo autem in ſubſidium vocato inveniri poteſt latus cubi dupli vel *n*tupli cujuscunque, ſi numerus, qui exprimit cubi dati volumen, duplicetur, vel multiplicetur per numerum *n* datum, tum vero quaeratur hujus facti, quod prodiit, radix cubica, quae invenietur ope logarithmorum.

Numeri enim cujus radix cubica quaerenda eſt logarithmo per 3 diviſo, habebitur logarithmus radicis. Eſt nimirum cubus numeri cujuscunque $A = A \times A \times A$, ideo ejus logarithmus $= lA + lA + lA = 3lA$, proinde logarithmus cubi eſt triplum logarithmi radicis, et logarithmus radicis logarithmi ipſius cubi pars tertia.

COR. Generatim inveniri poteſt latus cubi, dato ſolido quocunque vel pluribus datis ſimul ſumtis aequale, ex numero qui exprimit volumen ſolidi dati vel ſolidorum datorum ſimul ſumtorum, extrahatur radix cubica. Haec erit latus quaeſitum.

MATHESIS THEORETICA SVBLIMIOR.

ANALYSIS MATHEMATICA.

SECTIO I.

DE

ALGORITHMO SPECIOSO.

§. I.

ELEMENTARIS ARITHMETICA in eo convenit cum SVBLIMIORI, quod utraque ſit ſcientia inveniendi quantitates generatim ſpectatas per calculum. In utraque enim ſcientia datae quantitates ſignis exprimuntur horumque ſignorum ope et certa eorundem inter ſe combinatione ac ſubſtitutione eruitur non ipſa quaeſita quantitas, ſed ſignum quantitatis quaeſitae. Differunt vero iſtae ſcientiae primum in eo, quod ſigna in Arithmetica Elementari ſint determinata et praecipue tantum numeris denotandis accommodata; Sublimior vero Arithmetica, ALGEBRA etiam ſeu ANALYSIS MATHEMATICA vocata ſignis utatur adeo univerſalibus; ut cujuscunque generis magnitudines poſſint denotare. Deinde etiam diſcrimen harum ſcientiarum in eo quaerendum eſt, quod Arithmetica Elementaris problemata ſolvat ſub conditionibus ſpecialibus, et ſimplices tradat operationes in determinatis caſibus actu inſtituendas, ut prodeat ſignum determinatum numeri quaeſiti; Analyſis vero Mathematica modos detegat generales ſolvendi proble-

mata cum arithmetice per computum, eliciendo ſig quae exprimunt, quaenam ex operationibus Arithm tices ſimplicibus et quo ordine in determinatis caſib applicandae ſint, tum geometrice per conſtructio figurarum.

§. 2.

Cum igitur Analyſis Mathematica doceat modu ſignorum ope ex conditionibus problematis invenien ſolutionem problematis generalem; duo ſunt moment ad quae Analyſta debet adtendere. Ac *primo* quidem co ditiones problematis per ſigna apte ſunt exprimenda *Deinde* ex ſignis conditiones problematis exprimentib derivari debet ſignum, quod ſolutionem problemat indicat generalem. Quod attinet ad primum, in qu vis problemate dari debet relatio quantorum datorum quaeſitum, alias enim nulla poſſibilis foret inventio. E preſſio itaque conditionum problematis per ſigna con ſtit in expreſſione relationis quantitatum datarum ad qu ſitam. Quantitates conſiderari poſſunt aut generati aut ſpeciatim, quorum poſterior caſus huc non ſpect ſed prior. Ideo conditiones problematis algebrai exprimuntur, ſi ſigna formentur relationum, q quantitatibus datis et quaeſitis generatim ſpectatis int cedunt.

§. 3.

Relationes, quantitatibus generatim ſpectatis co petentes conſiſtunt in determinata earundem inaequ tate vel aequalitate. Determinatas vero quantita inaequalitates ſatis diſtincte concipere poſſumus per m dum determinatum, quo mediante per operatio arithmeticas fieri poſſunt aequales. Id itaque agend eſt ei, qui problemata per ſigna exprimere cupit, ut primat modum, quo quantitates datae et quaeſitae ce modo per operationes arithmeticas combinatae aequa redduntur aliis vel datis vel quaeſitis certo quoque m do per operationes arithmeticas combinatis. Quae

expreſſio indicans, quomodo combinari debeant quantitates, ut aliis certo modo combinatis ſiant aequales, dicitur *Aequatio Algebraica* ſive *Analytica.* Quodvis igitur problema algebraicum involvit aequationem quandam, ſigno perfecto exprimendam. Indicat autem aequatio, quomodo quantitates combinari debeant, ut aliis certo modo combinatis ſiant aequales. Ideo indigemus primo ſignis quantitatum, deinde ſignis operationum, per quas combinantur.

§. 4.

Pro ſignis quantitatum commode uſurpantur litterae alphabeticae, quarum tamen priores a, b, c, etc. ad datas, poſtrema z, y, x, etc. ad quaeſitas exprimendas uſurpantur. Illæ quarum aequalitas manifeſta eſt, quantitates, eadem littera denotantur, ſique plures fuerint, earum numerus exprimitur ſigno illius numeri litteræ præſcripta. Loco $a+a$ ſcribitur $2a$, loco $a+a+a$, $3a$, loco $a+a+a+a$, $4a$, loco $2a+3a$, $5a$, et ſic in ceteris ſimilibus. Vnitas non ſcribitur, niſi ſola occurrat, vel majoris lucis gratia. Diverſi generis quantitates ac illae, quae ejusdem ſunt generis, ſed inter ſe inaequales vel quorum aequalitas manifeſta non eſt, diverſis denotantur litteris. Signa combinationis quantitatum in aequatione debent eſſe ſigna quatuor operationum Arithmetices ſimplicium, quae in Matheſi Elementari jam uſurpantur. Sic additionis ſignum manet $(+)$ et ſubtractionis ſignum eſt $(-)$, quorum illud per vocem *plus* et hoc per *minus* effertur. Porro factum ex duabus quantitatibus per litteras a, b, ſignatis deſignet ab, vel quoque $a \times b$ ſeu $a.b$, vel a, b. ſi peculiares rationes id ſvadeant. Factum ex tribus quantitatibus a, b, c, vel pluribus modo ſimpliciſſimo ſic exprimitur abc, vel bca, vel acb, utcunque tranſpoſitis litteris. Aliter quoque indicari poteſt ſequentem in modum $a \times bc$, vel $ab \times c$, $ab.c$, $a.bc$, $a \times b \times c$, $a.b.c.$ Si litteris, quae quantitates deſignant, adjuncti ſint numeri, loco $2a \times$

3b ſcribitur 6ab, numeris in ſe invicem multiplicatis, ve ſi numeri illi ob rationes illud ſuadentes diſtinguendi ſint ſaltem initio ſcribuntur ſequentem in modum 2.3.ab Quotus, qui prodit diviſione quanti b per a, hic quoqu ſignatur ita $b : a$ vel $\frac{b}{a}$.

§. 5.

Si factores ſunt aequales ut aa, aaa, compendii gratia unus tantum factor ſcribitur, eique ad apicem verſus dextram adjungitur numerus, qui tot continet unitates, quot factores aequales in ſe invicem multiplicandi ſunt propoſiti. Sic pro aa ponitur a^2, pro aaa ponitur a^3, a^4 pro aaaa, a^3b^2, pro aaabb, $a^4b^3c^2$, pro aaaabbbcc, et ſic in reliquis. Generatim autem facta ex factoribus inter ſe aequalibus quocunque numero orta vocantur *Dignitates* vel *Poteſtates* ejus factoris, ac *Secunda* quidem ſi bis poſitus fuerit ejusmodi factor, *Tertia* ſi ter, *Quarta* ſi quater, et ſic porro. Numerus ad apicem verſus dextram adjectus, qui exprimit, quot ſunt factores inter ſe aequales, quibus dignitas producitur, vocatur *Exponens* ſive *Index illius dignitatis*. Ipſe vero factor reſpectu dignitatis ſuae dicitur *Radix ejus dignitatis*. Ex quo patet, quid ſit radix ſecundae, tertiae, quartae etc. dignitatis numeri cujusdam propoſiti. Signum ſequens ($\surd$) eſt ſignum radicis, cui ſuperſcribitur numerus ordinem radicis indicans. Sic $\sqrt[2]{}$ vel $\surd$ absque numero denotat radicem dignitatis ſecundae. Radicis tertiae dignitatis ſignum eſt $\sqrt[3]{}$, quartae, $\sqrt[4]{}$, quintae $\sqrt[5]{}$ et ita porro. Praeponitur hoc ſignum illi quantitati, ex qua radix deſiderati ordinis eſt extrahenda.

§. 6.

Si ex pluribus quantitatibus collecta quantitas tanquam una ſpectetur, littera quibus deſignatur, cum ſignis ſuis inclu-

includuntur in parentheſin ( ), tumque quod ita connexum eſt, non aliter tractari ſolet, ac ſi littera aliqua ſingularis eſſet. Notat igitur $a(b+c)$ factum ex quanto a et ſumma quantorum b et c, $a(b-c)$ factum ex a et differentia quantorum b et c, $(b+c)(b-c$ factum ex ſumma quantorum b et c in eorundem differentiam; $(a+b)^2$ eſt dignitas ſecunda ſeu quadratum ſummae quantorum a et b, $\sqrt{(a+b)}$ eſt ejuſdem ſummae radix quadratica. Copulae ſeu parentheſis hujus vicem ſaepe linea ſuſtinet, quantis uniendis inducta. Sic pro $(a+b)^2$ ſcribitur $\overline{a+b}^2$. Si quoti per modum fractionum exprimantur, ipſa linea dividendum a diviſore ſeparans copulae loco eſt, ita ut

$\frac{ab+cd}{e+f-g}$ denotet ſummam $ab+cd$ dividendam eſſe per ſummae $e+f$ a quanto g differentiam.

§. 7.

Facta dignitatum ejuſdem radicis iterum ſunt dignitates ejuſdem radicis, quarum exponens ultro ſe offert. Sic $a^5 \times a^3 = aaaaa \times aaa = aaaaaaaa = a^8$, $a^7 \times a^2 = a^9$, $(a+b)^2 \times (a+b)^3 = (a+b)^5$. Inde regula: *Si dignitates ejuſdem radicis proponantur in ſe invicem multiplicandae, addantur exponentes factorum, et ſumma erit exponens facti.* Ideo generaliter eſt $a^m \times a^n = a^{m+n}$, ſi m et n numeros integros denotent. Praeterea cum $\frac{a^5}{a^3} \times a^3$ ſit $= a^5$, et pariter $a^2 \times a^3 = a^5$, erit $\frac{a^5}{a^3} \times a^3 = a^2 \times a^3$, et utroque aequationis membro per a^3 diviſo $\frac{a^5}{a^3} = a^2$. Vel generaliter, cum ſit $\frac{a^m}{a^n} \times a^n = a^m$ et $a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m$, ſit $a^{m-n} \times a^n = \frac{a^m}{a^n} \times a^n$ et utrinque per a^n diviſo, eſt

a^{m-n}

$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$. Inde regula: *Si dignitas quaeci- que dividenda ſit per dignitatem ejusdem radicis; expon- diviſoris ſubtrahatur ab exponente dividendi, reſidu- erit exponens quoti.*

§. 8.

Dignitas ſecunda ſeu quadratum ipſius a^n eſt $a^n \times a^n = a^{n+n} = a^{2n}$. Cubus ipſius a^n eſt $a^n \times a^n \times a^n = a^{3n}$. Pari ex ratione eſt $(a^n)^4 = a^n \times a^n \times a^n \times a^n = a^{n+n+n+n} = a^{4n}$, et generaliter $(a^n)^m = a^{mn}$. Ex quo iterum ſequitur regula iſta: *Si dignitas cujus- cunque gradus iterum elevanda eſt ad dignitatem cujus- que exponentis; exponens radicis multiplicetur per ex- ponentem ejus dignitatis, ad quam evehi debet. Factum e- exponens dignitatis quaeſitae.* Ex his porro concludo ſ- quentem in modum $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ et generaliter $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Porro $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$, et $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \times n} =$ Ideo eſt $(\sqrt[n]{a^m})^n = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$, et quia radices e- dem gradus ex quantis aequalibus aequales ſunt, e- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Inde nova fluit regula pro invenie- radice cujuscunque gradus ex dignitate quacunque ta; *Exponens radicis eſt quotus, qui invenitur divi- exponentis datae dignitatis per exponentem radicis qu- ſitae.* Eſt igitur $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{5}}$, quia eſt $a = a$ Reductio iſta quantorum ſub ſigno radicali content- rum ad exponentes fractos calculo in ſequentibus a- plicando haud raro eximium afferet commodum.

§.

§. 9.

Permulta occurrunt quantorum genera, quae con-
ceptum aliquem communem agnoſcunt, praeterea ve-
ro ſe invicem relationem habent contradictoriam, ita
ut uno eorum poſito et cum eodem altero conjuncto,
tantum prioris negetur, ſive deſtruatur, quantum po-
ſterioris fuerit poſitum. Talia ſunt v. g. aſcenſus et F.213
deſcenſus, progreſſus et regreſſus corporis in eadem re-
cta, ſors et debita, hujusque generis alia. Corpus A
in recta AB a puncto A verſus B 7 pedes progreſſum, ſi 4
pedes regreditur, revera a puncto A poſt regreſſum 3
pedes tantum diſtat, et regreſſu hoc ex diſtantia priori
7 pedum deſtruuntur 4 pedes. Quodſi retrogredatur
per 7 pedes, integra diſtantia deſtruitur, et perinde eſt,
ac ſi corpus omnino non fuiſſet motum. Si corpus A
per 10 pedes regredi ponatur, non tantum punctum A ite-
rum attinget, ſed ultra punctum A verſus C motu inte-
gro abſoluto progreſſum erit. Diſtabit igitur a puncto
3 pedes non verſus dextram ſed verſus ſiniſtram. Si
igitur motus corporis referatur ad punctum A; progreſ-
ſus verſus dextram et regreſſus verſus ſiniſtram ſibi con-
tradictorie opponuntur, ut poſito corpore a termino A
per 3 pedes moto in recta BC et negato progreſſu verſus
certum ſit, corpus 3 pedes verſus C eſſe regreſſum; ne-
gato vero regreſſu verſus C certum ſit, idem corpus 3
pedes verſus B eſſe progreſſum. Fieri igitur poteſt, ut
...us quantorum contradictorie oppoſitorum negatione
...ligatur, quantum alterius ponendum ſit, et ejus-
...di quantitas, quae poni intelligitur per negationem
..., que ipſi contradictorie opponitur, quantitas *negati-
va* vocatur, ipſa vero quantitas huic contradictorie oppo-
ſita dici ſolet *quantitas poſitiva*. Signum negationis
hoc eſt illud, (—), quod alias etiam ſubtractionem de-
notat, quippe quae operatio arithmetica contradictorie
oppoſita eſt additioni, hocque præfigitur ſigno illius
quantitatis, per cujus negationem quantitas negativa indi-
gita-

gitatur. Litteris, quae quantitates poſitivas denota[nt] nullum omnino ſignum tribuitur, ſi ſolæ occurrant, v[el] alicujus ſeriei initio, ſi autem alias litteras ſequantur, i[p]ſis ſignum (+) praeſcribitur.

§. 70.

F.213. Si recta AB indicetur ſigno $+a$, et fiat AC = A[B], recta AC priori in directum oppoſita indicanda erit ſ[i]gno $-a$. Si vero AB vocetur $-a$, AC indicabitur ſ[i]gno $+a$. Initio igitur perinde eſt, quodnam ex du[o]bus quantis ſibi contradictorie oppoſitis ut poſitivum v[el] negativum concipitur, dum modo poſtea idem ſig[nandi] modus retineatur. Quodſi una rectarum AB vel AC [ex]primenda ſit per numerum v. g. AB, quae poſita eſt [=] $+a$, pars quaecunque ut AD aſſumi poteſt pro unitat[e] ita ut ſit AD = $+1$, et adeo AB = $+7$. Numer[us] igitur poſitivus fit ex unitate poſitiva, dum ipſa unit[as] continuo creſcat, vel decreſcat, ita tamen ut non pro[r]ſus in nihilum abeat et hoc incremento vel decremen[to] producatur quantitas, quae ipſam unitatem, vel un[am] ex ejus partibus aliquotis in ſe aliquoties continet. Po[ſ]ito AD = $+1$, et AE = AD, eſt AE = -1, atq[ue] ex hac unitate negativa idem numerus poſitivus $+7$ o[r]tus eſſe concipi poteſt. Quodſi enim AE continuo d[e]creſcere concipiatur, puncto E verſus B fluente, ta[n]dem AE evadet = 0, ſi punctum E jam ulterius verſ[us] B fluat, oritur numerus, qui oppoſitum ipſius unita[tis] AE, vel partis cujusdam ipſius aliquotae in ſe aliquoti[es] continet, qui eſt poſitivus, et puncto E cum B coin[ci]dente, evadit = $+7$. Ex his ſimul patet, quomo[do] numerus -7 = AC ex unitate negativa AE non tantu[m] ſed etiam ex poſitiva AD ortus eſſe concipi queat. I[n] univerſa autem Analyſi omnes numeri ſive poſitivi ſu[nt] ſive negativi ex unitate poſitiva orti eſſe ſunt co[n]cipiendi.

§. 71.

§. II.

Conditionibus problematis per ſigna apte expreſſis, cujus negotii regulas primarias hucusque tradidimus, Analyſis eſt, ut ex ſignis conditiones problematis exprimentibus ſignum eruat generalem problematis ſolutionem exhibens. Ea aequatio, quae conditiones problematis exprimit, dicitur *Aequatio fundamentalis*. Analyſis proprie non docet, quomodo aequatio problematis fundamentalis inveniri queat. Generalia tantum hunc in finem præſcribere poteſt. Niſi enim cognita ſit relatio datarum quantitatum ad quaeſitam, aequatio problematis fundamentalis inveniri nequit. Sed ipſae illae relationes ex diſciplinis petendae ſunt, quae de quibuslibet quantis per ſigna analytica exprimendis ſpeciatim agunt. Unde Analyſis ab illo, qui eas diſciplinas perſpexit, adplicari demum poterit, licet occurrant quantorum relationes aliquae ſolo communi ſenſu nixae, quædam etiam ab arbitrio hominum et pactis pendentes, ad quas, ſi ſolae problema aliquod ingrediantur, analyſis ſine magna difficultate applicatur. Inventa vero aequatione fundamentali incipit Analyſis, eaque ſola tum elicit problematis ſolutionem. Aequatio nimirum fundamentalis ita mutanda eſt, ut ex altera ejus parte quaeſita quantitas ſolitarie conſiſtat, hoc enim facto reſultabit aequatio exprimens, quomodo combinari debeant quantitates datae, ut quaeſitae fiant aequales. Sed datae quantitates combinantur cum quaeſita vel additione vel ſubtractione, vel multiplicatione, vel diviſione, additio autem tollitur ſubtractione et contra, ut et multiplicatio diviſione et contra. Ideo ſeparatio deſiderata fieri poteſt per operationes Arithmeticas. Analyſis utitur ſignis quantorum indeterminatis et univerſalibus, a quibusdam *ſpecies* dictis. Ergo prae omnibus explicandae ſunt regulae, quibus convenienter operationes Arithmeticae ſimplices inſtitui debeant, ſi quanta expreſſa ſint ſignis adeo univerſalibus. Complexus harum regularum di-

citur *Algorithmus ſpecioſus*, ſive *Logiſtica ſpecioſa*, ſive *Calculus Litteralis*.

§. 12.

Quaevis operatio ſimplex arithmetica eſt methodus ex dato cognito quanto ejusque ratione mathematica ad incognitum quoddam ipſum hoc incognitum inveniendi. Si data ratio quanti cogniti ad incognitum eſt arithmetica, praeter quantum cognitum dari debet denominator rationis ejus ad incognitum. Atque ſi duo quanta A et B concipiuntur in ratione arithmetica, cujus denominator eſt D, unum B oritur ex altero A aut ita, ut ipſum A totum et praeterea D ponatur, aut ita, ut A quidem totum ponatur, ſed D tollatur ſive negetur. Si termini rationis arithmeticae ſint 3 et 5, erit denominator 2, atque 5 oritur ex 3, poſito 3 toto, et praeterea numero 2: ſed 3 oritur ex poſito 5 toto et inſuper numero 2 ex eodem ſublato ſive negato. Ideo ſi ex uno termino ejusmodi rationis et denominatore dato, alter terminus eſt inveniendus praeter quantum cognitum denominator rationis aut ponendus, aut negandus erit. Si prius, operatio inſtituenda eſt *additio*, ſi vero poſterius, eſt *ſubtractio*. Si diſcrimen quanti poſitivi a negativo in cenſum non venit, uti in Matheſi Elementari; quantum cognitum additione denominatoris D eodem augetur, et ideo ſumma quantitate data eſt major: contra quantum cognitum ſubtractione ipſius D eodem quanto minuitur, ita differentia quaeſita quantitate, a qua fit ſubtractio, minor. In Analyſi Mathematia idem accidit, ſi utrumque datorum qantorum ſit poſitivum, vel utrumque negativum. Sic manifeſtum eſt, quod ſumma quantorum $+5a$ et $+7a$ ſit $+12a$: quantorum vero $-5a$ et $-7a$ ſumma ſit $-12a$. Inde prima additionis regula deducitur, nimirum iſta: *Si quanta addenda iisdem litteris ſint notata, et idem habent ſignum, addantur numeri praefixi et ſignum praefixum retineatur.*

§.

§. 13.

Si quanta, quae proponuntur addenda, diverſa habent ſigna, res aliter ſe habet. Propoſita ſit quantitas $+7a$, eique ſit addenda $-3a$, atque ponenda ſunt $+7a$ et inſuper $-3a$. Quare cum $+7a$ ſit ipſi $-3a$ contradictorie oppoſita, tantum prioris $+7a$ negatur, quantum poſterioris $-3a$ eſt poſitum. Summa igitur quaeſita eſt $+4a$. Pari ratione ſumma quantorum $-9a$ et $+7a$ eſt $-2a$, et ipſarum $+3a$ et $-3a$ ſumma eſt o. Quare *ſi quanta addenda iisdem litteris ſunt notata, unum vero ſit poſitivum et alterum negativum, major minuenda eſt minore, eſt reſiduo praefigendum eſt ſignum majoris, quod prodit, erit ſumma quaeſita.* Denique *ſi quanta diverſis litteris notata proponantur addenda, eadem immediate ſibi junguntur, iisdem ſignis, quae ipſis praefixa ſunt, retentis.* Sic ſumma quantorum $+a$ et $+b$ eſt $a+b$; quantorum $+a$ et $-b$ ſumma eſt $a-b$, atque ſumma ipſorum $-a$ et $-b$ eſt $-a-b$, quae omnia ex notione additionis, vi cujus ponenda eſt quantitas data et inſuper denominator rationis ipſius ad quantum quaeſitum, ſunt manifeſta. In additione plurium aut magis compoſitarum quantitatum convenit obſervare formam operationis ſimilem illi, qua utimur in Arithmetica Elementari numeros determinatos addentes. Si quanta $17ax-14a+3$ et $4a-8ax+b$ addenda ſunt; diſponuntur eadem in ſerie deſcendente ita, ut termini iisdem litteris notati conſiſtent in iisdem columnis ſequentem in modum: tum vero cuilibet columnae ſubſcribitur ſumma terminorum, qui in eadem occurrunt, quemadmodum illud ſchema calculi adjunctum exhibet.

$$\begin{array}{rrrr} 17ax & -14a & +3 & \\ -8ax & +4a & & +b \\ \hline 9ax & -10a & +3 & +b \end{array}$$

§. 14.

Ad normam horum exemplorum facile abſolvitur quaecunque additio, ſive quantitates propoſitae ſint dignitates ſive radices cujuscunque ordinis, ſive fractiones

Dignitates enim, quarum eadem eſt radix et idem e
ponens, ac radices, ſi quanta ſub ſigno contenta ſu
eadem et exponens radicalis idem, non aliter tractan
ſunt, quam ſi littera unica eaque eadem fuerint expreſſ
Fractiones vero, niſi denominatorem habeant eunde
reducendæ ſunt ad eandem denominationem juxta reg
las communes. Sic

quantorum	ſumma eſt
$+7a^3$ et $-15a^3$	$-8a^3$
$+3a^5$ et $+8a^5$	$+11a^5$
$-9a^6$ et $-7a^6$	$-16a^6$
$+3(a+b)^3$ et $+7(a+b)^3$	$+10(a+b)^3$
$+8\sqrt{b}$ et $-19\sqrt{b}$	$-11\sqrt{b}$
$-7\sqrt[5]{(ab+fx-gx^2)}$ et $-5\sqrt[5]{(ab+fx-gx^2)}$	$-12\sqrt[5]{(ab+fx-gx^2)}$
$+\frac{ab}{c}$ et $+\frac{7ab}{c}$	$+\frac{8ab}{c}$
$-\frac{a}{bc}$ et $-\frac{g}{k}$	$\frac{-ak-bcg}{bck}$
$+9a^8$ et $-7a^3$	$+9a^8-7a^3$
$-5b^3$ et $-3x^7$	$-5b^3-3x^7$
$-7\sqrt{(ax+b)}$ et $+5\sqrt[3]{y}$	$-7\sqrt{(ax+b)}+5\sqrt[3]{}$

§. 15.

Quantitates radicales, ſi exponentem radicale
eundem habent, et idem quantum ſub ſigno radical
vocantur *communicantes*, licet numeri vel generatim ſ
gna præfixa ſigno radicali differant. Ex §. praec. pate
quod additio ejusmodi quantitatum radicalium commu
nicantium abſolvatur additione ſignorum radicali ſign
praefixorum, ita ut quantorum $a\sqrt{(b+x)}$ et $-f\sqrt{(b+}$
$x)$ ſumma ſit $(a-f)\sqrt{(b+x)}$. Occurrunt ſaepi
quantitates radicales non communicantes, quae muta
non

nonnunquam poſſunt in communicantes, ſi quantum ſub ſigno radicali contentum reſolubile eſt in factores, et ex uno eorundem extrahi queat radix ejus gradus, quem exponens radicalis indicat. Tum enim ea radix ad extrahenda eſt, et altero factore ſolo ſub ſigno radicali relicto, haec mutata quantitas radicalis per radicem inventam multiplicanda. Factum, quod prodit, quantitati radicali propoſitæ aequale eſt. Dico, quod ſit $\sqrt[n]{(a^n b^m)} = a\sqrt[n]{b^m}$, et veritas hujus aſſerti jam demonſtranda eſt.

§. 16.

Ut demonſtratio aſſerti eo evidentior evadat, propoſitiones quaedam lemmatum loco ſunt præmittendae, eaeque ſunt ſequentes.

1. Si fuerit $a : b = c : d$, erit quoque $a^n : b^n = c^n : d^n$, ſi n ſit numerus integer. Scripta enim proportione $a : b = c : d$ toties, quoties in numero n eſt unitas et terminis ordine in ſe invicem multiplicatis, facta ſunt proportionalia (§. 45. *Ar.*).

2. Si fuerit $a : b$ in $c : d$, erit $a^n : b^n$ in $= c^n : d^n$. Quia enim $a : b$ in $= c : d$, alia quantitas a quanto d diverſa erit quarta proportionalis ad quanta a, b, et c. Sit e iſta quantitas; erit $a : b = c : e$, et proinde $a^n : b^n = c^n : e^n$ (*per n.* 1.). Si jam praeterea foret $a^n : b^n = c^n : d^n$, exinde concluderetur $c^n : e^n = c^n : d^n$, proinde $e^n = d^n$, et $e = d$, *contra hyp.*

3. Si fuerit $a : b = c : d$, erit $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$. Ponatur enim $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ in $= \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$, erit $a : b$ in $= c : d$ (*per n.* 2) quod *contra hyp.* ex quo patet propoſitum.

4. Si factum ex quotcunque factoribus, ut $pqrs$ elevandum ſit ad potentiam gradus m, quilibet factor ad potentiam ejusdem gradus elevandus eſt, factum ex omnibus hiſce potentiis, erit potentia quaeſita. Dico

enim quod generaliter ſit $(ab)^m = a^m b^m$. Quia ex na
ra multiplicationis eſt $1 : a = b : ab$ et ideo $1 : a^m = b$
$(ab)^m$ (*per n.* 2.) erit $a^m b^m = (ab)^m$. Quia jam $pqrs$
$pq \times rs$, erit $(pqrs)^m = (pq)^m \times (rs)^m = p^m q^m r^m s$
Quae argumentatio ad quemcunque alium caſum,
quotcunque factoribus ad factum conſtet, facile adplicat

5. Radix gradus m ex ejusmodi facto ut $pqrs$
factum ex radicibus gradus m ſingulorum factorum

$$\sqrt[m]{pqrs} = \sqrt[m]{p} \times \sqrt[m]{q} \times \sqrt[m]{r} \times \sqrt[m]{s} = p^{\frac{1}{m}} q^{\frac{1}{m}} r^{\frac{1}{m}} s^{\frac{1}{m}}.$$

mo nimirum patet, quod ſit $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$, ſequ
tem in modum. Ex natura multiplicationis eſt $1 : a$
$b : ab$, ibeo $1 : \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b} : \sqrt[m]{ab}$ (*per n.* 3.), et $\sqrt[m]{a} \times$
$= \sqrt[m]{ab}$. Praeterea eſt $pqrs = pq \times rs$, ideo $\sqrt[m]{pqrs} =$
$\sqrt[m]{(pq \times rs)} = \sqrt[m]{pq} \times \sqrt[m]{rs} = \sqrt[m]{p} \times \sqrt[m]{q} \times \sqrt[m]{r} \times \sqrt[m]{s}$. E
quotcunque autem factis conſtet factum, argumentati
haec poterit applicari.

Propoſita jam ſit expreſſio $\sqrt[n]{(a^n b^m)}$, erit ea $= \sqrt[n]{a}$
$\times \sqrt[n]{b^m}$ (*per n.* 5.) et quia $\sqrt[n]{a^n} = a$, erit $\sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b}$
$= a\sqrt[n]{b^m}$, hincque $\sqrt[n]{(a^n b^m)} = a\sqrt[n]{b^m}$.

Quo uſus hujus reductionis perſpiciatur, adden
ſit $\sqrt{8}$ ad $\sqrt{18}$, erit $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; id
ſumma quæſita eſt $5\sqrt{2} = \sqrt{(2.25)} = \sqrt{50}$. Sic inv
nitur $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.

§. 17.

Haec de additione algebraica, ſequitur ſubtracti
atque ex notione ſubtractionis concludimus regulam, qu
ſequitur, generalem: *Quanti ſubtrahendi ſignum mut*
n

tur in ſignum contrarium; quod prodit, ad quantum, a quo ſieri libet ſubtractio, addatur. Regulae hujus demonſtratio ex notione ſubtractionis ſponte ſe offert, dummodo natura quanti poſitivi et negativi contradictorie oppoſiti, vi cujus tantum unius ponitur, quantum alterius negatur et v. v. ſimul in cenſum veniat. Differentia enim per ſubtractionem quanti D a quanto A quaeſita eſt quantitas, quae oritur ex A, ponendo quantum A totum, deinde vero quantum D tollendo ſive negando, ſeu quod idem eſt, tantum quanti ipſi D contradictorie oppoſiti ponendo, quantum ipſius D eſt negandum. Sed operatio, quae ex quanto A toto et oppoſito ipſius D poſito elicit tertium, eſt additio quanti ipſi D opoſiti ad quantum A. Proinde patet veritas regulae expoſitae. Sic

quantum	ſubtrahendo quantum	differentia eſt
$+a$	$+b$	$a-b$
$+a$	$-b$	$a+b$
$+3a$	$+7a$	$-4a$
$+5a$	$-8a$	$+13a$
$-9a$	$+3a$	$-12a$
$-5a^3$	$-18a^3$	$+13a^3$
$+6(ax+b)^5$	$+9(ax+b)^5$	$-3(ax+b)^5$
$\frac{ab}{c}$	$\frac{-g}{k}$	$\frac{abk+gc}{kc}$
$+5\sqrt[3]{ax}$	$+7\sqrt[3]{ax}$	$-2\sqrt[3]{ax}$

Si quantum radicale a radicali ſit ſubtrahendum, et radicales iſtae quantitates non ſint communicantes, reductione ad ſimpliciorem expreſſionem, ſi ea poſſibilis eſt, ſaepe fiunt communicantes. Caeterum ea, quae ſupra de additione plurium et magis compoſitarum quantitatum ſunt monita, et hic notari merentur. Quodſi v. g. a quanto $5ax^3 + 3\sqrt{(f+y)} - 4a^2 - 16b$ ſuctrahendum ſit quantum $8ax^3 + 3ax^2 - ax - 5\sqrt{(f+y)} - b$, ſchema calculi hoc erit.

$$\begin{array}{rrrrrr} 5ax^3 & * & * & +3r(f+y) & -4a^2 & -16b \\ 8ax^3 & +3ax^2 & -ax & -5r(f+y) & * & -b \\ \hline -3ax^3 & -3ax^2 & +ax & -2r(f+y) & -4a^2 & -15b \end{array}$$

Aſteriſmi hic poni ſolent cyphrarum loco.

§. 18.

Multiplicatio et diviſio dignitatum fit additione (ſubtractione earundem exponentium. Factum ex a^m (a^n eſt a^{m+n}. Si a^3 dividatur per a^5, quotus eſt a^{-} et generaliter, ſi a^m dividatur per a^{m+n}, quotus e a^{-n}. Denique ſi a^m dividatur per a^m, quotus eſt a^{m-} $= a^0$. Quaevis autem dignitas a^{-m} cujus exponens e negativus aequipollet fractioni cujus numerator eſt uni tas, denominator vero eadem quantitas a cum eoden quidem exponente m ſed cui ſignum contrarium præfi xum eſt. Nam $a^{-n} \times a^{m+n} = a^{m+n-n} = a^m$, e $\frac{1}{a^n} \times (a^{m+n} = a^m \times a^n) = a^m$, ideo $a^{-n} \times a^{m+}$ $= \frac{1}{a^n} \times a^{m+n}$, et utrinque per a^{m+n} diviſo fit a^{-} $= \frac{1}{a^n}$. Praeterea quamcunque quantitatem denotet a ſemper eſt $a^0 = 1$. Eſt enim $a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m$ et $1 \times a^m = a^m$, proinde $a^0 \times a^m = 1 \times a^m$, hincqu $a^0 = 1$. Methodus tradita dignitatem quanti algebrai per aliam multiplicandi vel dividendi adeo univerſal eſt, ut quoque ad dignitates, quarum exponentes ſin fracti, extendatur. Quodſi enim fuerit $a^m = a^r a^s$ erit $m = r + s$. Utrinque igitur radice ordinis n ſumta ſi fiat $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{r}{n}} a^{\frac{s}{n}}$, erit $\frac{m}{n} = \frac{r+s}{n} = \frac{r}{n} + \frac{s}{n}$.

Si autem fuerit $a^m = \frac{a^r}{a^s}$, erit $m = r - s$, et utrin

que

que radice ordinis n ſumta, ut fiat $a^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{r}{n}}}{a^{\frac{s}{n}}}$, eſt $\frac{n}{n}$

$= \frac{r-s}{n} = \frac{r}{n} - \frac{s}{n}$. Fit igitur exponens $\frac{m}{n}$ e

fractis $\frac{r}{n}$ et $\frac{s}{n}$ eodem modo, quo exponens m ipſiu a^m ex integris r et s, addendo nimirum exponentes digni tatum radicis a, quarum altera per alteram eſt multipli canda, et ſubtrahendo exponentem diviſoris ab exponen te dividendi, ſi dignitas per aliam ejusdem radicis divi denda proponatur.

§. 19.

Quod attinet ad multiplicationem et diviſionem re liquarum quantitatum algebraicarum, iterum habemu regulam generalem ſequentem: *Si duo quanta, quorui unum multiplicandum eſt per alterum, vel dividendum, ea dem habent ſigna, facti vel quoti ſignum eſt* (+), *ſin contra ria habent ſigna, tam facti, quam quoti ſignum eſt* (—) Cognitum enim jam eſt ex Matheſi Elementari, ſi fue rit A : B = C : D. et A habeatur pro unitate; D eſſ factum ex quantitatibus C et B: ſi vero B ſit unitas, I eſſe quotum quanti C per A diviſi. Si igitur primo + per $+b$, vel $-a$ per $-b$ multiplicandum ſit, habemu analogias ſequentes:

$$+1 : +a = +b : +a \times +b$$
$$\text{et} +1 : -a = -b : -a \times -b,$$

Jam vero numerus poſitivus oritur ex unitate vel aliquo ta ejus parte aliquoties poſita, numerus negativus auten ex unitate vel aliquota ejus parte aliquoties negata. E igitur $+a$ ex $+1$ aliquoties poſita ortus, ideo et $+a \times$ $+b$ ex $+b$ aliquoties poſita componi debet. Quantum quod oritur ex quanto poſitivo aliquoties poſito, eſt po

 ſit

ſitivum, proinde $+ a \times + b$ eſt quantum poſitivum $=$ ab. Sed vero $- a$ ex $+ 1$ aliquoties negata, ſeu quod idem eſt, ex quanto ipſi $+ 1$ oppoſito aliquoties poſita ortum eſt, ideo quoque $- a \times - b$ ex $- b$ aliquoties negata componi debet, ſeu quod idem eſt ex quanto ipſi $- b$ oppoſito aliquoties poſito. Quantum, quod ipſi $- b$ contradictorie opponitur, eſt $+ b$. Hinc et $- a \times$ $- b$ ex quanto poſitivo aliquoties poſito eſt componendum, ideoque eſt quantum poſitivum $= + ab$.

Quodſi deinde $+ a$ per $- b$, vel $- a$ per $+ b$ eſt multiplicandum, habemus analogias

$$+ 1 : - b = + a : + a \times - b$$

et $$+ 1 : + b = - a : - a \times + b,$$

ex quibus patet, $+ a \times - b$ ex $+ a$ aliquoties negato, et $- a \times + b$ ex $- a$ aliquoties poſita componi debere. Sed quantum, quod oritur ex poſitivo aliquoties negato, vel negativo aliquoties poſito, eſt negativum. Proinde eſt $+ a \times - b = - ab$, et $- a \times + b = - ab$.

Quod adtinet ad diviſionem, habemus analogias

$$+ b : + 1 = + a : + \frac{a}{b}$$

$$- b : + 1 = - a : + \frac{a}{b}$$

$$+ b : + 1 = - a : - \frac{a}{b}$$

$$- b : + 1 = + a : - \frac{a}{b},$$

in quibus iisdem ut ante ratiociniis inſtitutis ſignum quanti proportionalis reperitur.

§. 20.

Quantitates radicales, quarum exponens radicis idem eſt, dicuntur *eandem habere denominationem*. Quod ſi ejusmodi quantitates radicales ejusdem denominationis in ſe invicem multiplicandae vel dividendae proponantur

mul

multiplicentur aut dividantur quantitates ſub ſigno radicali; ibi facto, hic quoto praefigatur ſignum idem radicale cum ſuo exponente. Quod quidem attinet ad multiplicationem ſupra, jam demonſtratum eſt, quod ſit $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (§. 16. *n.* 5.). Simili vero argumentatione demonſtratur, eſſe $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{(a : b)}$. Ex notione enim diviſionis eſt $1 : b = (a : b) : a$, ideo $1 : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{(a : b)} : \sqrt[m]{a}$ et conſequenter $\sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{(a : b)} = \sqrt[m]{a}$. Quare ſi utrinque dividatur per $\sqrt[m]{b}$, fit $\sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{(a : b)} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{(a : b)} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$. Quodſi quantitates radicales in ſe invicem multiplicandae vel dividendae non ſint ejusdem denominationis, poſſunt eaedem ad eandem denominationem reduci, ſi in memoriam revocetur, quod $\sqrt[m]{a}$ ſit $= a^{\frac{1}{m}}$ et $\sqrt[n]{b^s} = b^{\frac{s}{n}}$. Diverſitas igitur denominationis ab exponentibus diverſis pendet, exponentes vero fractiones ſunt, quae ad alias ipſis aequales, ſed ejusdem denominationis reduci poſſunt. Erit ideo $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^n}$ et $\sqrt[n]{b^s} = b^{\frac{s}{n}} = b^{\frac{ms}{mn}} = \sqrt[mn]{b^{ms}}$, hincque $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b^s} = \sqrt[mn]{(a^n b^{ms})}$, et $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b^s} = \sqrt[mn]{(a^n : b^{ms})}$.

§. 21.

Si quaeratur factum ex duobus factoribus, quorum vel alteruter, vel uterque ex pluribus terminis per ſigna + et − connexis conſtet; illud erit aggregatum factorum partialium, quae prodeunt ſingulis terminis cujuslibet factoris multiplicatis in ſingulos terminos alterius factoris. Sit enim primo $a + b - c$ multiplicandum per f, erit factum $= af + bf - cf$, quia ex natura multiplicationis eſt

$1 : f$

$$1 : f = a : af$$
$$1 : f = b : bf$$
$$1 : f = -c : -cf,$$

et proinde $1 : f = a + b - c : af + bf - cf$ (§. 186. *Co*
Geom. Elem.), ex quo patet, eſſe $(a+b-c) f = af +$
$- cf$. Si jam ponatur $f = g + h - k$, erit

$$af = a(g+h-k) = ag + ah - ak$$
$$bf = b(g+h-k) = bg + bh - bk$$
$$-cf = -c(g+h-k) = -cg - ch + ck,$$

ergo factum componitur ut regula poſcit. Hinc pate
quomodo abſolvatur multiplicatio quantitatis comple
per aliam ejusmodi quantitatem. Primo multiplicant
numeri, deinde ſignantur facta e quantitatibus per litt
ras expreſſis, cumque in his litterarum ordo arbitrariu
ſit, plerumque obſervatur ordo, quo litterae in alph
beto ſe invicem excipiunt, quia per id promtius adp
ret, quae facta eadem ſint, quae diverſa. Reperta ſ
facta partialia, e quibus factum quaeſitum componitu
addenda ſunt, ut quaeſitum quam ſimpliciſſime exhibe
tur. Hujus calculi ſpecimina ſunt ſequentia.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + bb \\ aa + ab \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline -ab + bb \\ aa - ab \\ \hline aa - 2ab + bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline -ab - bb \\ aa + ab \\ \hline aa \quad - bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} yy + 2ay - \tfrac{1}{2}aa \\ yy - 2ay + aa \\ \hline aayy + 2a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \\ -2ay^3 - 4aayy + a^3y \\ y^4 + 2ay^3 - \tfrac{1}{2}aayy \\ \hline y^4 \quad * \quad - (3 + \tfrac{1}{2})\,aayy + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \end{array}$$

$\frac{2ax}{c}$

$$\begin{array}{l} \frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}} \\ 3a + \sqrt{\frac{abb}{c}} \\ \hline \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c} \\ \frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} \end{array}$$

Factum ita repertum commode ſecundum dignitates alicujus litterarum ſic ordinabitur, ut praecedant ejus litterae dignitates altiores, reliquae gradatim deſcendendo ſequantur; ubi ſimul obſervandum eſt, quod, ubi dimenſiones litterae, ſecundum quas ordinatio ſit, non in eadem ubique progreſſione arithmetica procedunt, locis vacuis ſubſtituatur ſignum *, quod cyphram hic notare, jam monuimus.

§. 22.

Si quantum complexum per aliud complexum dividendum proponatur, regulis prorſus ſimilibus iis, quibus in Arithmetica Elementari utimur, abſolvitur diviſio. Sit quantum $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$ dividendum per $a + b$. Terminus primus dividendi ſecundum dignitates alicujus in eodem litteræ ordinati dividatur per terminum primum diviſoris, pariter ſecundum dimenſiones ejusdem litterae ordinati, quam diviſionem facile inſtituet, qui in memoriam revocat, quod, ſi factum dividatur per unum factorum, quotus ſit factorum alter. Quotus inventus qui hoc caſu eſt a^2 notetur, atque per eundem multiplicetur diviſor integer. Factum $a^3 + a^2b$ a dividendo ſubtrahatur, et reſiduum iterum eodem modo tractetur, donec vel perveniatur ad reſiduum, quod per datum diviſorem deſcripto modo dividi amplius nequit, ideoque quoto invento addenda ſit fractio, cujus nume-

numerator eſt ultimum reſiduum et denominator di-
ſor; vel ultimum reſiduum evaneſcat. Schema c
culi hoc eſt.

$$
\begin{array}{lll}
\textit{Diviſor} & \textit{Dividendum} & \textit{Quotus} \\
a+b) & a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 & (a^2 - 2ab + \\
 & a^3 + a^2b & \\
\hline
 & -2a^2b - ab^2 + b^2 & \\
 & -2a^2b - 2ab^2 & \\
\hline
 & ab^2 + b^3 & \\
 & ab^2 + b^3 & \\
\hline
 & 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Fractus numerus, qui forte partem quoti exhibet, h
omitti non ſemper poteſt, quemadmodum numeri fract
qui cum aliis pro quoto prodeunt, ſi numerus dividatu
per numerum, errore admodum parvo ſubinde negligu
tur. Nam et ea fractio, in qua poſt diviſionem ultima
adquievimus, evolvi ulterius poteſt hunc in modum.

$$
\begin{array}{lll}
\textit{Diviſor} & \textit{Dividendum} & \textit{Quotus} \\
a+b) & aa + 2ab - b^2 & \left(a + b - \frac{2bb}{a} + \frac{2b^3}{a^2}\right. \text{etc} \\
 & aa + ab & \\
\hline
 & ab - b^2 & \\
 & ab + b^2 & \\
\hline
 & -2b^2 & \\
 & -2b^2 - \frac{2b^3}{a} & \\
\hline
 & +\frac{2b^3}{a} & \\
 & +\frac{2b^3}{a} + \frac{2b^4}{a^2} & \\
\hline
 & \frac{2b^4}{a^2} &
\end{array}
$$

$$-\frac{2b^4}{a^2} - \frac{2b^5}{a^3}$$

$$+\frac{2b^5}{a^3}$$

Fit igitur quotus univerſus ſequens, $a + b - \frac{2bb}{a} + \frac{2b^3}{a^2} - \frac{2b^4}{a^3} + \frac{2b^5}{a^4(a+b)}$. Nam et hic fractio ex reſiduo et diviſore negligi non debet, niſi de ejus parvitate conſtet.

§. 23.

Cum quaevis operatio arithmetica ſimplex ſit methodus, ex dato quanto quodam cognito et ratione mathematica hujus quanti cogniti ad incognitum quantum ipſum hoc quantum inveniendi; patet, omnem mutationem quanti cujuscunque dati, qua vel creſcit, vel decreſcit, vel ex ſtatu poſitivo in negativum, vel ex negativo ſtatu in poſitivum tranſit, vel alio quocunque modo variatur, eſſe ejusmodi operationem arithmeticam, dummodo inter quantum, quod ante fuerat datum, et id, quod poſt mutationem provenit, ratio mathematica concipi, eaque ſignis analyticis exprimi queat. Inter mutationes iſtas notatu digna eſt ea, qua quantitas prorſus evaneſcit ſeu nihilum evadit. Habet vero quantitas quaecunque determinatae magnitudinis rationem quandam mathematicam ad nihilum, quia concipi poteſt modus, quo nihilum fit ex quanto determinato quocunque. Hoc enim continuo decreſcendo tandem poteſt prorſus evaneſcere. Licet igitur o proprie non denotet quantitatem, ſed quantitatis defectum, nihilo ſecius tamen in calculum ingredi poteſt, quia ſtatum quendam quantitatis indicat, quem ſubire poteſt, poſtquam operatione quadam arithmetica ſimplici paſſa eſt mutationem. Sic nemo unquam negabit, quod numerus 5 a numero 5 ſubtractus

tractus relinquat nihilum, ſeu quod ſit $5 - 5 = 0$, e quo porro ſequitur, eſſe $5 + 0 = 5$, et $5 - 0 = 5$. Qu omnia cum ſint evidentiſſima, ipſam o in calculum in gredi poſſe, certiſſimum eſt. Cyphra igitur in additi ne et ſubtractione denominator rationis quanti cogni ad quaeſitum, atque in multiplicatione et diviſione e poneus rationis quanti cogniti ad incognitum eſſe potel qui caſus peculiarem merentur attentionem.

§. 24.

Quod quidem adtinet ad additionem et ſubtracti nem, calculus nulla prorſus laborabit difficultate. No tiones enim harum operationum clare oſtendunt, eſ $a + 0 = a$ et $a - 0 = a$, ſeu quantum cui nihilum addi tur, vel a quo nihilum ſubtrahitur, nullam pati muta tionem. Gravem vero errat errorem, qui quantum pe nihilum multiplicatum vel diviſum nullam mutatione pati, contendit. In ſcholis arithmeticae trivialibus ja docetur, quod numerus per o multiplicatus ipſe o eva dat, quod quidem veriſſimum eſt, et clare oſtendi aliud eſſe, *quantum per* o *multiplicare*, aliud vero *qua tum plane non multiplicare*. Aliud igitur quoque eſt, *qua tum per* o *dividere*, aliud, *quantum plane non dividen* Dicimus quidem, in multiplicatione et diviſione praet quantum cognitum dari exponentem rationis ipſius incognitum, vere autem datur ratio unitatis ad expone tem; quia multiplicatio eſt operatio, qua incognitu fit ex cognito uti exponens ex unitate, diviſio vero operatio, qua incognitum fit ex cognito, uti unitas ex dato exponente. Sit igitur primo quantitas quaecu que determinata a per o multiplicanda, et erit ex notio multiplicationis $1 : 0 = a : a \times 0$. Ideo $a \times 0$ fieri debet ex uti o fit ex 1. Sed vero o non fit ex unitate, niſi eadem pl ne deſtruatur, proinde et a prorſus debet deſtrui, u prodeat $a \times 0 = 0$. Idem quoque exinde patet, qui vi analogiae $0 : 1 = a \times 0 : a$, quantitas a ita componend eſt ex $a \times 0$, uti 1 poteſt ex o componi. Sed 1 ex o pror

fu

ſus non componi poteſt, ideo etiam a ex $a \times 0$ nulla prorſus ratione poterit componi; ex quo luculentiſſime patet, quod $a \times 0$ non poſſit non eſſe $=0$. Si enim $a \times 0$ poneretur fractioni quantumvis exiguae aequalis, poſſibile eſſet, ut a ex eadem aliquoties repetita componeretur, quod demum impoſſibile ſit, ſi $a \times 0 = 0$ ſtatuatur. Ex hoc ſimul patet, eſſe $\frac{0}{a} = \frac{1}{a} \times 0 = 0$. Deinde ſit quantitas a per 0 dividenda, atque ex notione diviſionis erit $0 : 1 = a : \frac{a}{0}$, quae analogia indicat primo, eſſe $\frac{a}{0} > a$, quia ſine dubio eſt $1 > 0$; ſecundo patet $\frac{a}{0}$ eſſe quantitatem omni quanto dabili majorem. Cum enim unitas ex cyphra quotieſcunque repetitas componi nullo modo poſſit; etiam $\frac{a}{0}$ eſt quantitas, quae ex quanto a non componi poteſt, quotieſcunque id repetatur, ideo $\frac{a}{0}$ non poteſt non eſſe quacunque quantitate dabili major. Ejusmodi quantitas, quae omni quantitate dabili major eſt, dicitur *quantitas infinita*, ſeu *infinite magna*, eaque ſequenti ſigno ∞ ſolet denotari, ita ut ſit $\frac{a}{0} = \infty$. Reliquae quantitates, quae non ſunt infinitae, *quantitates finitae* dicuntur. *Quodſi igitur quantitas finita per cyphram dividatur, quotus eſt infinite magnus.*

§. 25.

Ex aequatione $\frac{a}{0} = \infty$ fluit eſſe $a = 0 \times \infty$ et

$\frac{a}{\infty} = 0$, ſeu *quotus, qui prodit, quantitate finita* [illegible]
infinitam diviſa, nihilo aequalis eſt. Idem et ex not[illegible]
ne diviſionis fluit, vi, cujus eſt $1 : \infty = \frac{a}{\infty} : a$, idec
fit ex $\frac{a}{\infty}$, uti ∞ ex 1 componitur. Sed ∞ ex uni[illegible]
te, quotiescunque repetatur, nulla prorſus ratione co[illegible]
poni poteſt, proinde etiam a ex $\frac{a}{\infty}$ nulla prosſus [illegible]
tione componi poterit: ex quo patet, neceſſario eſſe $\frac{1}{0}$
$= 0$. Quaecunque enim pro $\frac{a}{\infty}$ ſumatur quanti[illegible]
utcunque parva, ſemper poſſibile manet, ut a ex eade[illegible]
componatur, quod demum impoſſibile eſt, ſi $\frac{a}{\infty} =$
ponatur. Ob ſimilitudinem, quia fractio $\frac{a}{0}$ eſt qua[illegible]
titas infinite magna, fractio $\frac{a}{\infty}$ dici poteſt *quanti[illegible]*
infinite parva, quae igitur nihil aliud erit niſi quanti[illegible]
evaneſcens ſeu nihilo aequalis. Tum vero vox qua[illegible]
tas infinite parva, ſeu quantitas evaneſcens, non erit [illegible]
minus derivativus, ſed primitivus, quia quantitas i[illegible]
nite parva non eſt quantitas ſed defectus quantitatis. [illegible]
que ejusmodi locutiones tolerari poſſunt, quia in ana[illegible]
ſi non tam ipſarum quantitatum, quam ſignorum ear[illegible]
dem habetur ratio, neque inſolitum ſit, ipſa quantor[illegible]
ſigna, quanta vocare, atque proinde ſignum 0 [illegible]
$\frac{a}{\infty}$ hic tractari ſoleat, ac ſi eſſet quantitas. Qu[illegible]

q[illegible]

quidem Analyſtam in errorem inducere non poterit, cum in aliis ſcientiis termini huic plane ſimiles adhuc frequentius occurrant, neque tamen in errores neceſſario inducant. Sic bonum apparens, ut in Moralibus vocatur, non eſt bonum, malum apparens non eſt malum, nihilo tamen ſecius termini iſti uſu recepti ſunt. Definiri ſolet alias quantitas infinite parva, quod ſit quantitas omni quantitate dabili minor, atque ejusmodi quantitas certe non alia eſſe poterit, niſi quantitas evaneſcens, ſeu nulla. Si enim eadem non eſſet $= 0$, aſſignari poſſet quantitas ipſi aequalis, quod eſt contra hypotheſin.

SECTIO II.

DE SOLVTIONE PROBLEMATVM SIMPLICIVM.

§. 26.

Quando problema aliquod analytice ſolvendum propoſitum eſt, aequatione fundamentali inventa, cognitae quantitates ab incognita ita ſunt ſeparandae, ut quantum incognitum ſolum ex una aequationis parte, quanta vero cognita ex altera ipſius parte conſiſtant. Quantitas vero quaeſita, in aequatione fundamentali cum datis ſecundum conditiones problematis certo modo combinata, aut ad dignitatem quandam prima majorem evecta eſt, aut non. Aequatio, in qua non niſi dignitas prima quantitatis incognitae occurrit, *aequatio ſimplex*, et problema, cujus conditiones ejusmodi aequatione exprimi poſſunt, *problema ſimplex* vocatur. Quaevis alia aequatio, in qua incognita quantitas ad dignita-

tem prima majorem evecta occurrit, *aequatio non ſimplex* et problema, quod ad ejusmodi aequationem conducit *problema non ſimplex* in poſterum vocabitur. Methodus ex aequatione ſimplici inveniendi valorem incogniti quantitatis datarum ope, nihil difficultatis habet. Combinantur enim datae quantitates cum quaeſita in aequatione fundamentali vel additione vel ſubtractione vel multiplicatione vel diviſione. Quare cum additio tollatur ſubtractione et contra, ut et multiplicatio diviſione et contra; patet, cognitas quantitates a quaeſito ſeparari poſſe ab eo, qui ſequentes obſervaverit regulas: *Quanta cognita in aequatione fundamentali quaeſitae addita utrinque ſubtrahantur, et quanta cognita a quaeſito ſubtracta utrinque addantur. Quodſi vero quantum quaeſitum cognitis multiplicatum vel diviſum ſit; priori caſu iisdem quantis cognitis aequatio utrinque dividatur, poſteriori vero multiplicetur.*

§. 27.

Supra quidem monuimus, inventionem aequationis problematis fundamentalis in Analyſi proprie non doceri poſſe, ſed modum eandem inveniendi petendum eſſe ex diſciplinis, ad quas problema propoſitum pertinet. Sed vero quaeſtiones arithmeticae, quae circa numeros vel abſtractas quantitatum relationes ſolummodo verſantur, omnium ſunt facillimae, ac plerumque nihil aliud fere requirunt, quam ut e ſermone, in quo proponuntur, transferantur, in characteres ſupra expoſitos, qui apti ſunt, ut noſtros de quantitatum relationibus conceptus deſignent. Quare cum cujusvis artis natura ſit, ut generalibus praeceptis non addiſcatur, niſi ad quaedam ſaltem exempla adplicatio fiat, et ideo quorundam problematum ſolutiones ſubjungere conſultum ſit; primo arithmeticas quasdam proponam quaeſtiones, cum quibus deinde ex aliis quoque diſciplinis conjungam quaedam ſed facillima tantum exempla.

§. 28.

PROBLEMA. I. *Mercator quidam a nummis ſuis quotannis 100 impendit, reſiduum annuatim triente auget, et poſt tres annos fit duplo ditior. Quaeritur nummorum numerus.*

Quaeſtio latine enuntiata.	*Eadem algebraice.*
Mercator habet nummos quosdam,	x.
ex quibus anno primo 100 impendit	$x - 100$
et reliquum ad auget triente,	$x - 100 + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$
anno ſecundo expendit 100	$\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$
et reliquum ad auget triente	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$
anno tertio expendit 100	$\frac{16x-2800}{9} - 100 = \frac{16x-3700}{9}$
et reliquum auget triente	$\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27} = \frac{64x-14800}{27}$
fitque duplo ditior quam ab initio.	$\frac{64x-14800}{27} = 2x$.

Quaeſtio itaque ad aequationem $\frac{64x-14800}{27} = 2x$ redigitur, cujus reductione eruendus eſt numerus x, quod modo fiet ſequenti. Multiplicetur utrinque per 27, et fiet $64x - 14800 = 54x$, ſubtrahantur $54x$, et erit $10x - 14800 = 0$, addatur utrinque 14800, ut ſit $10x$

 =

$= 14800$. Denique dividatur per 10, et habemus x 1480, qui eſt nummorum numerus quaeſitus.

§. 29.

PROBLEMA II. *Dati ſunt numeri 20 et 17, inv… re tertium, qui a datis ablatus reſidua relinquat, … ſint in ratione* 5 : 4.

SOLVTIO. Diſtinguantur data a quaeſitis, eum… in finem data prioribus alphabeti litteris, quaeſitum… qua ex ultimis denotetur. Ponatur itaque $20 = a$, … $= b$, et ratio $5 : 4 = m : n$, numerus quaeſitus $= x$, … per conditionem problematis $a - x : b - x = m$… Hinc invenitur aequatio multiplicando media et extr… $(a - x)\, n = (b - x)\, m$

$$\text{ſive } na - nx = mb - mx$$
$$\text{add. } mx = mx$$
$$mx + na - nx = mb$$
$$\text{ſubtr. } na = na$$
$$mx - nx = mb - na$$
$$\text{id eſt } (m - n)\, x = mb - na$$
$$\text{divid. per } m - n = m - n$$
$$x = \frac{mb - na}{m - n}.$$

Problema jam ſolutum cenſetur, licet ipſe numeru… nondum detectus ſit, ſed modus tantum, eundem… datis eliciendi, quia ipſius x inventio expedita eſt, … pro a, b, m et n ſubſtituantur numeri determinati, … detecta ſit formula exprimens, quomodo per operati… nes arithmeticas ſimplices mutari debeant, ut quaeſi… fiant aequales. Sic reſtitutis valoribus $a = 20$, $b = 1$… $m = 5$, $4 = n$, eſt $x = \frac{5 \times 17 - 4 \times 20}{5 - 4} = 85 - …$ $= 5$, qui numerus, ſi ſubtrahatur a datis, relinquunt 15 et 12, quorum utique ratio eſt 5 : 4. Caterum ex h… exemplo clare perſpicitur, quantum ſit commodu…

qu…

quod calculo afferunt ſigna iſta univerſalia, ſeu ſpecies, quibus uſi ſumus. Non enim tantum ea re breviter et quam clariſſime exponitur quantitatum, circa quas quæſtio occupatur, connexio atque aliarum ab aliis dependentia, ſed et ſolutio problematis detegitur adeo generalis, ut modus innumera problemata ſpecialia ſolvendi ſimul innoteſcat. Pro ſignis, quae data denotant, ſubſtitui poſſunt, quaecunque lubet, quantitates aliae, et formula inventa ſufficit, in omnibus iſtis caſibus ſpecialibus quaeſitum inveniendi. Sic in problemate noſtro

poſito $a = 7$, $b = 9$, et $m : n = 5 : 6$, erit $x = \frac{3}{-1}$. $= -3$. Si vero a 7 ſubtrahitur -3, provenit 10, et -3 a 9 ſubtracto, invenitur 12, eſt vero utique $10 : 12 = 5 : 6$. Conf. Segneri Elementa Analyſ. finitorum. Sect. III. de Solutione problematum ſimplicium arithm. §. 140.

§. 30.

PROBLEMA III. *Punctum A in linea recta BC verſus punctum B urgetur a viribus datis* a, b, *et verſus partem oppoſitam* C *a viribus itidem datis* c, d, e. *Quaeritur, quae vis illis addenda ſit, ut punctum in aequilibrio conſtitutum quieſcat, et verſus quam partem.* p. 214.

SOLVTIO. Aequatio hujus problematis fundamentalis ſola Analyſi non invenitur. In Statica, quae eſt diſciplina, ad quam problema pertinet, demonſtratur, aequilibrium fore, ſiquidem ſumma virium abſolute ſpectatarum, quae verſus B agunt, aequalis fuerit ſummae earum, quae agunt verſus C. Si autem vires ſpectentur cum directionibus ſuis, aequilibrium erit, ſi ſumma omnium algebraica fuerit nihilum. Dicatur igitur vis quaeſita, quae prioribus addenda eſt, $= x$, ponaturque agere verſus partem B, eritque ex primo principio $a + b + x = c + d + e$. Si vero ſecundo uti velimus principio, et vires verſus B agentes poſitivae, adeoque reliquae negativae ponantur, erit $a + b + x - c - d - e = 0$, quarum aequationum quaevis ex altera terminis

 trans-

tranſpoſitis ſequitur. Ex utraque autem alia termino rum tranſpoſitione concludimus $x = c + d + e - a - b$.

Elegi hoc problema in ſe quidem facillimum, qu univerſalis ſignificatio ſignorum analyticorum adhuc di ſtinctius perſpiciatur. Aequationes enim analyticae con venienter reductae oſtendunt methodum, quaeſitum e iis, quae per litteras denotantur, quae datorum loc ſunt, vel arithmetice vel geometrice eliciendi; arithme tice ſi data expreſſa ſint per numeros; geometrice, ſ per lineas rectas exhibeantur, vel alia extenſa, quae i Geometria ſolent conſiderari, arcus puta, angulos, ſu perficies vel ſolida. Aequatio, qua x a reliquis ſeparat exhibetur, ſi recte intelligatur, utrumque laborem ae que dirigit. Neque enim ad Arithmeticam magis, quam ad Geometriam reſtricta eſt. Dentur itaque primo vi res quaeſtionis in numeris ſitque $a = 7$, $b = 2$, $c = 5$ $d = 6$, $e = 3$; erit $x = 5 + 6 + 3 - 7 - 2 = 5$, ergo eſt affirmativa, ejusque directio cadit verſus B. Si ma nente $a = 7$, $b = 2$, $c = 5$, ponatur $d = 3$, $e = 1$, erit $x = 5 + 3 + 1 - 7 - 2 = 0$. Hoc igitur caſu, cum vires datae jam ſint in aequilibrio, nulla vi ſuperaddit opus erit. Si vero ſit $a = 7$, $b = 8$, $c = 4$, $d = 3$, $e =$ 2, erit $x = 4 + 3 + 2 - 7 - 8 = -6$. Vis igitur $= 6$ verſus partem C dirigenda eſt, ut aequilibrium reſti tuatur.

Quodſi vires a, b, c, d, e, per lineas rectas dentur debeatque x geometrice reperiri, per punctum quod cunque A ducatur recta BC indefinita, ac ponantur li neae eſſe affirmativae, quae ab A verſus B protendun tur: erunt illae, quae ab A verſus C protenduntur nega tivae. Exhibeantur vires per lineas, quibus ad ſcripta ſunt litterae a, b, c, d, e, atque a puncto A verſus B ponatur AD $= c$, a puncto D itidem verſus B ponatur DE $= d$, atque a puncto E verſus eandem partem EF $= e$, erit AE $= c + d$ et AF $c + d + e$. Deinde a puncto F ver-

F verſus partem oppoſitam C ponatur FG $= a$, quia haec negativa eſt, et a puncto G iterum verſus C ponatur GH$=b$, quia et haec eſt negativa. Erit igitur AG $= c+d+e-a$, quae linea eſt affirmativa, ſed AH $= c+d+e-a-b$ erit negativa, quia ab A verſus C protenditur. Haec AH erit in hoc caſu quaeſita x, quae evadit $= 0$, ſi mutatione datorum efficiatur, ut H cadat in A, affirmativa vero, ſi ita mutentur data, ut H cadat verſus B. Si data exhibeantur per arcus circulares, vel angulos, vel ſuperficies, vel ſolida, ſimilem in modum proceditur. Cum autem linea recta ſit ſimpliciſſima quantitatum, quae in Geometria conſiderantur, atque omnium facillime tractetur, quandocunque problema per lineas rectas ſolvi poteſt, arcus, anguli, ſuperficies, ſolida, merito ſeponuntur. Conf. Segner Analyſ. finit. Sect. I. §. 8.

§. 31.

PROBLEMA IV. *Trianguli ABC ſingula latera ſunt data. Ex apice anguli A in latus oppoſitum cadit perpendicularis AD. Reperienda ſunt ſegmenta bujus lateris BD, et DC.*

SOLVTIO. Problema hoc geometricum eſt, ideo aequationem fundamentalem ejus conditiones exprimentem ipſa Geometria debet ſuppeditare, quam qui non callet, fruſtra ſolutionem tentabit. Sunt propoſitiones quaedam geometricae palmariae, quae ab eo ignorari nullo modo poſſunt, qui quaeſtionem geometricam analytice ſolvere cupit. Talia ſunt ea, quae de ſimilitudine triangulorum, deque comparationibus figurarum planarum ut et ſolidorum traduntur, et in his praeſertim theorema §phi 120. *Geom. Elem.*, quod ab inventore Pythagoricum appellatur. Praeterea circuli attributa propria atque rectarum apud circulos deſcriptarum, quales ſunt chordae, ſinus, tangentes et ſecantes, eſſe debent ſatis familiaria. Quaeſtione vero geometrica ad aequationem reducta, methodus, qua ea per analyſin ſolvitur, diverſa non eſt ab illa, qua ſolvuntur arithmeticae F. 215.

 quae-

quæſtiones. Licet ſigna, quibus in Analyſi utimur, ad Arithmeticam reſtricta non ſint, poſſintque per termi nos geometricos non minus facile, quam per arithme ticos exprimi; nihil tamen impedit, quo minus litteras quibus data a quaeſitis diſtinguimus, numeros notare po ſsamus, quibus quantitates iſtæ, ſive lineae fuerint, ſive ſuperficies aut ſolida, vel quaecunque aliæ ex unitate aſſumta exprimuntur, ſi numeri irrationales non excludan tur. Ea re calculus multum facilitatur, dum omnia ad eosdem conceptus redeunt. Sufficit, ſi ea, quae ultimo producuntur, vocabulis geometricis, ubi opus eſt, ex primere noverimus. Hoc enim facto ad inventionem quaeſiti geometricam manuducimur.

Quod igitur attinet ad problema geometricum pro poſitum, demiſſo perpendiculo AD ex A ad latus BC fiunt triangula ABD et ACD apud D rectangula. Ex theoremate vero Pythagorico, quod in Geometria Ele mentari demonſtratur, patet eſſe ABq — BDq = ADq et ACq — DCq = ADq, proinde ABq — BDq = ACq—DCq quae eſt aequatio problematis fundamentalis ſignis ana lyticis exprimenda. Sit igitur $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$, $BD = x$, erit $DC = a - x$, hinc $DCq = aa - 2ax + xx$, et aequatio problematis fundamentalis erit $bb - xx = cc - aa + 2ax - xx$.

Hinc $bb = cc - aa + 2ax$

$$aa - cc + aa = 2ax$$

$$\text{et } \frac{aa + bb - cc}{2a} = x$$

$$\text{vel } \tfrac{1}{2}a + \frac{bb - cc}{2a} = x$$

et facto $bb - cc$ reſoluto in ſuos factores $b + c$ et $b - c$ erit

$$x = \tfrac{1}{2}a + \frac{(b+c)(b-c)}{2a}$$

Aequati

Aequatio haec ultima non tantum oſtendit modum, ſegmentum quaeſitum BD per arithmeticam reperiundi, lateribus BC, AB, AC, datis per numeros expreſſis, ſed docet quoque inventionem ipſius BD per lineas in plano deſcriptas. Enuntiabitur enim iſta aequatio geometrice, ſi dicatur ſegmentum iſtud componi, ſi $\frac{1}{2}a =$ BE, dimidium lateris BC, augeatur ipſa $\frac{(b+c)(b-c)}{2a} =$ ED, quarta proportionali ad $2a$ (duplum lateris BC) $b+c$ (ſummam laterum BA et AC) et $b-c$ (eorundem laterum differentiam), et hoc quidem, ſi BA ipſa AC major fuerit. Si enim BA ipſa AC minor ſit, erit $b-c$ quantitas negativa, ideoque et ED $= \frac{(b+c)(b-c)}{2a}$ pariter negativa. Ideo hoc caſu dicendum eſt, ſegmentum BD inveniri, ſi dimidium lateris BC quarta proportionali ad duplum lateris BC, ſummam laterum BA et AC, atque eorundem laterum differentiam minuatur. Jam vero inventio quaeſiti x per lineas in plano deſcriptas ultro ſe offert. Biſſectio enim lineae rectae ut et modus ex datis tribus rectis quartam proportionalem inveniendi docetur in Geometria Elementari. In praeſenti caſu per ipſum problema ſuppeditatur conſtructio longe ſimplicior ea, quam formula algebraica docet. Compoſito enim ex datis lateribus triangulo ABC demiſſaque ex A ad BC perpendiculari AD datur BD. Idem et alias ſaepe evenit, ut Geometria facile detegat, quod formulae algebraicae non ſine ambagibus reperire docent. Atque tum nullus alius formularum uſus eſt, quam ut oſtendant modum quaeſitum arithmetice per numeros exprimendi, ſi data per numeros expreſſa ſint. Segner Elem. Analyſ. finit. Sect. IV. § 206–213.

§. 32.

Plures ſaepius quantitates inveniendas poſcit problema algebraicum. Tum vero, ſi ſatis determinatum ſit problema, ex conditionibus ejusdem tot eruendae ſunt aequa-

a equationes fundamentales, quot quantitates incognit quæruntur. Una in eam rem aequatio non ſufficit, p ote per quam unum tantum quaeſitorum determinat e x caeteris tanquam datis. Si igitur primo duae inc gnitae quantitates x et y quaerendae proponuntur, conditionibus problematis eruendae ſunt duae æquati nes, quæ ſint A et B, et quarum quaelibet utramque i cognitam involvit. Ex una harum aequationum A qu ratur valor unius quaeſitorum x, isque in altera B p ipſo x ſubſtituatur, quo facto ex hac aequatione inc gnita x eliminabitur, atque hæc aequatio praeter qu ſitam y nullam aliam incognitam continebit. Hujus i cognitæ y valor ex eadem aequatione B ſecundum præ cepta huc uſque tradita jam poterit inveniri. Subſtitu tus hic valor in aequatione A etiam valorem alterius i cognitae x determinabit. Simili vero modo tractant problemata omnia, in quibus et plures duabus incogn tae quantitates proponuntur inveniendae. Totidem quationibus opus eſt, quot ſunt quantitates quaeſit Sint quantitates iſtae x, y, z, u, et aequationes A, B, D. Quaeratur valor ipſius x ex prima æquatione, eoq in reliquis B, C, D, ſubſtituto, littera x ex his aequati nibus eliminabitur. Deinde valor litteræ y quaerat ex aequatione, in quam ita mutata eſt B, ac ſubſtituat in aequationibus, quae ortae ſunt ex C, D, ut ex li littera y eliminetur. Tandem valor litteræ z quaeſit ex aequatione ex C orta introducetur in eam, quae ort eſt ex D, quaeque jam praeter u nullam continebit litt ram incognitam, cum reliquae jam eliminatae ſint. D bitur igitur, per hanc aequationem incognita u, qua r perta regrediendo et reliquae incognitae dabuntur per quationes præcedentes. Secundum hæc ſolvi pote problema, quod ſequitur.

PROBLEMA. *Quaeruntur duo numeri, a quorum p ſteriori ſi unitas dematur, addaturque ad priorem, fi*

pri

prior alterius duplus; ſi vero a priori detracta unitas addatur ad poſteriorem, fiant numeri aequales.

SOLVTIO. Sit prior numerus x, alter y, erit per conditiones problematis

$$x+1 = 2(y-1) \text{ vel } x+1 = 2y-2$$
$$\text{et } x-1 = y+1.$$

Quæratur valor ipſius x ex una harum æquationum, qui ex priori quæſitus erit $x = 2y - 3$. Hic numeri x valor ſubſtituatur in æquationum initio repertarum alteram, quæ hoc facto mutabitur in eam $2y - 3 - 1 = y + 1$, ex qua jam quantitas x eliminata eſt, et ex qua deducitur $y = 5$. Detecto ſic numero y reperitur x in æquatione $x = 2y - 3$, in locum litteræ y ſubſtituendo ejus valorem ita repertum 5, quo fit $x = 10 - 3 = 7$.

Poterat quoque incognita x eliminari *per aequalitatem valorum* ipſius. Si enim ex qualibet aequationum initio repertarum quærantur valores ipſius x, qui erunt $x = 2y - 3$, et $x = y + 2$, hi valores ſibi æquales erunt, ideoque novam ſuppeditabunt aequationem $2y - 3 = y + 2$, alteram tantum incognitam y involventem, ex hac vero aequatione valor ipſius y quæri et in una priorum ſubſtitui debet, quo facto et hac via valor utriusque incognitæ ex ſolis cognitis poterit definiri. Similem methodum etiam in reſolvendis quaeſtionibus, quae plures duabus incognitas poſcunt inveniendas, adhiberi poſſe manifeſtum eſt. Conf. Segneri Anal. finit. Sect. III. §. 172.

§. 33.

Notari hic quoque meretur, quod ex problematis propoſiti conditionibus eruantur ſaepe æquationes non ſimplices, ex quibus tamen idonea reductione altiores incognitae dignitates eliminari, et duæ æquationes non ſimplices ad unam ſimplicem unius incognitæ revocari poſſunt. Specimen hujus rei exhibet ſequens. De methodo eliminationis

PROBLEMA. *Trianguli rectanguli ABC, cujus perimeter et area dantur, invenienda eſt hypothenuſa BC.*

SOL.

F. 215. SOL. Licet unum trianguli ABC latus BC tantum quaeratur, quod dicetur x, poteſt tamen et AB per litteram y denominatum in æquationem introduci. Quo facto autem duabus opus erit æquationibus, ut litteræ hæc viciſſim eliminari queat. Sit perimeter AB + BC + CA = a, erit AC = $a - x - y$. Sit area trianguli = bb, atque æquationum, quæ ad ſolutionem requiruntur, primam dabit idea trianguli rectanguli, alteram ſuppeditabit cognita ejus area. Quia enim BCq = ABq + ACq, exinde deducitur prima æquatio $x^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy + y^2$, vel $0 = 2y^2 + 2xy - 2ay - 2ax + a^2$. Area trianguli eſt $\frac{1}{2}$BA × AC, id eſt $\frac{1}{2}y(a-x-y) = bb$, ſive $2bb = -yy - xy + ay$, et $4bb = -2yy - 2xy + 2ay$, quæ eſt æquatio ſecunda. Hujus æquationis membra adduntur membris primae æquationis hoc modo

$$
\begin{array}{l}
0 = 2y^2 + 2xy - 2ay - 2ax + a^2 \\
4bb = -2y^2 - 2xy + 2ay \\
\hline
\end{array}
$$

eritque $4bb = -2ax + a^2$

Ex hac æquatione jam concluditur

$$2ax = aa - 4bb$$

$$\text{atque } x = \frac{aa - 4bb}{2a} = \tfrac{1}{2}a - \frac{2bb}{a}.$$

Notanda eſt hæc methodus, qua $2y^2$ ex æquationibus eliminatum eſt. Singulare enim hoc eſt, quod $2xy$ eſt $2ay$ ſimul exciderint, et raro evenit. Quilibet vero æquationis terminus ſeorſim per aliam æquationem eliminari ſemper poteſt illa methodo, qua hic eliminatus eſt terminus $2y^2$. Neceſſe eſt, in altera illa æquatione litteram eliminandam ineſſe. Tumque multiplicabitur ea littera ſic, ut producatur factum eliminandum, atque in eundem multiplicatorem ducentur et termini æquationis reliqui, quod ut in caſu præſenti contingeret, æquationis $2bb = -yy - xy + ay$ termini omnes duplicati ſunt. Interdum quoque dividendi

ſunt

ſunt termini æquationis ejusmodi, vel quoque termini alterius ipſi multiplicandi. Deinde æquationes addendo vel ſubtrahendo ita uniuntur, ut terminus ita præparatus excidat. Si itaque ex æquatione $myy - axy = bx^2$ per alteram iſtam $bcy - 2nyy = 3cfx$ eliminandus eſt terminus, in quo eſt yy; multiplico terminos poſterioris æquationis per m, quod yy multiplicat in priori, prioris vero æquationis terminos multiplico per $2n$, qui factor multiplicat yy in poſteriori æquatione. Sic prodeunt æquationes

$$2mnyy - 2naxy = 2nbxx$$
$$mbcy - 2mnyy = 3mcfx$$

quibus additis invenitur

$$mbcy - 2naxy = 2nbxx + 3mcfx$$

ubi yy non deprehenditur.

§. 34.

Simili operatione repetita duae æquationes ſic uniri poſſunt, ut aliqua ex iis littera penitus excidat. Sint datæ æquationes

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$
$$\delta z^2 + \varepsilon z + \vartheta = 0$$

ſic uniendæ, ut excidat z. Ducta priori in δ et poſteriori in $-\alpha$ prodeunt æquationes

$$\alpha\delta z^2 + \beta\delta z + \gamma\delta = 0$$
$$-\alpha\delta z^2 - \alpha\varepsilon z - \alpha\vartheta = 0$$

quibus additis fit

$$(\beta\delta - \alpha\varepsilon)\, z + \delta\gamma - \alpha\vartheta = 0$$

in qua aequatione z^2 non ineſt. Si jam quoque z eliminandum ſit, ducatur hæc æquatio in z, ut fiat

$$(\beta\delta - \alpha\varepsilon)\, z^2 + (\delta\gamma - \alpha\vartheta)\, z = 0$$

ſumtaque una ex ſuperioribus, in quibus z^2 pariter ineſt, illud eliminetur eodem modo. Sumatur itaque

αz^2

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$
$$(\beta\delta - \alpha\varepsilon)z^2 + (\delta\gamma - \alpha\vartheta)z = 0$$

atque multiplicata priori per $\beta\delta - \alpha\varepsilon$ et poſteriori p[er] $-\alpha$ fit

$$(\beta\delta-\alpha\varepsilon)\alpha z^2 + (\beta\delta-\alpha\varepsilon)\beta z + (\beta\delta-\alpha\varepsilon)\gamma =$$
$$\text{et} - (\beta\delta-\alpha\varepsilon)\alpha z^2 - (\delta\gamma-\alpha\vartheta)\alpha z = 0$$

quibus additis habetur

$$(\beta\delta-\alpha\varepsilon)\beta z - (\delta\gamma-\alpha\vartheta)\alpha z + (\beta\delta-\alpha\varepsilon)\gamma =$$

in qua z^2 non invenitur.

Ut denique z eliminetur, æquationes duæ, in quibus z^2 non ineſt, eodem modo tractandæ ſunt: quæquidem ſi loco $\beta\delta - \alpha\varepsilon$ ponitur $\varkappa$ et π loco $\delta\gamma - \alpha\vartheta$ brevius ſic poſſunt exprimi

$$\varkappa z + \pi = 0$$
$$\varkappa\beta z - \pi\alpha z + \varkappa\gamma = 0$$

Priori jam per $\varkappa\beta - \pi\alpha$ et poſteriori per $-\varkappa$ multiplicata eædem ſic mutantur

$$\varkappa\varkappa\beta z - \pi\alpha\varkappa z + \varkappa\beta\pi - \pi\pi\alpha = 0$$
$$-\varkappa\varkappa\beta z + \pi\alpha\varkappa z - \varkappa\varkappa\gamma = 0$$

et facta additione prodit

$$\beta\varkappa\pi - \alpha\pi\pi - \gamma\varkappa\varkappa = 0$$

ſicque z prorſus eliminata eſt. Eodem quoque modo eliminabitur z, ſi præter z^2 atque z in æquationibus propoſitis fuerit z^3 vel z^4 vel ſuperior quoque ipſius z poteſtas; ſed labore tanto majori, quo altior eſt hæc dignitas. Conf. Segneri Anal. fin. Sect. IV. §. 228 — 234.

§. 35.

Ceterum ex iis, quae de æquationibus ſimplicibu[s] hucusque ſunt expoſita, patet, quod omnis ejusmodi æquatio ſimplex reduci poſſit ad formam $x = A$, ubi A denotat quantitatem ex cognitis utcunque complicatam. Ipſa vero *reductio* abſolvitur ea *transpoſitione*, qua termini, in quibus incognitum ineſt, in unam æquationis membrum transferuntur, ii vero, in quibus nihil incognit

gniti ineſt, in alteram; deinde *unione*, qua auferuntur, quæ ſeſe deſtruunt et reliqua, quantum fieri poteſt, coaleſcunt, quaque multiplicatores ejusdem quantitatis colligantur in unum multiplicatorem complicatum; denique *diviſione* per multiplicatorem quantitatis incognitæ vel *multiplicatione* per diviſorem ejusdem. Verum ut transpoſitio atque unio legitime abſolvi queat, et absque multo labore, copula ſaepe auferenda eſt et terminus complicatus in ſuos ſimplices ſolvendus, atque præterea quilibet denominator tollendus, quo quantitas incognita adficitur. Hoc ultimum cum et aliis modis effici poſſit, commodiſſime peragitur multiplicando primum omnes æquationis terminos per unum denominatorem, tum per alterum, deinde per tertium, et ſic porro per reliquorum quemlibet, ſi plures fuerint. Poſſunt quoque omnes æquationes termini multiplicari per factum ex omnibus denominatoribus, atque denominatores deinde auferri per regulas, quibus fractiones ſpuriæ integro æquipollentes reducuntur ad integros.
inf. Segneri Elem. Anal. fin. Sect. III. §. 129.

SECTIO III.

DE CALCVLO ANALYTICO-TRIGONOMETRICO.

§. 36.

Angulus non ingreditur æquationes, quibus problemata geometrica ſolvuntur, niſi forte cum alio angulo comparetur, quia magnitudo anguli per lineas, ſuperficies vel ſolida exprimi nequit. Ejus loco ſemper ratio aliqua adhibetur, ſic ut dato angulo ponatur ratio

ea data eſſe, et data ratione datus angulus. Scilicet
angulus A detur, ducaturque a puncto B, in aliquo eju
F.216. laterum utcunque aſſumto, ad alterum latus perpendic
laris BC, datur ratio AB : BC et ratio AC : BC, qua
que ex his fluit, ratio AB : AC. Determinantur eni
per rectam hanc BC omnes trianguli ABC anguli, si
ut alii prodire non poſſint, quodcunque laterum AB
AC utcunque productorum punctum ſumatur loco
Fiunt enim omnia triangula ita deſcripta ſimilia, atqu
hinc ratio lateris maximi ad latus angulo A oppoſitum i
omnibus eadem atque æqualis eſt rationi AB : BC, et ſi
rationes reliquæ. Contra ſi detur ratio AC : BC, ſiv
per has rectas detur, ſive per alias quaſcunque, et con
nectantur binæ quaevis earum rectarum ſub angulo rect
ſi præterea ducatur latus tertium ut AB, triangula nun
quoque ſimilia ~~quoque~~ fiunt, atque hinc anguli A vel
in omnibus iidem. Eodem modo eosdem angulos
per rationem AB : AC, vel AB : BC dari, ex iis, qu
de ſimilitudine triangulorum Geometria Elementaris do
cet, facile apparet. Erit vero AB : BC ratio radii a
ſinum anguli A, et AB : AC ratio radii ad ejusdem an
guli coſinum, vel ad ſinum anguli B. Porro eſt AC : C
ratio radii ad tangentem anguli A, et BC : CA ratio radi
ad tangentem anguli B. Quando autem arcuum ve
angulorum ſinus, coſinus, tangentes, et cotangentes i
calculum introducuntur, non abſolutæ tantum quantitati
ſed poſitionis etiam ejus, quae per ſigna + vel − in
dicatur, ratio haberi debet. Ea enim re arcus quadrant
minores vel anguli acuti ab eorum ſupplementis ad duo
quadrantes vel duos angulos rectos diſtingui poſſunt.
Segneri Elem. An. fin. Sect. IV. ?. 21?

§. 37.

Quod igitur primo attinet ad ſinus arcuum circul
i um vel angulorum, qui ab iis arcubus menſurantur
F.217. patet, quod ſinus anguli parvi et ipſe parvus ſit, tanto
que minus diſcernatur ab arcu ſuo, quo minor eſt an

gulus

gulus. Creſcente autem angulo acuto creſcit ſinus, eſtque finis creſcendi angulus rectus ACD et quadrans AD, cujus ſinus eſt ipſe radius. Ab hoc enim termino ſi porro creſcat angulus et ejus arcus, ſinus decreſcit ſic, ut ad angulum duobus rectis aequalem prorſus evaneſcat. Ubique autem ſinus anguli cum ſinu ſupplementi ſui ad duos rectos idem eſt, unde ſi FG ſinus anguli acuti ACF poſitivus eſſe ponitur, etiam ſinus anguli obtuſi FCB illi ſupra diametrum contigui et proinde duobus rectis minoris poſitivus erit. Evaneſcente angulo ACF etiam ſinus ipſius evaneſcit, ſed ejus coſinus æquatur radio. Creſcente vero angulo et cum eodem ſinu ipſius, coſinus ejusdem anguli decreſcit, atque prorſus evaneſcit, quando angulus æqualis eſt recto ACD. Ab hoc autem termino ſi porro creſcat angulus, coſinus in parte diametri priori CA oppoſita denuo creſcit, fitque radio æqualis, quando ipſe angulus duobus rectis æqualis eſt. Ideo ſi coſinus anguli acuti poſitivus eſſe ponatur, coſinus anguli obtuſi duobus rectis minoris fit negativus. Sinus OP anguli obtuſi ACO duobus rectis majoris, et arcus ſemiperipheria majoris ADBO eſt negativus et creſcit, donec angulus fiat tribus rectis æqualis, quo caſu radio negative ſumtæ æquatur. Ab hoc termino ulterius creſcente angulo, ſinus decreſcit, donec angulus quatuor rectis et arcus integræ peripheriæ æqualis ſit, ubi ſinus iterum eſt = 0. Coſinus CP anguli obtuſi duobus rectis majoris negativus eſt et creſcente angulo decreſcit, donec fiat tribus rectis æqualis, ubi coſinus nihilo aequatur. Ab hoc termino ſi creſcat angulus coſinus iterum fit poſitivus et creſcit, donec angulus ſit quatuor rectis aequalis, ubi coſinus iterum radio aequatur.

§. 38.

Circulum cujus diameter eſt AB et centrum C, in A tangat recta utrinque in indefinitum producta. Diametro AB normaliter inſiſtat alia diameter DE, et apud D eundem circulum tangat

alia recta pariter indefinita. Quodſi jam in quadrant
AD ſumatur punctum F quodcunque, atque per F et (
ducatur tertia recta, quae duas priores rectas circulum
tangentes apud H et I ſecet; erit AH tangens arcus A
et anguli ACF, et DI tangens arcus FD et anguli FCI
qui eſt prioris ACF complementum ad angulum rectum
Proinde ID cotangens erit arcus AF quadrante mino
ris vel anguli acuti ACF. Quodſi igitur tangentium illa
quae cadunt ad partem D diametri AB, pro poſitivis ha
beantur, cotangentium vero illae, quae verſus partem
diametri DE protenduntur: non tantum tangens angu
acuti, vel arcus quadrante minoris, ſed et ejus cotan
gens erit poſitiva. Creſcente angulo acuto ACF, e
proinde puncto F verſus D fluente, recta FO circa cen
trum C convertetur, tangens AH creſcet, cotangen
vero DI decreſcet, donec puncto F cum D coinciden
te, ubi arcus AF fit quadrans et angulus ACF rectus
tangens AH fit infinite magna, quippe cum recta CI
parallela, cotangens DI vero eſt nihilo aequalis. S
punctum F a termino D porro fluat per quadrantem DI
ubi pervenit in K, recta FO revoluta eſt in KL, qu
rectas circulum tangentes apud M et N ſecat. Tangen
igitur arcus DK, quo ADK quadrantem excedit, ve
anguli DCK, quo angulus ACK rectum excedit, atque
adeo anguli ACK vel arcus ADK cotangens, eſt DM
quae negativa eſt. Tangens ejus anguli ACK vel arcu
ADK alia eſſe nequit, quam AN, quia KL producta re
ctam apud arcus initium A circulum tangentem praete
N nuſpiam ſecat. Tangens igitur anguli obtuſi duobu
rectis minoris pariter ac ejus cotangens eſt negativa. An
guli obtuſi duobus rectis aequalis tangens evaneſcit, e
ejus cotangens eſt $= -\infty$. Quodſi ab hoc termino ul
terius creſcat angulus, ejus tangens pariter ac cotan
gens ex ſtatu negativo indicit in poſitivum, ille quidem
per terminum $= 0$, et hic per terminum $= \infty$ tranſiens
et quidem tangens creſcit, cotangens vero decreſcit

done

donec angulus aequalis evadat tribus rectis, ubi eſt tangens ipſius $= \infty$ et cotangens $= 0$. Ulterius creſcente angulo tangens et cotangens iterum fiunt negativi, cotangens quidem creſcendo tangens vero decreſcendo, donec ad terminum, ubi angulus quatuor rectis aequalis eſt, tangens evaneſcat et cotangens infinita evadat. Sinus anguli denotabitur per *ſin*, coſinus per *cos*, tangens per *tang*, et cotangens per *cot*, litteris, quae angulos vel arcus denotant, praeſcriptis, hunc in modum *ſin* A, *cos* A, *tang* A, *cot* A. Radii ſignum erit *r*, qui tamen in hujusmodi calculis ſumitur unitati aequalis, eo quod ratio ipſius ad ſinum, tangentem, coſinum et cotangentem eadem perpetuo ſit, quicunque ſumatur radius.

§. 39.

Quodſi π denotet ſemicirculum, vel angulum duobus rectis aequalem; erit $ſin.\ 0\pi = 0$, $coſ.\ 0\pi = 1$, $ſin.\ \frac{1}{2}\pi = 1$, $cos\ \frac{1}{2}\pi = 0$, $ſin\ \pi = 0$, $coſ.\ \pi = -1$, $ſin\ \frac{3}{2}\pi = -1$, $coſ\ \frac{3}{2}\pi = 0$, $ſin.\ 2\pi = 0$, $cos\ 2\pi = 1$, $tang.\ 0\pi = 0$, $cot.\ 0\pi = \infty$, $tang.\ \frac{1}{2}\pi = \infty$, $cot.\ \frac{1}{2}\pi = 0$, $tang.\ \pi = 0$, $cot.\ \pi = -\infty$, $tang.\ \frac{3}{2}\pi = \infty$, $cot.\ \frac{3}{2}\pi = 0$, $tang.\ 2\pi = 0$, $cot.\ 2\pi = -\infty$. Denotante z arcum circuli, vel angulum quemcunque, erit $coſ.\ z = ſin.\ (\frac{1}{2}\pi - z)$, $ſin\ z = cos\ (\frac{1}{2}\pi - z)$. *Coſinus* GC et ſinus FQ ejusdem anguli ACF perpetuo ſunt catheti trianguli rectanguli FCG, cujus hypothenuſa eſt radius CF. Ideo eſt $(ſin.\ z)^2 + (coſ.\ z)^2 = r^2 = 1$, denotante z angulum quemcunque ACF. Praeterea eſt CA (1) : CG (*coſ.* z) = AH (*tang.* z) : GF (*ſin.* z), proinde $ſin.\ z = cos\ z \times tang.\ z$, $tang.\ z = \frac{ſin.\ z}{cos.\ z}$, et $cos\ z = \frac{ſin.\ z}{tang.\ z}$.

Porro CD (1) : CQ (*ſin.* z) = DI (*cot.* z) : FQ (*cos.* z) ideo quoque $ſin.\ z = \frac{cos.\ z}{cot.\ z}$, $cos\ z = ſin.\ z \times$

f. 217.

$cot.z$; $cot.\ z = \frac{cos.\ z}{ſin.\ z}$. Denique eſt HA : AC = C[l]
: DI, vel $tang.\ z : r = r : cot.z$, hinc radii quadratu[m]
aequale rectangulo ex tangente in cotangentem, ide[o]
que $tang.\ z \times cot.z = 1$, $tang.z = \frac{1}{cot.z}$ atque $cot.z$ =
$\frac{1}{tang.z}$. Quodſi igitur α et β denotent duos angul[os]
diverſos quoscunque, erit $tang.\ \alpha \times cot.\alpha = 1 = tang.$
$\beta \times cot.\beta$, proinde $tang.\ \alpha : tang.\beta = cot.\ \beta : cot.\alpha$.
Tangentes igitur et cotangentes duorum angulorum
quorumcunque ſunt in reciproca proportione.

§. 40.

F. 218. Ex formulis inventis pro ſinu coſinu tangente ve[l]
cotangente anguli dati ſimul eliciuntur formulæ pro ſum
ma vel differentia duorum angulorum datorum. Si
enim angulus GAK = α et CAG = β. Ducantur per
pendiculares GI = $ſin.\ \alpha$, CD = $ſin\ \beta$; CB = $ſin\ (\alpha + \beta)$
erit AI = $cos.\ \alpha$, AD = $cos.\ \beta$, et AB = $cos\ (\alpha + \beta)$.
Ex D ducantur ad BC et AK perpendiculares DE et DH
et fiet AG : GI = AD : DH, vel $1 : ſin\ \alpha = cos\ \beta$: DH
$= ſin\ \alpha \times cos\ \beta$, praeterea AG : AI = CD : CE vel 1 :
$cos\ \alpha = ſin\ \beta$: CE $= cos\ \alpha \times ſin\ \beta$. Proinde eſt CE +
DH = CE + EB $= ſin\ (\alpha + \beta) = ſin\ \alpha \times cos\ \beta + cos\ \alpha$
$\times ſin\ \beta$. Poſito $\alpha = \beta$ habetur ſinus anguli dupli $ſin$
$2\alpha = ſin\ (\alpha + \alpha) = ſin\ \alpha \times cos\ \alpha + cos\ \alpha \times ſin\ \alpha = 2\,ſin$
$\alpha \times cos\ \alpha$. Porro eſt AG : AI = AD : AH, vel 1 : cos
$\alpha = cos\ \beta$: AH $= cos\ \alpha \times cos\ \beta$, et AG : GI = CD : DE
vel $1 : ſin\ \alpha = ſin\ \beta$: DE $= ſin\ \alpha \times ſin\ \beta$. Proinde AB
= AH − BH = AH − DE $= cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha \times$
$cos\ \beta - ſin\ \alpha \times ſin\ \beta$. Poſito igitur $\alpha = \beta$, habetur
coſinus anguli dupli $cos\ 2\alpha = cos\ (\alpha + \alpha) = cos\ \alpha^2 -$
$ſin\ \alpha^2$. Quodſi quaeratur $ſin\ (\alpha - \beta)$ et $cos\ (\alpha - \beta)$
angul

angulus β eſt negativus coſinu manente poſitivo; proinde eſt $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\times\cos\beta-\cos\alpha\times\sin\beta$ et $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\times\cos\beta+\sin\alpha\times\sin\beta$.

§. 41.

Ex hisce denique inveniuntur formulæ pro tangentibus et cotangentibus ſummae vel differentiae duorum angulorum. Eſt enim $tang(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ $=\frac{\sin\alpha\times\cos\beta+\cos\alpha\times\sin\beta}{\cos\alpha\times\cos\beta-\sin\alpha\times\sin\beta}$, quae eſt formula indicans, quo modo ex datis ſinubus et coſinubus duorum angulorum invenitur tangens ſummae eorundem. Poteſt vero ex eadem elici alia formula exprimens, quomodo ex datis tangentibus angulorum α et β inveniri poſſit tangens ſummae eorundem. Eſt enim $tang.\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ hinc $(tang.\,\alpha)^2=\frac{(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2}$, praeterea eſt $\cos\alpha^2=1-\sin\alpha^2$, proinde $tang\,\alpha^2=\frac{\sin\alpha^2}{1-\sin\alpha^2}$; $\sin\alpha^2=tang\,\alpha^2-\sin\alpha^2\times tang\,\alpha^2$, $\sin\alpha^2+\sin\alpha^2\times tang\,\alpha^2=tang\,\alpha^2$; $(1+tang\,\alpha^2)\sin\alpha^2=tang\,\alpha^2$, $\sin\alpha^2=\frac{tang\,\alpha^2}{1+tang\,\alpha^2}$ hincque $\sin\alpha=\frac{tang\,\alpha}{\sqrt{(1+tang\,\alpha^2)}}$. Ulterius quia $\sin\alpha^2=1-\cos\alpha^2$, eſt $tang.\,\alpha^2=\frac{1-\cos\alpha^2}{\cos\alpha^2}$; $tang\,\alpha^2\times\cos\alpha^2=1-\cos\alpha^2$, $tang\,\alpha^2\times\cos\alpha^2+\cos\alpha^2=1$; $(1+tang\,\alpha^2)\cos\alpha^2=1$, $\cos\alpha^2=\frac{1}{1+tang\,\alpha^2}$, ideoque $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{(1+tang\,\alpha^2)}}$. Sic quoque patet,

 eſſe

eſſe ſin $\beta = \frac{tang.\,\beta}{\sqrt{(1+tang\,\beta^2}}$ et $cos\,\beta = \frac{1}{\sqrt{(1+tang\,\beta^2}}$

quibus valoribus ſubſtitutis fiet $tang\,(\alpha+\beta) =$

$$\frac{\frac{tang\,\alpha}{\sqrt{(1+tg.\alpha^2)}} \times \frac{1}{\sqrt{(1+tg.\beta^2)}} + \frac{tang\,\beta}{\sqrt{(1+tg.\beta)}} \times \frac{1}{\sqrt{(1+t.\alpha}}}{\frac{1}{\sqrt{(1+tang\,\alpha^2)}} \times \frac{1}{\sqrt{(1+t.\beta^2)}} - \frac{tang\,\alpha}{\sqrt{(1+t.\alpha^2)}} \times \frac{tang\,\beta}{\sqrt{(1+t\beta^2}}}$$

$$= \frac{tang\,\alpha + tang\,\beta}{\sqrt{(1+tg.\alpha^2)}\sqrt{(1+tg.\beta^2)}} : \frac{1 - tang\,\alpha \times tang\,\beta}{\sqrt{(1+t.\alpha^2)} \times \sqrt{(1+t.\beta}}$$

$= \frac{tang\,\alpha + tang\,\beta}{1 - tang\,\alpha \times tang\,\beta}$. Anguli negativi tangens e negativus, ideo $tang\,(\alpha-\beta) = \frac{tang\,\alpha - tang\,\beta}{1+tang\,\alpha \times tang\,\beta}$.

Sic quoque invenitur $cot\,(\alpha+\beta) = \frac{cos\,(\alpha+\beta)}{ſin\,(\alpha+\beta)} =$

$$\frac{cos\,\alpha \times cos\,\beta - ſin\,\alpha \times ſin\,\beta}{ſin\,\alpha \times cos\,\beta + ſin\,\beta \times cos\,\alpha} = \frac{1 - tang\,\alpha \times tang\,\beta}{tang\,\alpha + tang\,\beta}$$

atque $cot\,(\alpha-\beta) = \frac{1+tang\,\alpha \times tang\,\beta}{tang\,\alpha - tang\,\beta}$.

§. 42.

Per haec inveniuntur formulae analyticae angulum vel latus trianguli rectilinei quodcunque exprimentes. Sit igitur primo triangulum ABC apud C rectangulum,

F.216. et $AB = a$, $BC = b$, $CA = c$, angulus $A = \alpha$, et erit

$a : b = 1 : ſin\,A$, $b : c = 1 : cos\,A$, ideo $ſin\,A = \frac{b}{a}$,

$cos\,A = \frac{c}{b}$, $b = a\,ſin\,\alpha$, $c = b\,cos\,\alpha$, $a = \frac{b}{ſin\,\alpha}$.

$b =$

$b = \frac{c}{\cos \alpha}$. Si angulus B ponatur $= \beta$, erit $a : c = 1 : \text{ſin}\,\beta$, et $a : b = 1 : \cos\beta$, proinde $\text{ſin}\,\beta = \frac{c}{a}$, et $\cos\beta = \frac{b}{a}$, $c = a\,\text{ſin}\,\beta$, et $b = a\cos\beta$, $a = \frac{c}{\text{ſin}\,\beta} = \frac{b}{\cos\beta}$. fig. 219.

Quodſi in triangulo obliq. ABC quaeratur angulus quicunque ut B, qui ponatur $= \varphi$, et ſimul dati ſint reliqui anguli α et c, erit $\varphi + \alpha + c = 180°$, proinde $\varphi = 180° - (\alpha + c)$, et hinc $\text{ſin}\,\varphi = \text{ſin}\,(\alpha + c)$. Si unus tantum ex reliquis datur, ſimul dari debent duo latera, quae aut angulum datum comprehendent, aut non. Poſteriori caſu, ſi detur $AC = a$, $BC = b$, et ang. $A = \alpha$, erit $b : a = \text{ſin}\,\alpha : \text{ſin}\,\varphi$, hinc $\text{ſin}\,\varphi = \frac{a\,\text{ſin}\,\alpha}{b}$. Si angulus datus ſit $C = \alpha$ et latera data $AC = a$ et $BC = b$, angulus quaeſitus $BAC = \varphi$; ducatur BD ad AC perpendicularis, eritque $b : CD = 1 : \cos\alpha$, et $b : BD = 1 : \text{ſin}\,\alpha$, hinc $CD = b\cos\alpha$, et $BD = b\,\text{ſin}\,\alpha$, hincque porro in figura 219. $AD = a - b\cos\alpha$ et in figura 220. $AD = a + b\cos\alpha$. Praeterea eſt $AD : BD = 1 : \text{tang}\,\varphi$, proinde in figura 219 $BD = AD \times \text{tang}\,\varphi = (a - b\cos\alpha)\,\text{tang}\,\varphi$, ex quo fit $b\,\text{ſin}\,\alpha = (a - b\cos\alpha)\,\text{tang}\,\varphi$, et $\text{tang}\,\varphi = \frac{b\,\text{ſin}\,\alpha}{a - b\cos\alpha}$. In figura 220 vero eſt $BD = AD \times \text{tang}\,\varphi = (a + b\cos\alpha)\,\text{tang}\,\varphi = b\,\text{ſin}\,\alpha$, ideo $\text{tang}\,\varphi = \frac{b\,\text{ſin}\,\alpha}{a + b\cos\alpha}$.

§. 43.

Datis omnibus trianguli rectilinei lateribus inveniatur angulus quicunque ut $BCA = \psi$ ſequentem in modum. Ducatur perpendicularis BD et ſtatuatur angulus $BAC = \varphi$, erit $BD = b\,\text{ſin}\,\psi$, et $BD = c\,\text{ſin}\,\varphi$, $AD =$

$c.\cos\phi$, et proinde DC $= a - c\cos\phi = b\cos\psi$, ex qu
fit $aa - 2ca\cos\phi + c^2\cos\phi^2 = bb\cos\psi^2$. Eſt ver
$\cos\psi^2 = 1 - \sin\psi^2$, et ex $b\sin\psi = c\sin\phi$ fit $\sin$

$$\psi^2 = \frac{c^2\sin\phi^2}{bb}.$$ Proinde eſt $aa - 2ac.\cos\phi + c^2$ c

$$\phi^2 = bb\left(1 - \frac{c^2\sin\phi^2}{bb}\right) = b^2 - \frac{bb\,cc\sin\phi^2}{bb} =$$

$bb - cc\sin\phi^2$, ex quo concluditur $aa - 2ac\cos\phi = bb$ - $cc\sin\phi^2 - cc.\cos\phi^2 = bb - cc$ et porro ob $c.\cos\phi = a$ - $b\cos\psi$ provenit $-aa + 2ab\cos\psi = bb - cc$, atque c

$$\psi = \frac{aa + bb - cc}{2ab}.$$ Notandum eſt, quod hic calcu-lus adcommodatus ſit figurae 219, in qua perpendicula-ris BD cadit intra triangulum. Quodſi ea extra trian-gulum cadat, ut in figura 220, manet $b\sin\psi =$ BD = $c\sin\phi$, eſt vero $c\cos\phi =$ AD $= a +$ CD $= a + b\cos\psi$ proinde $aa + 2ab\cos\psi + bb\cos\psi^2 = cc\cos\phi^2$. Se $\cos\phi^2 = 1 - \sin\phi^2$, et ob $b\sin\psi = c\sin\phi$ erit $\sin\phi$

$$= \frac{bb\sin\psi^2}{cc},$$ ideo eſt $aa + 2ab\cos\psi + bb\cos\psi^2 =$

$$\left(1 - \frac{bb\sin\psi^2}{cc}\right) = cc - \frac{cc\,bb\sin\psi^2}{cc} = \frac{c^4 - cc\,bb\sin\psi^2}{cc}$$

$= cc - bb\sin\psi^2$. Ex quo concluditur $aa + 2ab\cos$ $= cc - bb\sin\psi^2 - bb\cos\psi^2 = cc - bb$, $2ab\cos\psi =$

$$- bb - aa, \text{ et } \cos\psi = \frac{cc - bb - aa}{2ab}.$$ Jam ex cos dato elici poteſt formula pro ſinu ejusdem anguli ψ, qu eſt $\sin\psi = \sqrt{(1 - \cos\psi^2)} = \sqrt{(1 + \cos\psi)(1 - \cos\psi}$ Deducitur vero ex formula pro $\cos\psi$ § *praec.* inve

$$1 + \cos\psi = \frac{2ab + aa + bb - cc^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2 - cc}{2ab};$$

a+b

$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$, atque $1-\cos\psi = \frac{2ab-aa-bb+cc}{2ab}$
$= \frac{cc-(a-b)^2}{2ab} = \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}$. Ergo habemus

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2ab}.$$

Ex his ſimul patet, quomodo ex datis ſingulis trianguli ABC lateribus AC $= a$, BC $= b$, et AB $= c$ inveniri poteſt area trianguli ABC. Eſt enim haec area $= \frac{1}{2}$AC $\times$ BD $= \frac{ab \sin\psi}{2}$, ob BD $= b \sin\psi$. Praeterea poſita hac area $= m^2$, ut ſit $m^2 = \frac{ab \sin\psi}{2}$, viciſſim ſequitur, eſſe $\sin\psi = \frac{2m^2}{ab}$, quae formula exhibet modum ex data trianguli area et duobus lateribus inveniendi angulum ab hiſce lateribus comprehenſum.

§. 44.

Sphaerica triangula multis gaudent proprietatibus admodum ſimilibus iis, quae planis triangulis competunt, (*conferantur* §§. 59-94 *Geom. cum* §. 267-310. *Geom.*). Haec cauſſa eſt, cur excogitata fuit methodus ex datis tribus hujusmodi trianguli peripheriae partibus per calculum inveniendi reliquas, cujus regulae ob ſimilitudinem cum trigonometria plana dici vulgo ſolent *Trigonometria Sphaerica.* Regulas hujus methodi hoc demum complete explicare poſſumus loco, quia jam apud arcuum vel angulorum ſinus, coſinus, tangentes et cotangentes non abſolutae tantum quantitatis, ſed poſitionis etiam ejus, quae per ſigna + vel − indicatur rationem habere poſſumus. Quod igitur primo attinet ad triangula ſphaerica ſive ſolida rectangula, ſit NCMR tale cujus omnia latere quadrante F.221. 222.

F. 221. drante minora ſunt, et proinde anguli praeter rectum
222. acuti. Sit RM in plano RCM rectae MC perpendicularis, atque per eandem ponatur planum NRM ad planum RCM perpendiculare. Eſt vero quoque planum N[…] eidem RCM rectum. Hinc recta NR plano RCM […] perpendicularis, et anguli NRC, NRM recti. Praeterea MC in plano RCM plano NRM recto communi interſectioni RM perpendicularis plano NRM et ideo rectæ NM eſt perpendicularis. Proinde triangula NR[…] RCM, NCM, et NRM omnia ſunt rectangula, atque angulus M trianguli plani NMR idem eſt cum angulo M trianguli ſolidi ſive ſphaerici NCMR. Quodſi jam haec triangula ut in fig. 222 in planum explicentur, atque eædem, quibus in triangulo ſolido ſignata ſunt, litterae adponantur; ex triangulis RCM et NCM concluditur

$$MN : MR = tang\,H : tang\,B$$ (§. Cor. Calc. Ext[…]

atque ex triangulo NRM erit

$$MN : MR = r : cos\,M$$

proinde I, $r : cos\,M = tang\,H : tang\,B$

et quia denominationes M et N permutari poſſunt, ſi[…] dicatur P, et P habeatur pro B, M manente H, erit quoque $r : cos\,N = tang\,H : tang\,P$. Atque ex hiſce analogiis concluditur formula $tang\,H = \frac{tang\,P}{cos\,N} = \frac{tang\,[…]}{cos\,M}$ poſito $r = 1$, quod hoc loco ſemper ſupponimus. Quodſi nunc NC, quae in figura bis occurrit, habeatur pro radio, ex triangulis NRC, NMC fit NM : NR = ſin [...] : ſin P,

atque ex triangulo NRM colligitur

$$NM : NR = r : ſin\,M$$

ergo eſt II, $r : ſin\,M = ſin\,H : ſin\,P$,

et denominationibus M, N, B, P inter ſe permutatis

$$r : ſin\,N = ſin\,H : ſin\,B.$$

Unde formula $ſin\,H = \frac{ſin\,B}{ſin\,N} = \frac{ſin\,P}{ſin\,M}$.

Si RC fiat radius in eadem fig. ex triangulis NCR, RCM deducimus

$$RM : RN = \mathit{ſin}\, B : \mathit{tang}\, P$$

atque ex triangulo NRM analogiam ſequentem

$$RM : RN = r : \mathit{tang}\, M$$

ergo eſt III, $r : \mathit{tang}\, M = \mathit{ſin}\, B : \mathit{tang}\, P$ et permutando denominationes

$$r : \mathit{tang}\, N = \mathit{ſin}\, P : \mathit{tang}\, B.$$

ergo $\mathit{tang}\, M = \dfrac{\mathit{tang}\, P}{\mathit{ſin}\, B}$, et $\mathit{tang}\, N = \dfrac{\mathit{tang}\, B}{\mathit{ſin}\, P}$.

§. 45.

Jam ex analogia II ſub utrisque denominationibus

$$r : \mathit{ſin}\, H = \mathit{ſin}\, M : \mathit{ſin}\, P$$

$$r : \mathit{ſin}\, H = \mathit{ſin}\, N : \mathit{ſin}\, B$$

ſequitur $\mathit{ſin}\, B : \mathit{ſin}\, N = \mathit{ſin}\, P : \mathit{ſin}\, M$, quae cum tertia repertarum

$$r : \mathit{ſin}\, B = \mathit{cot}\, P : \mathit{cot}\, M$$

comparata dat $r : \mathit{ſin}\, N = \mathit{ſin}\, P \times \mathit{cot}\, P : \mathit{ſin}\, M \times \mathit{cot}\, M$: Quia vero $\mathit{ſin}\, P \times \mathit{cot}\, P = \mathit{cos}\, P$ et $\mathit{ſin}\, M \times \mathit{cot}\, M = \mathit{cos}\, M$ (§. 39.) erit IV, $r : \mathit{ſin}\, N = \mathit{cos}\, P : \mathit{cos}\, M$ et mutanto denominationes $r : \mathit{ſin}\, M = \mathit{cos}\, B : \mathit{cos}\, N$. Hinc $\mathit{ſin}\, N = \dfrac{\mathit{cos}\, M}{\mathit{cos}\, P}$ et $\mathit{ſin}\, M = \dfrac{\mathit{cos}\, N}{\mathit{cos}\, B}$.

Ex analogia III porro habemus $r : \mathit{ſin}\, B = \mathit{tang}\, M : \mathit{tang}\, P$, atque, ob $\mathit{tang}\, M \times \mathit{cot}\, M = \mathit{tang}\, P \times \mathit{cot}\, P$, exinde deducitur $r : \mathit{ſin}\, B = \mathit{cot}\, P : \mathit{cot}\, M$, vel $\mathit{cot}\, M : \mathit{cot}\, P = \mathit{ſin}\, B : r$, praeterea eſt ex analogia II, $\mathit{ſin}\, M : \mathit{ſin}\, P = r : \mathit{ſin}\, H$, et proinde $\mathit{ſin}\, M \times \mathit{cot}\, M = \mathit{ſin}\, P \times \mathit{cot}\, P = \mathit{ſin}\, B : \mathit{ſin}\, H$, vel $\mathit{cos}\, M : \mathit{cos}\, P = \mathit{ſin}\, B : \mathit{ſin}\, H$, haec analogia cum I.) $r : \mathit{cos}\, M = \mathit{cot}\, B : \mathit{cot}\, H$ comparata præbet $r : \mathit{cos}\, P = \mathit{ſin}\, B \times \mathit{cot}\, B : \mathit{ſin}\, H \times \mathit{cot}\, H$ vel $r : \mathit{cos}\, P = \mathit{cos}\, B : \mathit{cos}\, H$, ideo $\mathit{cos}\, P = \dfrac{\mathit{cos}\, H}{\mathit{cos}\, B}$.

Denique

Denique componendo rationes analogiae I,

$$r : \cos M = \cot B : \cot H,$$

cum rationibus analogiae II,

$$\sin M : \sin P = r : \sin H$$

et analogiae III, mutatis denominationibus

$$\sin P : r = \cot N : \cot B$$

elicitur analogia $\sin M : \cos M = r \times \cot N : \sin H :$ $\cot H$, ſed $\sin M : \cos M = r : \cot M$ et $\sin H \times \cot$ $= r \times \cos H$, proinde VI, $r : \cot M = \cot N : c$ H, et $\cos H = \cot M \times \cot N$.

§. 46.

Inventæ igitur ſunt ſex analogiae principales, e quatuor aliae ex illis permutatione denominationum dedu ctae; atque decem iſtae analogiae omnes combinatione eorum continent, quae in triangulo ſphaerico rectangu lo tanquam data vel quæſita poſſunt occurrere. In qu vis enim ejusmodi triangulo præter angulum rectu quinque conſiderandae veniunt perimetri partes B, P, E M, N. Ex duabus vero quibuslibet earum cum angu recto, datis invenienda eſt tertia, atque in analog decem repertis ſingulae tres earum partium habentu quia quinque litterarum H, B, P, M, N, ſingulae tr ſequentibus decem modis tantum combinari poſſunt

BPH	BHM	BMN	PHM	PMN	MNH.
BPM	BHN		PHN		
BPN					

Cum itaque omnes iſtæ combinationes in analogiis rep tis occurrant; primus analogiae terminus ſemper ſit dius, atque ex tribus analogiae terminis ſemper repe tur quartus, utique per has analogias, datis præter gulum rectum duobus quibuslibet in triangulo ſphaer rectangulo, ſive lateribus ſive angulis, ſive latere et gulo dabuntur reliqua. Quod ut eo diſtinctus adpar decem analogiae inventae hic ſeparatim adſcriptae ſunt.

An

Analogiae principales.

I. r : *cos* M $=$ *tang* H : *tang* B $=$ *cot* B : *cot* H
II. r : *ſin* H $=$ *ſin* M : *ſin* P
III. r : *ſin* B $=$ *tang* M : *tang* P $=$ *cot* P : *cot* M
IV. r : *ſin* N $=$ *cos* P : *cos* M
V. r : *cos* B $=$ *cos* P : *cos* H
VI. r : *cot* M $=$ *cot* N : *cot* H

Reliquae ex prioribus permutatione denominationum deductae:

VII. r : *cos* N $=$ *tang* H : *tang* P $=$ *cot* P : *cot* H
VIII. r : *ſin* H $=$ *ſin* N : *ſin* B
IX. r : *ſin* P $=$ *tang* N : *tang* B $=$ *cot* B : *cot* N
X. r : *ſin* M $=$ *cos* B : *cos* N.

§. 47.

Si in triangulo ſphaerico rectangulo data fuerint aliqua latera quadrante majora, et anguli recto majores; ſolvi debet loco hujus trianguli illi contiguum §. 309. *Cor.* 6. *Geom.*, cujus omnia latera quadrante minora, et anguli praeter rectum acuti ſunt, cujus quidem latera, cum ſint laterum prioris trianguli complementa ad duos rectos, et anguli angulorum; eosdem cum illis ſinus atque tangentes habent. Et quia jam latera horum triangulorum quaeſita aliquando quadrante majora ſunt, aliquando minora, et anguli aliquando recto majores, aliquando minores, utrum horum in quolibet caſu propoſito locum habeat, per theoremata §. 308. et 309. *Geom.* definitur. Vel, quia coſinus, tangentes atque cotangentes arcuum quadrante majorum vel angulorum, obtuſorum, ſemicirculo et duobus rectis non majorum, negativi fiunt, ſi coſinus, tangentes, atque cotangentes arcuum quadrante minorum, atque angulorum acutorum pro poſitivis habeantur: diſtinguantur coſinus, tangentes, atque cotangentes, qui ad angulos acutos pertinent, ab iis, quorum anguli ſunt obtuſi, ſignis + et — elicieturque ſecundum regulas algorithmi ſpecioſi ſignum quae-

ſiti, quod ſi + fuerit, erit quæſitum quadrante, ve recto minus, majus contra ſi ejus ſignum − prodierit Sed ſinus poſitivus ad angulum obtuſum aeque pertinen ac acutum illi ſupra diametrum contiguum, latus ve angulum quaeſitum ambiguum relinquit, niſi ex §§. cit determinetur. Omnibus vero examinatis iis ſolum ca ſibus, quod quaeritur ambiguum prodire patet, quibu data ſunt M, P, vel quod eodem redit N, B, atque hu jus rei ratio eſt, quod ex his datis ſemper duo triangul rectangula diverſa conſtrui poſſunt (§.301. *Geom.*). Ca terum ex repertis analogiis ea, quae datum quemcun que caſum ſpecialem ſolvit, facile eligitur. Si data ſin M et B, ac quaeratur N, erit per analogiam X, in qu litterae hæ occurrunt $r : \textit{ſin}\, M = \textit{cos}\, B : \textit{cos}\, N$. Si vero ex datis M et N quaeratur P, patet, ex analogia IV in ferendum eſſe $\textit{ſin}\, N : \textit{cos}\, M = r : \textit{cos}\, P$, et ſic in re liquis.

§. 48.

F.164. 166. Si in triangulo ſphaerico obliquangulo MQ*m*, da tis tribus quibuslibet, ſive lateribus, ſive angulis, ſive angulis et lateribus, quaerantur reliqua; ducto later QR ex aliquo angulorum trianguli ad latus oppoſitum perpendiculari, applicentur analogiae repertae ad utrum que triangulorum rectangulorum, quae ita ortae ſunt Atque ex analogia II. erit

$$R : \textit{ſin}\, H = \textit{ſin}\, M : \textit{ſin}\, P$$

$$\text{et } R : \textit{ſin}\, b = \textit{ſin}\, m : \textit{ſin}\, P. \quad \text{Ergo}$$

I) $\textit{Sin}\, H : \textit{ſin}\, b = \textit{ſin}\, m : \textit{ſin}\, M.$

In omni itaque triangulo ſphaerico ſinus laterum ſunt, ut ſinus angulorum iisdem oppoſitorum

Deinde ex analogia III

$$r : \textit{ſin}\, B = \textit{tang}\, M : tP$$

$$r : \textit{ſin}\, b = \textit{tang}\, m : tP, \text{ ergo}$$

II.) $\textit{ſin}\, B : \textit{ſin}\, b = \textit{tang}.\, m : \textit{tang}.\, M = \textit{cot}\, M : \textit{cot}.$ ...

Si itaque in triangulo ſphaerico obliquangulo e apice unius anguli ad latus oppoſitum cadat arcus pe

pe

pendicularis, ſinus ſegmentorum tangentibus angulorum adjacentium ſunt reciproce et eorum cotangentibus directe proportionales.

Ex analogia IV

$r : \mathit{ſin}\, N = \cos P : \cos M$

et $r : \mathit{ſin}\, n = \cos P : \cos m$, ideo

III) $\mathit{ſin}\, N : \mathit{ſin}\, n = \cos M : \cos m$

Ergo ſinus angulorum, in quos angulus baſi oppoſitus a perpendiculo ſecatur, ſunt ut coſinus angulorum ad baſin.

Hinc porro concluditur

$(\mathit{ſin}\, N + \mathit{ſin}\, n) : (\mathit{ſin}\, N - n) = (\cos M + \cos m) : \cos M - \cos. m$ ſed §. 15. *Calc. Ext.* eſt $(\mathit{ſin}\, N + \mathit{ſin}\, n) : (\mathit{ſin}\, N - \mathit{ſin}.\, n) = \mathit{tang}\, (\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}n) : \mathit{tang}\, (\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}n)$, atque ſi complementa arcuum M et N denotentur per cM et cN, erit ſimilem ob rationem $(\cos M + \cos m) : (\cos M - \cos m) = \mathit{tang}\, (\frac{1}{2}cM + \frac{1}{2}cm) : \mathit{tang}\, (\frac{1}{2}cM - \frac{1}{2}cm)$. Ergo

IV.) $\mathit{tang}\, (\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}n) : \mathit{tang}\, (\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}n) = \mathit{tang}\, (\frac{1}{2}cM + \frac{1}{2}cm) : \mathit{tang}\, (\frac{1}{2}cM - \frac{1}{2}cm)$.

Ex analogia V porro concluditur

$r : \cos P = \cos B : \cos H$

et $r : \cos P = \cos. b : \cos. h$, proinde

V.) $\cos B : \cos. b = \cos H : \cos h$

Ergo coſinus ſegmentorum B et b proportionales ſunt coſinubus laterum H et h adjacentium.

Ex hac vero analogia fluit

$(\cos B + \cos. b) : (\cos B - \cos. b) = (\cos H + \cos. h) : (\cos H - \cos. h)$ unde ut ante concluditur

VI.) $\mathit{tang}\, (\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb) : \mathit{tang}\, (\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb) = \mathit{tang}\, (\frac{1}{2}cH + \frac{1}{2}ch) : \mathit{tang}\, (\frac{1}{2}cH - \frac{1}{2}ch)$

Denique ex analogia VII habemus

$r : \cos N = \mathit{tang}\, H : \mathit{tang}\, P$

$r : \cos. n = \mathit{tang}.\, h : \mathit{tang}\, P$,

proinde $\cos N : \cos. n = \mathit{tang}\, h : \mathit{tang}\, H = \cot. H : \cot. h$.

Coſinus itaque angulorum N et n tangentibus laterum h

X et

et H reciproce et eorum contangentibus directe ſu proportionales.

§. 49.

Quodſi jam id, quod quaeritur, ſive latus ſit, ſi angulus, dicatur Q, quod quæſito opponitur O, qu quaeſito utrinque adjacent, ſic ut inter ea quæſitum i tercipiatur, K, k, et ea, inter quae intercipitur quæſit oppoſitum P, p, ponendo litteras minores ad unam pa tem, majores ad alteram, ſic ut P, K, ſibi mutuo co tigua ſint, ut et p, k; quinque prodeunt litterae, K, k P, p, O, quarum tres data in quolibet caſu notabu cum quæſitum ſit ubique Q. Ex quinque litteris iſt tres combinari poſſunt decem modis ſequentibus

KkP	KPp	KpO	kPp	kpO	PpO.
Kkp	KPO		kPO		
KkO					

Litteræ autem K, k, ſimul cum P, p, invicem permutatæ caſus revera diverſos non exhibent, quia nihil intereſt ad quam partem litteræ iſtæ primum ſcribantur, mod reliquus ordo conſervetur. Coincidit ergo combinati prima cum ſecunda, quarta cum ſeptima, quinta cu nona, ſexta cum octava, ac reliquuntur tantum ſex com binationes, caſus diverſos notantes, qui quidem, cu quæſitum vel latus ſit, vel angulus, duodecim in univer ſum dant quæſtiones ita ſolvendas.

§. 50.

F. 223. PROBL. I. *Datis duobus angulis cum latere uno an gulorum oppoſito, quaerere latus alteri oppoſitum.*

Data ſunt K, P, O, vel k, p, O, et latus Q inveni tur ope analogiae

$$\text{ſin}\, K : \text{ſin}\, P = \text{ſin}\, O : \text{ſin}\, Q$$

$$\text{vel}\ \text{ſin}\, k : \text{ſin}\, p = \text{ſin}\, O : \text{ſin}\, Q \ (\S. 48.).$$

PROBL. II. *Dantur duo anguli et latus uno anguli oppoſitum, quaerere latus inter datos angulos interceptum*

Data

Data ſunt K, k, P vel k, K, p. Ad latus quæſitum Q cadat perpendicularis OR, erunt in triangulo MNR rectangulo data M et H, ac B invenitur ope analogiæ r : *cos* M = *t*. H : *t*. B. Tumque porro cognito B invenitur b ex §. 48. inferendo *tang*. *m* : *tang*. M = *ſin* B : *ſin* b, et latus quæſitum eſt = B ± b. conf. §. 310. *Cor. Geom.*

PROBL. III. *Dantur duo latera et angulus ab iisdem comprehenſus, invenire latus tertium.*

Data ſunt P, K, p, vel p, k, P. Ad latus quæſitum demiſſo arcu perpendiculari, in triangulo rectangulo MNR data ſunt M et H, et proinde habetur B ex analogia r : *cos* M = *tang* H : *tang* B. Atque tum alterum lateris quæſiti ſegmentum b ex analogia *cos* H : *cos* b = *cos* B : *cos* b. Fitque Q = B ± b.

PROBL. IV. *Datis duobus angulis et latere comprehenſo invenire unum ex lateribus reliquis.*

Data jam ſunt K, P, O, vel k, p, O. Ad latus incognitum non quæſitum cadat perpendicularis KR, atque in triangulo rectangulo KOR data ſunt M et H proinde invenitur N ex analogia r : *tang* M = *cos* H : *cot* N. Quia jam K = N ± n, erit n = K ∓ N. Tumque latus quæſitum Q ſive b ex analogia VII, quæ erat *cos*. n : *cos* N = *t*. H : *t*. b. P. 224.

PROBL. V. *Dantur duo latera cum angulo comprehenſo, et quæritur tertium latus.*

Datis litteris P, p, O, vel p, P, O, denotatis, ad unum datorum laterum ex angulo oppoſito cadat perpendicularis KR, atque in triangulo MNR rectangulo data ſunt M et H, ex quibus invenitur B per analogiam r : *cos* M = *tang* H : *tang* B. Eſt vero p = B ± b, et proinde b = p ∓ B. Latus itaque Q ſive b jam reperitur inferendo *cos* B : *cos*. b = *cos* H : *cos*. b.

PROBL. VI. *Dantur tres anguli, et quæritur unum latus.*

Hic caſus eſt K, k, O, vel k, K, O. Ad unum latus a quæſito diverſum ſi cadat arcus perpendicularis KR,

 ſive-

inveniuntur anguli N et n ex analogia t $(\frac{1}{2}cM + \frac{1}{2}cm)$ $t.$ $(\frac{1}{2}cM - \frac{1}{2}cm) = t.$ $(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}n) : t.$ $(\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}n)$. Atqu repeṙto ſic angulo n in triangulo mnK rectangulo dat ſunt m et n, ex quibus habetur b inferendo $t, m : r$: $cot\ n : cos.\ b$.

§. 51.

PROBL. VII. *Dantur duo latera, et angulus uni e rum oppoſitus, invenire angulum alteri oppoſitum*

F.225. Hoc caſu data ſunt K, p, O, vel k, P, O, isque facil abſolvitur inferendo.

$$ſin\ K : ſin.\ p = ſin\ O : ſin\ Q$$
$$\text{vel}\ ſin.\ k : ſin\ P = ſin\ O : ſin\ Q.$$

PROBL. VIII. *Datis duobus angulis et latere uno e rum oppoſito invenire angulum tertium.*

Data ſunt p, P, K vel P, p, k. Ex apice anguli quaſi ad latus oppoſitum cadat arcus perpendicularis, atqu in triangulo MNR rectangulo ex datis M et H reperitu N inferendo $r : tang\ M = cos\ H : cot\ N$, tumque an gulus n concludendo $coſ\ M : coſ.\ m = ſin\ N : ſin.\ n$, ſi que $Q = N \pm n$.

PROBL. IX. *Dantur duo latera et angulus uni oppoſ tus invenire angulum a lateribus comprehenſum.*

Datis jam K, k, P, vel k, K, p, iterum ex apice quaſi anguli ad oppoſitum latus demiſſo perpendiculari in tr angulo rectangulo MNR ex datis M et H reperitur N, inferatur $r : tang\ M = cos\ H : cot\ N$, atque tum anguli n ope analogiæ $tang.\ b : tang\ H = cos\ N : cos.\ n$, eſtq $Q = N \pm n$.

PROBL. X. *Dantur duo anguli cum latere interjace te invenire angulum tertium.*

F.226. Datis nunc P, p, O, vel p, P, O, ex apice unius a gulorum datorum ſi cadat perpendicularis PR ad lat oppoſitum, in triangulo rectangulo MNR ex datis M H concluditur $r : tang\ M = cos\ H : cot\ N$. Invento angulo N, quia eſt $P = N \pm n$, habetur $n = P \mp$

Tu

Tum inferendo *ſin* N : *ſin* $n =$ *cos* M : *cos* m, cognitus erit angulus m quæſitus.

PROBL. XI. *Dantur duo latera cum angulo compre-comprehenſo, inveniri debet unus angulorum reliquorum.*

Data ſunt p, k, O, vel P, K, O. Ad unum datorum, laterum cadat perpendicularis PR, atque in triangulo MRM rectangulo ex datis M et H per analogiam r : *cos* M = *tang* H : *tang* B reperitur B. Eſt vero $k =$ B $\pm b$, et proinde $b = k \mp b$. Tum inferendo *ſin* b : *ſin* B = *tang* M : *tang*. m, habetur angulus quæſitus m.

PROBL. XII. *Dantur omnia trianguli latera, inveniendus eſt angulus.*

Data jam ſunt K, k, O, vel k, K, O. Ex apice unius anguli a quæſito diverſi ad oppoſitum latus ducto arcu perpendiculari habetur analogia $t. (\frac{1}{2}c\mathrm{H} + \frac{1}{2}cb) : t. (\frac{1}{2}c\mathrm{H} - \frac{1}{2}cb) = t. (\frac{1}{2}c\mathrm{B} + \frac{1}{2}cb) : t. (\frac{1}{2}c\mathrm{B} - \frac{1}{2}cb)$, ex qua inveniuntur B et b. Tumque in triangulo rectangulo mmR ex datis h et b invenitur m concludendo *tang*. h : *tang*. $b = r$: *cos* m.

Cæterum ea, quæ per has regulas quaeruntur non ſemper plane determinata prodeunt, ſed hic quoque interdum ambiguum relinquitur, an latus quadrante majus vel minus, angulus vero acutus vel obtuſus ſit. Quod quidem non vitio quodam regularum contingit ſed eo, quod per eadem data interdum indifferenter duo triangula ſphærica determinantur. Conferenda igitur ea ſunt, quae §. 299. 301. 310. *Geom*. et §. 46. *Anal*. expoſita ſunt.

§. 52.

Deduci poſſunt ex hiſce triangulorum ſphæricorum proprietatibus formulæ algebraicæ latera vel angulos ejusmodi trianguli ex reliquorum ſinubus, coſinubus, tangentibus et cotangentibus definientes, quarum formularum unam expoſitis ſubjungere conſultum erit, eamque adeo univerſalem, ut ex eadem ſola omnia trigonometriae ſphæricae praecepta tanquam conſectaria deriva-

 ri

F.227. ri queant. Dico quod in triangulo ſphærico quocunque ABC ſit $cos\,A = \frac{cos\,BC - cos\,AC \times cos\,AB}{ſin\,AC \times ſin\,AB}$. Ex apice enim anguli B ad latus AC oppoſitum cadat arcus perpendicularis BD, eritque in triangulo rectangulo ABD, r : $tang\,AB = cos\,A : tang\,AD$ (§. 46. *Anal.* I.) vel $tang\,AD = tang\,AB \times cos\,A$. Sed $ſin\,AD = cos\,AD \times tang\,AD$ (§. 39.) ideo $ſin\,AD = cos\,AD \times tang\,AB \times cos\,A$. In triangulo ABC praeterea eſt $cos\,DC : cos\,AD = cos\,BC : cos\,AB$ (§. 48. *Anal.* V.) vel $cos\,DC \times cos\,AB = cos\,BC \times cos\,AD$, atque $cos\,DC = cos\,(AC - AD) = cos\,AC \times cos\,AD + ſin\,AC \times ſin\,AD$ (§. 50.). Subſtituto itaque valore pro $ſin\,AD$ ſupra invento fit $cos\,DC = cos\,AC \times cos\,AD + ſin\,AC \times cos\,AD \times tang\,AB \times cos\,A$, atque hoc valore pro $cos\,DC$ ſubſtituto invenitur $cos\,AC \times cos\,AD \times cos\,AB + ſin\,AC \times cos\,AD \times tang\,AB \times cos\,A \times cos\,AB = cos\,BC \times cos\,AD$. Jam utrinque per $cos\,AD$ diviſo et $ſin\,AB$ loco $tang\,AB \times cos\,AB$ ſubſtituto habetur $cos\,AC \times cos\,AB + ſin\,AC \times cos\,A \times ſin\,AB = cos\,BC$, unde concluditur $ſin\,AC \times cos\,A \times ſin\,AB = cos\,BC - cos\,AC \times cos\,AB$

et $cos\,A = \frac{cos\,BC - cos\,AC \times cos\,AB}{ſin\,AC \times ſin\,AB}$. Hinc ſimul eſt

$$cos\,B = \frac{cos\,AC - cos\,AB \times cos\,BC}{ſin\,AB \times ſin\,BC},$$

$$cos\,C = \frac{cos\,AB - cos\,AC \times cos\,BC}{ſin\,AC \times ſin\,BC}.$$

Tres iſtae aequationes omnes ſex trianguli ſphærici peripheriae partes continent, nimirum angulos A, B, C et latera AB, BC, AC. Ideo datis tribus tres in illis æquationibus ſunt quantitates incognitæ, quæ ex iisdem inveniuntur, modo §. 32. expoſito.

SECT.

SECTIO IV.

DE AEQVATIONIBVS NON SIMPLICIBVS PVRIS.

§. 53.

Aequatio non ſimplex vocatur *quadratica*, *cubica*, *biquadratica*, *quinti ordinis*, *ſexti ordinis*, *etc.* prouti maxima quantitatis incognitae dimenſio eſt vel dignitas ſecunda vel tertia vel quarta etc. Incognita autem quantitas aut ubique ad unam eandemque dignitatem mathematicam evecta eſt, aut non. Si prius, aequatio non ſimplex dicitur *pura*, ſi vero poſterius, vocatur *affecta*. Praeterea in aequatione compoſita affecta aut omnes quanti incogniti dignitates a maxima, ad quam in aequatione aſſurgit, uſque ad primam occurrunt, aut non. Si prius aequatio affecta dicitur *completa*, ſi poſterius *incompleta* vocatur. De aequationibus non ſimplicibus puris conjunctim agi poteſt, reliquae his multo difficiliores ſeparatim erunt conſiderandae. Quaecunque autem ſit aequatio non ſimplex pura, et quomodocunque ex incognita et cognitis compoſita, reduci tamen ſemper poteſt ſecundum praecepta hucusque tradita ad formam ſequentem $x^n = A$, quamcunque quantitatem denotet A, et quomodocunque compoſitam, dummodo in eadem incogniti nihil inſit. Ponendo enim $x^n = y$, aequatio non ſimplex pura mutatur in ſimplicem, quae tum ita mutanda eſt, ut y ex una ipſius parte ſolitarie conſiſtat, ex altera vero parte quantitas ex ſolis cognitis compoſita, quae ponatur $= A$, erit $y = A$, reſtituto valore x^n pro y, fiet $x^n = A$. Sunt igitur aequationes purae iſtae quoque, in quibus $(x + a)^n = A$, vel $(x - a)^n =$ A,

aequatio non simp. pura est vel $x^n = A$ vel $(x+a)^n = A$.

A, vel $(a-x)^n = A$, utpote quæ, ſi $x+a$, vel $x-$ aut $a-x$ dicatur $= z$, eandem formam induunt $z^n =$ Aequatio ergo quadratica $x + 2ax + a^2 = A$, pura e et ſic aliae.

§. 54.

Reducta igitur ſit aequatio non ſimplex pura formam $x^n = A$, erit $x = \sqrt[n]{A}$. Adeoque ſi $n =$ erit $x = \sqrt{A}$, ſi $n = 3$, eſt $x = \sqrt[3]{A}$, et ita in reliqui Jam cum ſit $+a \times +a = -a \times -a = +aa$, ſeu quo idem eſt $+\sqrt{aa} \times +\sqrt{aa} = -\sqrt{aa} \times -\sqrt{aa}$; radi quadratica cujuscunque quantitatis duplicem habet valorem, alterum poſitivum, alterum negativum, qui tamen abſolute ſpectati ſibi ſunt æquales. Ad hoc indicandum Analyſtae ejusmodi radici praefigunt ſignum $\pm$, et di cunt, eſſe $\sqrt{aa} = \pm a$. Praeterea, ſi a denotet quan titatem quamcunque, omnes ipſius dignitates, ſive expo nentes ſint numeri pares, ſive impares, inveniuntur poſi tivae, ſi radix a poſitiva ſit. Si vero a ſit quantitas ne gativa $-a$, et nunc quoque omnes dignitates, quarum exponentes ſunt numeri pares, fiunt poſitivæ, illæ autem quarum exponentes ſunt numeri impares, negativae in veniuntur. Ex hoc autem porro ſequitur, quod radi cujuscunque dignitatis, cujus exponens eſt numerus par etiam duplicem habeat valorem, unum poſitivum, alte rum negativum, priori abſolute ſpectato aequalem, cum e contrario radix cujuscunque poteſtatis exponentis im paris unicum tantum habeat valorem, poſitivum nimi rum, ſi ipſa dignitatis ſit poſitiva, negativum, ſi digni tas ſit negativa. Sic $\sqrt[3]{a^3} = a$, et $\sqrt[3]{-a^3} = -a$, $\sqrt[5]{}$ $a^5 = a$, et $\sqrt[5]{-a^5} = -a$. Si igitur generaliter i formula $\sqrt[n]{A} = x$, A ſit quantitas negativa, et n nume rus impar, $\sqrt[n]{A}$ unicum tantum habet valorem realem

eumqu

cunque negativum. Verum ſi A ſit quantitas negativa, atque n fuerit numerus par, nulla dabitur quantitas, quæ huic expreſſioni $\sqrt[n]{A}$ reſpondeat. Sive enim ea quantitas poſitiva eſſe ponatur, ſive negativa, ſemper dignitates exponentium parium, quarum aliquam notare ponitur A, poſitivæ fiunt. Quare ſi $\sqrt[n]{-A}$ notare ponatur a, hæc a neque poſitiva erit, neque negativa, ergo impoſſibilis.

§. 55.

Quantitas *algebraice rationalis* eſt, quae absque ſignis radicalibus vel potentiarum exponentibus fractis exhiberi poteſt: quantitas autem, quae absque ſignis radicalibus vel potentiarum exponentibus fractis exhiberi nequit, *algebraice irrationalis* dicitur. Sic $\sqrt{a^2b}$, $\sqrt[3]{a^3b}$, et alia hujusmodi ſunt quantitates algebraice irrationales. Contra $\sqrt{a^2}$ eſt quantitas algebraice rationalis, quia idem denotat, quod a, ut et $\sqrt{(aa+2ab+bb)}$, $\sqrt[3]{a^6}$, et hujusmodi alia. Alias in Arithmetica illi numeri, qui unitati ſuae ſunt incommenſurabiles, irrationales dicuntur, uti ex Elementis conſtat. Ideo algebraice irrationalia non ſemper ſunt arithmetice irrationalia et algebraice rationalia non ſemper arithmetice rationalia. Sic $\sqrt{a}$ algebraice irrationalis eſt, ſi vero a notaverit 1, vel 4, vel 9, vel alium numerum quadratum, $\sqrt{a}$ erit arithmetice rationalis $= 1$, vel 2, vel 3, etc. Contra a algebraice rationalis eſt, ſi vero a notaverit $\sqrt{2}$, vel $\sqrt{3}$, vel $\sqrt[3]{9}$, erit a arithmetice irrationalis. Quantitas irrationalis proprie dicta ſemper quantum veri nominis atque poſſibile eſt. Quare etſi impoſſibile eodem modo expreſſum ſit, quo irrationalia exprimi poſſunt, ut $\sqrt{-a}$, tamen proprie illud irrationale dici non debet. *Radicalium* autem nomine impoſſibilia ejusmodi indigitari poſ-

ſunt. Et haec eſt ratio, cur algorithmus radicaliu
ſupra expoſitus in univerſum applicari queat, ſive radi
calia illa quantitates rationales notaverint, ſive irratio
nales, ſive impoſſibiles.

§. 56.

Quia æquatio non ſimplex pura reduci poteſt a
formam ſequentem, $x = \sqrt[n]{A}$, ipſa incognita x exhib
bitur in quavis æquatione pura et ſatis promte per log
rithmos, ſi tabulæ logarithmorum conſtructae ſuppona
tur. In Matheſi enim Elementari jam demonſtratur
logarithmorum proprietas, quod logarithmus facti ſi
ſumma logarithmorum factorum, et ex hoc deducitu
quod logarithmus quadrati, cum oriatur logarithmo ra
dicis ad ſeipſum addito, ſit duplum logarithmi radici
ac cubi logarithmus radicis logarithmi triplum. Poſſu
mus eadem ratiocinia hic continuare, et concluder
quod logarithmus dignitatis quartæ ſit logarithmi radici
quadruplus, dignitatis quintae quintuplus, ſextæ ſextuplu
et ita perpetuo. Viciſſim igitur logarithmus radicis cu
juscunque gradus ex dato numero invenitur logarithm
illius numeri per exponentem radicalem diviſo. Si igi
tur littera l denotet logarithmum illius numeri, cui præ
figitur, erit generaliter $la^n = nla$, et $l\sqrt[n]{a} = \frac{la}{n}$. Re
ducta igitur aequatione non ſimplici pura ad formam x^n
$= A$, vel $x = \sqrt[n]{A}$, erit $lx = \frac{lA}{n}$, hincque ſi loga
rithmus ipſius A per numerum n dividatur, quotus eri
logarithmus incognitæ x, quae igitur ipſa invenietur, ſ
quaeratur numerus logarithmo reperto conveniens ſe
cundum methodum in Matheſi Elementari expoſitum.

§. 57.

Quodſi valor ipſius x geometrice quærendus ſit, me
thodus qua id præſtari poteſt, ſequentibus nititur ratio
ciniis

ciniis. Sumta quantitate a quacunque, ſi formetur ſeries dignitatum a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, etc. erit hæc ſeries progreſſio geometrica, atque ideo ſi ponatur $A=a^2$, erit a media proportionalis inter 1 et A; ſi $A=a^3$, erit a prima duarum a et a^2 inter 1 et A mediarum continue proportionalium; prima trium a, a^2, a^3, ſi $A=a^4$, et ita porro. Ideo in æquatione $x=\sqrt[n]{A}$, incognita x geometrice exhibebitur per lineam rectam, ponendo inter 1 et rectam, quam denotat A, tot medias continue proportionales, quot unitates inſunt in numero $n-1$, quarum prima erit incognita x quæſita. In æquatione igitur quadratica pura $x=\sqrt{A}$, invenitur incognita x per Geometriam Elementarem, inter rectam pro unitate aſſumtam et eam, quam denotat A, mediam proportionalem quærendo, quæ erit incognita x quæſita. Cum igitur duae rectae mediae continuo proportionales inter rectas datas vel adeo plures per Geometriam Elementarum non reperiantur, in reliquis hujusmodi æquationibus incognita x reperitur per Geometriam Sublimiorem, de qua in ſequentibus. Ceterum quæſtionum non ſimplicium purarum ſpecimen dat problema, quod ſequitur. Segneri Elem. Anal. fin. Sect. VI. § 306–312.

§. 58.

PROBLEMA. *Civitas decem mille hominum tempore quindecim annorum crevit in viginti millia: quaeritur, quis fuerit incolarum numerus ſub finem anni primi, ſi incrementum ejusdem temporis proportionale ſemper fuiſſe ponatur multitudini.* Exemplum.

SOLVTIO. Ponatur $10000=a$, $20000=b$, numerus quæſitus $=x$, erit per conditiones problematis a ad x, uti x ad id, in quod a mutatum eſt duobus annis, quod ergo erit $=\frac{xx}{a}$. Deinde eſt a ad x, uti $\frac{xx}{a}$ ad id, in quod a mutatum eſt tribus annis, quod ergo erit

erit $\frac{x^3}{a^2}$. Eodem modo numerus, in quem ita crevit qua-tuor annis, reperitur $\frac{x^4}{a^3}$, atque colligitur, ad anno-rum numerum 15, numerum, in quem a crevit, per $\frac{x^{15}}{a^{14}}$ exprimendum eſſe. Eſt igitur aequatio problematis funda-mentalis $\frac{x^{15}}{a^{14}} = b$. Ex hac autem concluditur, eſſe $x^{15} = a^{14} b$, et $x = \sqrt[15]{a^{14} b}$, adeoque $lx = \frac{l.\, a^{14} b}{15}$ $= \frac{la^{14} + lb}{15} = \frac{14\, la + lb}{15}$. Sed eſt $la = 4$, hinc $14\, la$ $= 56$. Porro $lb = 4, 30103$, ideo $14\, la + lb = 60,30103$; qui logarithmus, ſi dividatur per 15, erit quotus 4,020068; atque hic eſt logarithmus incogniti x, cui reſpondens nu-merus 10472 eſt ipſe x, qui quaerebatur.

SECTIO V.

DE AEQVATIONIBVS QVADRATICIS NON PVRIS.

§. 59.

Aequationes quadraticae affectae

Prouti quaevis aequatio ſimplex ad formam $x = A$, et pura quaevis ad formam $x^m = A$ reduci poteſt, ubi A eſt expreſſio ex meris cognitis quantitatibus com-poſita; ita quadratica aequatio non pura quaecunque redu-citu

citur ad formam generalem ſequentem $xx + px = q$, in qua p et q ſunt expreſſiones utcunque ex cognitis quantitatibus compoſitæ. Sic æquatio $axx + 2ab\,x + 2bcc = bcx - cxx + a^3$ hoc modo reducetur: $axx + cxx + 2abx - bcx = a^3 - 2bcc$; $(a+c)\,xx + (2ab - bc)\,x = a^3 - 2bcc$; $xx + \frac{2ab - bc}{a+c}\,x = \frac{a^3 - 2bcc}{a+c}$. Si ergo ponatur $p = \frac{2ab - bc}{a+c}$ et $q = \frac{a^3 - 2bcc}{a+c}$, utique æquatio hæc cum univerſali eadem erit. Aequationes quadraticae puræ ab impuris non alia re differunt, quam quod in iis ſit $p = 0$.

§. 60.

Ipſa hæc *reductio* æquationis quadraticae affectae ad formam $xx + px = q$, per eaſdem abſolvitur regulas, per quas reducuntur æquationes ſimplices, hoc addito; terminos æequationis ita diſponendos eſſe, ut illi præcedant, in quibus eſt xx, hi vero ſequantur, in quibus eſt x, atque hæc prius æquationis membrum conficere, cognitis omnibus in alterum rejectis; præterea dividendos eſſe omnes æquationis terminos per coefficientem ipſius xx, ſive ſimplex hic fuerit, ſive complicatus. Tandem hoc quoque notari meretur, quod ad æquationum quadraticarum formam reducantur omnes æquationes in quibus ſignum $\surd$ quantitatem afficit incognitam. Tum enim tolerari hoc ſignum non poteſt, ſed ſemper eliminandum erit, niſi forte compendio calculi locum faciat. Tollitur autem ſignum radicis quadraticae, ſi quantorum complexus, quem adficit, in unam æquationis partem transferatur, atque tum fiat utriusque membri quadratum. De ſigno enim radicis quadraticæ hic tantum ſermo eſt, quod hoc facto eliminari poſſe, ultro patet. Si plura ejusmodi ſigna in æquatione deprehendantur, unum eliminabitur poſt alterum. Per operationem enim deſcriptam ſemel repetitam uno plura ſigna

non

non excidunt, niſi in caſibus quibusdam ſingularibus. Sic tollentur ſigna radicalia in æquatione $a + \sqrt{x} = \sqrt{y}$ concludendo $\sqrt{x} = \sqrt{y} - a$ hincque $x = y - 2a\sqrt{y} + aa$. Ex qua porro fit $2a\sqrt{y} = y + aa - x$, et proinde $4aay = (y + aa - x)^2$.

§. 61.

Aequatione vero quadratica non pura quacunque ad formam generalem $xx + px = q$ reducta, valor litterae incognitae x ex eadem inveſtigabitur ſequentem in modum. Addatur cuilibet ejus membro quadratum dimidiae coefficientis termini ſecundi, quod eſt $\frac{1}{4}pp$, atque erit $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$, quae eſt aequatio quadratica pura, utpote in qua primum membrum quadratum eſt radicis $x + \frac{1}{2}p$, unde fit $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$ et $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p)}$. Dicuntur autem et apud aequationem compoſitam impuram valores litterae x, *Radices* aequationis, quarum ergo in aequatione quadratica non pauciores, quam duae ſunt. Aequatio vero quadratica $xx + px = p$ nec plures, quam duas habet radices. Ponatur enim ea aequatio praeter duas radices, quae ſint α et β, habere tertiam quandam, quae ſit γ, et erit per hanc hypotheſin $\alpha^2 + p\alpha = q$, $\beta^2 + p\beta = q$, ut et $\gamma^2 + p\gamma = q$. Eſt igitur primo $\alpha^2 + p\alpha = \beta^2 + p\beta$, hinc $p\alpha - p\beta = \beta^2 - \alpha^2$ vel $p(\alpha - \beta) = \beta^2 - \alpha^2$

$$\text{et } p = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha - \beta} = -\alpha - \beta.$$

Deinde eſt $\alpha^2 + p\alpha = \gamma^2 + p\gamma$, ex qua eodem modo ut ante deducitur $p = -\alpha - \gamma$. Proinde fit $-\alpha - \beta = -\alpha - \gamma$, et ideo $\beta = \gamma$, quod eſt *contra hypotheſin*.

§. 62.

Aequationis quadraticae purae radices abſolute ſpectatae inter ſe aequales ſunt, aequationis quadraticae non purae autem inaequales. Porro radicum iſtarum vel utraque rationalis eſt, ſi quantitatis $q + \frac{1}{4}pp$ radix quadratica rationalis ſit, vel utraque irrationalis, ſi haec radix irra-

irrationalis ſit. Poteſt et impoſſibilis fieri utraque radix, ſi haec quantitas ſit negativa, quod iis ſolis caſibus contingere poteſt, quibus q negativa eſt. Si enim hoc aſſumto q major fuerit quam $\frac{1}{4}pp$, erit $-q+\frac{1}{4}pp$ quantitas negativa, cujus radix quadratica impoſſibilis eſt, et omnem quantitatem, cui jungitur addendo vel ſubtrahendo, impoſſibilem reddit. Eodem poſito, quod ſcilicet q ſit negativa, ſi $q=\frac{1}{4}pp$, radices in unam coincidunt, eamque rationalem $\frac{1}{2}p$. Hoc caſu, ſi pro q ſcribatur $-\frac{1}{4}pp$, aequatio univerſalis $xx+px=q$ mutatur in hanc $xx+px=-\frac{1}{4}pp$ vel $xx+px+\frac{1}{4}pp=0$, quae aequatio pura eſt, quia ejus membrum antecedens eſt quadratum radicis $x+\frac{1}{2}p$ vel $-x-\frac{1}{2}p$, quarum utraque iterum eundem dat litterae A valorem, nempe $x=-\frac{1}{2}p$. Caeterum in aequatione quadratica $xx+px=q$ vel utraque radix realis, vel utraque impoſſibilis eſt. Non poteſt una realis et altera impoſſibilis eſſe. Summa vero earundem ſemper eſt quantitas realis, ſive ambae ſint reales, ſive ambae impoſſibiles.

§. 63.

Aequatio quadratica generalis $xx+px=q$ etiam ſequentem habere poteſt formam $xx+px-q=0$, vel $xx+px+q=0$, ſi q indifferenter denotet quantitatem poſitivam vel negativam. *Eſt vero aequatio quadratica* $xx+px+q=0$, *cujus binae radices ſunt* α *et* β, *eadem cum aequatione orta ex ſimplicibus* $x-\alpha=0$ *et* $x-\beta=0$ *in ſe ductis.* Erit nempe per hypotheſin $\alpha^2+p\alpha+q=0=\beta^2+p\beta+q$ hinc $\alpha^2+p\alpha=\beta^2+p\beta$, et $p\alpha-p\beta=\beta^2-\alpha^2$, hinc $p=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha-\beta}=-\alpha-\beta$. Hoc valore ſubſtituto fit $\alpha^2-\alpha^2-\alpha\beta=-q$, adeoque $q=\alpha\beta$. Quo valore iterum ſubſtituto, aequatio ad hanc reducitur formam:

$$x^2 \begin{matrix}-\alpha\\-\beta\end{matrix}\, x+\alpha\beta=0$$

quae coincidit cum ea, quae oritur ex multiplicatione ipſius

ipſius $x - \alpha = 0$ per $x - \beta = 0$. Ex his porro ſpont apparet, *quod in omni aequatione quadratica coefficiens ter mini* n*ti*, *non connumerato primo*, *ſit aequalis ſummae ſa ctorum ex ſingulis* n *radicibus*, *cum ſignis quidem propriis ſi* n *par*, *contrariis*, *ſi impar fuerit.*

§. 64.

Diſtinctio inter radices veras et impoſſibiles, impoſſibiles et imaginarias.

Quantitati impoſſibili, quae neque eſt, neque eſſ poteſt, oppoſitae quantitates poſſibiles, ſive rationale fuerint, ſive irrationales, *Verae* vel *Reales* vocantur. I impoſſibili autem quantitate, algebraice expreſſa, ſi par aliqua realis fuerit, quod relinquitur omni hoc reali ſub tracto, *Imaginarium* dicetur. Sic numeri $2 + \sqrt{-5}$ vel $2 - \sqrt{-5}$ impoſſibiles dicentur, ſed non imagina riae. Ineſt in iis pars realis, numerus ſcilicet 2, qu ablato relinquitur $\sqrt{-2}$, quae ſola dicetur imaginari ut omne quidem imaginarium et impoſſibile ſit, ſed no omne impoſſibile imaginarium. Licet generaliter im poſſibilitatis fundamentum ſit quaelibet contradictio; Al gebra tamen in quantitates imaginarias non aliter incidi quam per extractiones radicum, quia reliquarum oper tionum, quibus ex quantitatibus realibus alias elicit, u additio, ſubtractio, multiplicatio, diviſio, contrad ctionem nulla unquam involvit. Imaginaria autem i producta, ſi quantitatibus realibus jungantur, fiunt im poſſibilia. Quaevis radix hoc modo $\sqrt[n]{-b}$ expreſſa ima ginaria eſt, ſi n numerus par fuerit; realis, ſi n den taverit numerum imparem. Quare littera n numeru parem denotante, omnes radices imaginariae data fo mula continebuntur, quae etiam ad formam $\beta\sqrt[n]{-1}$ r duci poteſt, notante β quantitatem realem rationale vel irrationalem. Eſt enim $\sqrt[n]{-b} = \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{-1}$, qua ſi ponatur $\sqrt[n]{b} = \beta$ erit $\sqrt[n]{-b} = \beta\sqrt[n]{-1}$.

§. 6

§. 65.

Radices aequationes quadraticae $xx+px+q=0$ ambae poſſunt eſſe impoſſibiles, quando nimirum in formula $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}pp)}$ quantitas q eſt negativa et major, quam $\frac{1}{4}pp$. Ponatur pars radicis realis $-\frac{1}{2}p=R$ et pars imaginaria $=\sqrt{-Q^2}=Q\sqrt{-1}$, erit una radix $=R+Q\sqrt{-1}$ et altera $=R-Q\sqrt{-1}$. Hinc $p=(R+Q\sqrt{-1})+(R-Q\sqrt{-1})=2R$, et $q=(R+Q\sqrt{-1})(R-Q\sqrt{-1})=R^2+R\times Q\sqrt{-1}-R\times Q\sqrt{-1}+Q^2\times(\sqrt{-1})^2=R^2-Q^2$. Nihil igitur paradoxi in eo eſt, quod quantitas q, quæ eſt realis, ponatur eſſe productum ex duabus quantitatibus impoſſibilibus. Nam *quantitas imaginaria* $\beta\sqrt{-1}$ *in aliam imaginariam* $b\sqrt{-1}$ *ducta vel per eandem diviſa ſemper praebet productum reale* $-b\beta$ *et quotum realem* $\frac{\beta}{b}$. Eſt vero utique unitas realis 1 ad quantitatem imaginariam $b\sqrt{-1}$, ut alia imaginaria quaecunque ad realem $-b\beta$; vel quantitas imaginaria $b\sqrt{-1}$ ad unitatem realem 1, ut alia quaecunque imaginaria $\beta\sqrt{-1}$ ad quantitatem realem $\frac{\beta}{b}$. Ponatur in formula $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{-Q^2}$ pars realis $-\frac{1}{2}p$ iterum $=R$ et pars imaginaria $\sqrt{-Q^2}=I$, erunt duae æquationis $xx+px+q=0$ radices $x=R+I$, et $x=R-I$ adeoque $x-R-I=0$ et $x-R+I=0$; praeterea $xx+px+q=0=(x-R-I)(x-R+I)$. Si enim actu multiplicetur, erit productum $=x^2-2xR+xI-xI+RI-RI+R^2-I^2$ reale, quia $+xI$ et $-xI$, ut et $+RI-RI$ facta imaginaria ſeſe deſtruunt, atque I^2 factum reale eſt.

SECTIO VI.

DE

QVANTIS VARIABILIBVS ET LI-MITIBVS RATIONVM.

§. 66.

Omnis expreſſio analytica ex quantitate quadam x et aliis quomodocunque compoſita dicitur *functio* quantitatis x. Ejusmodi functiones quantitatis x ſunt ſequentes $a+3x$, $ax-4xx$, abx^3, $ax+b\sqrt{(aa-xx)}$, fgx, et hujus generis expreſſiones aliae. Quodſi itaque datur aequatio inter quantitatem aliam y et ejusmodi functionem quantitatis x, uti $y = ax + bxx$, erit y functio quantitatis x. Poſito jam, quod in functione $ax+bxx$ quantitates a et b ita ſint determinatae, ut perpetuo eundem valorem ſervent; atque valor quantitatis y mutari non poterit, niſi valor quantitatis x mutetur. Sic et viciſſim, licet valor quantitatum a et b perpetuo maneat idem, tamen quantitas y eundem valorem non ſervat, ſimulac valor quanti x mutationem quandam patitur. Quare ſi x ſit quantitas indeterminata omnes omnino valores determinatos in ſe complectens, licet a et b eundem perpetuo ſervent valorem, tamen et y erit quantitas indeterminata omnes omnino valores determinatos in ſe complectens. Quantitas determinata perpetuo eundem valorem ſervans dicitur *quantitas conſtans*, et quantitas indeterminata, quae omnes omnino valores determinatos ſub ſe complectitur vocatur *quantitas variabilis*. Ejusmodi quantitas variabilis in ſe complectitur omnes prorſus numeros, tam poſitivos, quam negativos, integros et fractos, rationales et irrationales. Quin etiam

cyphr

cyphra et numeri imaginarii a ſignificatu quantitatis variabilis non excluduntur. Quando ejusmodi problema analyticum ſolvendum proponitur, ubi tantum quantitates determinatae conſiderantur, litterae Alphabeti priores quantitates cognitas, poſteriores vero quantitates incognitas denotare ſolent. Analyſis autem Mathematica potiſſimum quoque adplicanda erit ad talia problemata, in quibus diſcrimen quantitatum cognitarum et incognitarum non tantopere ſpectatur, ſed praecipue ad illud quantorum genus reſpicitur, quorum unum ab altero dependet ſic, ut uno mutato ſimul alterum mutationem patiatur. Haec eſt ratio, cur ibidem litterae Alphabeti initiales *a*, *b*, *c*, etc. ad quantitates conſtantes, poſtremae vero *z*, *y*, *x*, *u*, etc. ad quantitates variabiles denotantes adhibentur.

§. 66.

Functio igitur quantitatis variabilis eſt expreſſio analytica quomodocunque compoſita ex illa quantitate variabili et quantitatibus conſtantibus. Loco quantitatis variabilis omnes valores determinatos ſubſtituere licet; hinc functio quantitatis variabilis innumerabiles valores determinatos induet, neque ullus valor determinatus excipietur, quem functio induere nequeat, cum quantitas variabilis etiam valores imaginarios involvat. *Functio igitur quantitatis variabilis ipſa erit quantitas variabilis*, atque ſi functio quaedam quantitatis variabilis *z* aequalis ponatur alii cuidam quantitati *y*, haec quantitas *y* non tantum functio quantitatis variabilis *z*, ſed et ipſa quantitas variabilis erit. Viciſſim quoque *ſi fuerit* y *functio quaecunque ipſius* z, *etiam* z *erit functio ipſius* y. Cum enim *y* ſit functio ipſius *z* dabitur aequatio, qua *y* per *z* et quantitates conſtantes certo modo inter ſe et cum variabili *z* combinatas exprimitur. Eadem vero aequatio ita mutari poterit, ut viciſſim quantitatem *z* per variabilem *y* et quantitates conſtantes exprimat, eritque ideo *z* functio ipſius *y*. Deinde *ſi fuerint* y *et* x *functiones*

ipſius z, *erit quoque* y *functio ipſius* x, *et viciſſim* x *functio ipſius* y. *Cum enim ſit* y functio ipſius *z*, erit quoque *z* functio ipſius *y*: ſimilique modo erit etiam *z* functio ipſius *x*. Hanc ob rem functio ipſius *y* æqualis functioni ipſius *x*, ex qua æquatione et *y* per *x* et vice verſa *x* per *y* definiri poterit. Proinde manifeſtum eſt, eſſe *y* functionem ipſius *x*, atque *x* functionem ipſius *y*.

§. 68.

Functiones dividuntur in algebraicas et tranſcendentes, atque diſcrimen hoc in modo compoſitionis, quo ex quantitate variabili et conſtantibus formantur, poſitum eſt. Jam ſtatim ab initio vidimus, quod formulae analyticae non magis ad Arithmeticam, quam ad Geometriam reſtrictae ſint, et quod ſigna combinationum, quibus in Analyſi utimur, per terminos geometricos non minus facile, quam per arithmeticos poſſint exprimi. Quando igitur ſit *y* functio ipſius *x*, ac litteræ in functione certo modo inter ſe combinatæ explicentur per lineas rectas, ſigna vero, quibus inter ſe combinantur per operationes geometricas; ad quemvis valorem determinatum ipſius *x* non tantum Arithmetice ſed et Geometrice inveniri poterit valor functionis *y*. Id quodſi fieri poſſit per ejusmodi operationes, quae tandem in poſtulata Geometriae Elementaris reſolvuntur; *conſtructio* cenſetur *geometrica*. Omnes vero operationes, quae non in poſtulata Geometriae Elementaris tandem reſolvuntur, *Geometriam tranſcendere* cenſentur, atque ideo et expreſſiones analyticae, quibus ejusmodi operationes exprimuntur, *Algebram tranſcendere* cenſentur. Hæc eſt ratio, cur *functio* y dicatur *algebraica*, ſi ex variabili *x* et conſtantibus componitur per operationes algebraicas ſolas, quaeque ideo ita eſt comparata, ut ad datam quamcunque rectam, quæ ponitur ipſi æqualis, inveniri poſſit recta æqualis functioni *y* per ejusmodi conſtructiones, quæ tandem in poſtulata Geometria Ele-

menta-

mentaris reſolvi poſſunt. Reliquæ *functiones tranſcendentes* vocantur, de quibus tamen notandum eſt, eas tum demum fore tranſcendentes, ſi operatio tranſcendens non ſolum ingrediatur, ſed etiam quantitatem variabilem afficiat. Quodſi enim operationes tranſcendentes tantum ad quantitates conſtantes pertineant, functio nihilominus algebraica eſt cenſenda.

§. 69.

Functiones algebraicæ ſunt vel *integræ*, vel *fractæ*. In illis variabilis x neque uſquam habet exponentem negativum, neque in denominatores fractionum alias ingreditur. Fractae functiones ſunt, in quibus denominatores variabilem x continentes, vel exponentes negativi ipſius x occurrunt. Praeterea functiones algebraicae dividuntur in *rationales* et *irrationales*. Functiones dicuntur rationales, ſi quantitas variabilis nulla irrationalitate involvatur; irrationales, ſi ſigna radicalia quantitatem variabilem afficiunt. In functionibus itaque rationalibus aliae operationes variabilem afficientes præter additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diviſionem et evectionem ad poteſtates, quarum exponentes ſunt numeri integri, non inſunt. Erunt itaque $\sqrt{a+x}$; $a - 2x + bx^2$; $\frac{\sqrt[3]{aa+xx}}{\sqrt{a+x}}$; functiones rationales variabilis x. Sed $\sqrt{x}$; $a+\sqrt{(aa-xx)}$; $\frac{aa - x\sqrt{(aa+xx)}}{a+x}$; ſunt functiones ipſius x irrationales. Proinde functionum rationalium integrarum formula generalis hæc erit, $a+bx+cx^2+ex^3+fx^4+gx^5+$ etc. et functionum rationalium fractarum formula generalis iſta

$$\frac{a+bx+cx^2+ex^3+fx^4+\text{etc.}}{g+hx+kx^2+mx^3+nx^4+\text{etc.}}$$

Ubi notandum eſt, quantitates conſtantes a, b, c, etc. ſive integrae ſint, ſive fractae, ſive rationales, ſive irrationa-

tionales, vel adeo tranſcendentes, naturam functionum non mutare. Conf. Euleri introductio in Analysin infinitorum. T. I. C. I. De functionibus in genere.

§. 70.

Si fuerit y functio quantitatis variabilis x rationalis integra talis, ut ſit $y = 0$ poſito $x = 0$, in formula generali functionis rationalis integrae $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \ldots \varkappa x^{m-1} + \lambda x^m$ debet eſſe conſtans $\alpha = 0$, ut ſit $y = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 +$ etc. ex qua aequatione fluit $\frac{y}{x} = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \epsilon x^3 +$ etc.

Patet igitur rationem $\frac{y}{x}$ variabilem eſſe, quia exponens hujus rationis eſt quantitas variabilis, nimirum functio ipſius variabilis x, et quidem talis, quæ decreſcit, quamdiu ipſa variabilis x minuitur. Poſito jam $x = 0$ ipſa functio y ſimul fit $= 0$ et rationis $\frac{y}{x}$ exponens $= \beta$, ſeu ipſa ratio $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{1}$. Paradoxum videtur, quod hic aſſeritur, eſſe $\frac{y}{x} = \frac{0}{0} = \frac{\beta}{1}$, quia cyphrae non ſunt quantitates, atque ideo una altera nec major nec minor eſſe dici poteſt. Verum ratio $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{1}$ revera non eſt ratio cyphrarum, ſed *limes*, ad quam ratio $\frac{y}{x}$ perpetuo adpropinquat, variabili x et cum ea ſimul variabili y continuo decreſcente; limes, quem non attingit ratio $\frac{y}{x}$, quamdiu x et y ſunt quan-

titates

titates veræ quantumvis parvæ. Ratio $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{1}$ ea eſt, quacum variabiles y et x evaneſcunt, ſeu quantitates eſſe deſinunt; atque haec limes rationis certa eſt et definita. Poteſt hæc limes rationis $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{1}$ vocari *ultima ratio* variabilium y et x, ſi ſpectetur ut ea, quacum y et x quantitates eſſe deſinunt, ſeu evaneſcunt. Si variabilis $x = 0$ iterum creſcere concipiatur, functio y cum ea ſimul creſcere incipit, atque ultima ratio $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{1}$ iterum ea erit, quacum creſcere incipiunt. Atque hoc reſpectu limes hujus rationis $\frac{y}{x}$, quæ eſt $\frac{\beta}{1}$, vocari poteſt *prima ratio* variabilium y et x, quacum quantitates eſſe incipiunt.

§. 71.

Si fuerit $y = \beta x$, erit $\frac{y}{x} = \beta$ ratio conſtans, atque limes hujus rationis non diverſa eſt a ratione, quam variabiles y et x perpetuo ſervant, ſive x creſcat, ſive decreſcat utcunque. Si praeterea fuerit $z = \gamma x$, iterum fit $\frac{z}{x} = \gamma$ ratio conſtans, et limes hujus rationis iterum cum ipſa ratione quantitatum y et z eadem, utcunque varietur x et cum ea ſimul z. Ratio $\frac{y}{x}$ diverſa eſt a ratione $\frac{z}{x}$, limes rationis $\frac{y}{x}$ a limite rationis $\frac{z}{x}$ pariter eſt diverſus, atque exponens prioris li-

mitis diverſus a limite poſteriori. Eſt nimirum $\frac{y}{x}$ = $\frac{\beta}{1}$ et $\frac{z}{x} = \frac{\gamma}{1}$ quemcunque valorem ſubeat x ſimul y atque z. Ratio $\frac{\beta}{1}$ ea eſt, cum qua y et evaneſcunt, atque ratio $\frac{\gamma}{1}$ ea eſt, cum qua z et evaneſcunt, ita ut in ipſo momento evaneſcentiae ſi $y : x = \beta : 1$, et $z : x = \gamma : 1$, ex quibus duabus analogiis ſimul deducitur limes rationis $y : z$, nimirum $y : z = \beta : \gamma$. Ratio nempe $\frac{y}{z}$, ſeu $\frac{\beta x}{\gamma x}$ pariter conſtans eſt, quippe quae ſemper eſt $= \frac{\beta}{\gamma}$, atque cum hac ratione evaneſcunt y et z ſimul, dum x evaneſcit. Quamvis igitur duo nihila revera inter ſe comparari non poſſint, quia non amplius ſunt quantitates; tamen $\beta \times 0 : \gamma \times 0$ exprimit rationem certam et determinatam, quae eſt $= \beta : \gamma$. Eſt quidem $\beta \times 0$ non amplius quantitas, nec $\gamma \times 0$ amplius eſt quantitas. Nihilo tamen minus ratio $\frac{\beta \times 0}{\gamma \times 0}$ vera et determinata eſt, et nimirum, cum qua evaneſcunt variabiles βx et γx, ſeu y et z, ſi x evaneſcat. Iſtae variabiles nunquam ſunt in ratione aequalitatis, nec ratio, cum qua evaneſcunt, eſt ratio aequalitatis, ſed conſtans iſta $\frac{\beta}{\gamma}$, quae ratio aequalitatis non eſt, niſi ſit $\beta = \gamma$. Proinde hoc ſenſu falſum eſt, eſſe $\beta \times 0 = \gamma \times 0$, niſi fuerit $\beta = \gamma$. Sic intelligi debent Summi, quos veneror, Mathematici, qui contendunt, infinite parva revera eſſe nihila, ſed tamen inter duo infinite parva intercedere poſſe rationem quamcunque

quo ſenſu infinite parva ſint nihila.

eunque. Ratio infinite parvorum revera non eſt ratio nihilorum, ſed ratio ultima, quacum duæ variabiles evaneſcunt. Similibus, quibus hic uſus ſum, ratiociniis demonſtrari poteſt, eſſe $\frac{a-a}{b-b} = \frac{a}{b} = \frac{0}{0}$. Eſt enim $a : b = x : \frac{bx}{a}$. Proinde $a+x : b + \frac{bx}{a} = a : b$. et porro $a - a + x : b - b + \frac{bx}{a} = a : b$ (§. 186. *Geom.*). Hinc rationis conſtantis $\frac{a}{b} = \frac{a-a+x}{b-b+\frac{bx}{a}}$ limes $=$

$$\frac{a-a}{b-b} = \frac{a}{b}.$$

§. 72.

De quantitatibus infinitum creſcentibus, earumque rationibus finitis.

Omnis quantitas variabilis non tantum continuo decreſcere et tandem penitus evaneſcere poteſt, Sed ejusmodi quantitas quoque continuo creſcere poteſt, idque in infinitum. Sit $y = ax + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \ldots hx^{n-1} + kx^n$, atque patet, poſito $x = \infty$, etiam y in infinitum excreſcere. Ex æquatione vero $y = ax + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 \ldots + hx^{n-1} + kx^n$ deducitur $\frac{y}{x^n} = \frac{a}{x^n} + \frac{b}{x^{n-1}} + \frac{c}{x^{n-2}} + \frac{e}{x^{n-3}} + \frac{f}{x^{n-4}} \ldots + \frac{h}{x} + k$.

Iterum igitur ratio $\frac{y}{x^n}$ variabilis eſt, et exponens hujus rationis variabilis, ita quidem, ut variabili x et cum ea ſimul ipſa y creſcente exponens illius decreſcat. Termini enim omnes præter ultimum conſtantem decreſcunt (§. 18. *Ar. Elem.*). Poſito denique $x = \infty$, quo caſu

etiam y in infinitum excreſcit, exponens hujus rationi eſt k, quia omnes termini ſunt $= o$ (§. 25.). Nam ob $\frac{1}{\infty} = o$, eſt $\frac{1}{\infty^n} = o^n = o$, et proinde $\frac{a}{\infty^n} = \frac{a}{\infty} \times \frac{1}{\infty^{n-1}} = o \times o^{n-1} = o^n = o$. Eadem hi quoque notari merentur, quae in §. 70 et 71. jam ſunt mo nita ratione quantitatum evaneſcentium ſeu infinite par vorum. Ratio $\frac{y}{x^n} = k$ proprie non eſt ratio infini te magnorum y et x^n ad ſe invicem, quia fieri nequit ut duo quanta inaſſignabilia inter ſe comparentur. Sed ratio $\frac{y}{x^n} = k$ *limes* eſt rationis, ad quem variabiles y et x in infinitum creſcentes continuo adpropinquant, quem que non adtingunt, quamdiu ſunt determinantæ et aſſi gnabiles quantitates, ſed $\frac{y}{x^n} = k$ eſt ultima ratio, qua cum aſſignabiles eſſe deſinunt.

§. 73.

Sit igitur denuo $y = ax$, et poſito $x = \infty$, etiam y excreſcit infinitum. Quia vero eſt $\frac{y}{x} = a$ ratio conſtans, etiam limes rationis, quacum y et x aſſignabi les eſſe deſinunt, eſt $= \frac{a}{1}$. Si præterea ſit $z = b$ erit $\frac{z}{x} = b$, et limes rationis, quacum quantitates va riabiles z et x aſſignabiles eſſe deſinunt, pariter $= \frac{b}{1}$ Ex his ſimul deducitur ratio $y : z$ atque limes rationis quacum variabiles y et z ſiunt infinitæ. Nam ex ana logis $y : x = a : 1$ et $z : x = b : 1$, quæ etiam in caſu infiniti

infiniti veræ ſunt, deducitur $y : z = a : b$, vel $a\infty : b\infty = a : b$. Eſt igitur $\frac{a}{b}$ limes rationis $\frac{a\infty}{b\infty}$ ſeu $\frac{y}{z}$.

Nam ratio $\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$ conſtans eſt, utcunque x varietur, ſive x evaneſcat, ſive excreſcat in infinitum; atque cum hac ratione variabiles y et z aſſignabiles eſſe deſinunt ſimul, dum x fit inaſſignabilis. Quamvis igitur revera duo infignite magna inter ſe comparari non poſſint, fieri tamen poteſt, ut aſſignetur limes illius rationis, quacum aſſignabiles eſſe deſinunt, quippe quæ in eo, quem conſideramus, caſu certa eſt et determinata. Variabiles ax et bx nunquam ſunt in ratione æqualitatis, nec cum ratione æqualitatis aſſignabiles eſſe deſinunt, ſed cum ratione conſtante $\frac{a}{b}$. Atque ideo hoc ſenſu falſum eſt, eſſe $a\infty = b\infty$, niſi ſit $a = b$. Ratio igitur finita, quæ intercedere poteſt inter duo infinite magna ſecundum Recentiores Analyſtas, revera non eſt ratio infinite magnorum inter ſe, ſed potius ratio, quacum duæ variabiles finitae quantitates eſſe deſinunt. J. Newtoni Principia philosophiae naturalis mathem. L. I. Sect. I. Lem. XI. Schol. §. 74.

Ipſa vero hæc ultima ratio, quacum duæ variabiles evaneſcunt vel in infinitum excreſcunt, non ſemper eſt finita, nec exponens hujus rationis quantitas determinata. Evolvamus itaque caſus, in quibus exponens iſte quantum finitum eſt et determinatum. Quod attinet ad ultimas rationes variabilium evaneſcentium, ſi ſit $y = ax^n$ atque $z = bx^n$, exiſtente n numero poſitivo vel integro vel fracto, eſt limes rationis $\frac{y}{z} = \frac{a}{b}$; ideoque hæc ultima ratio finita. Nam $\frac{y}{x^n} = \frac{a}{1}$,

et

et $\frac{z}{x^n} = \frac{b}{1}$ etiam in caſu evaneſcentiæ. Proin

$y : x^n = a : 1$ et $x^n : z = 1 : b$, unde fit $\frac{y}{z} = \frac{a}{b}$

Si fuerit $y = ax^n$ exiſtente n numero integro poſiti

unitate majore, eſt $\frac{y}{x} = ax^{n-1}$. Proinde ra

$\frac{y}{x}$ variabilis atque valor fractionis $\frac{y}{x}$ decreſcens

prouti x decreſcit. Evaneſcente x ſimul evaneſcit va

lor fractionis $\frac{y}{x}$ et ipſa ratio $\frac{y}{x}$ fit infinita. Qu

ſi ideo generaliter ſit $y = ax^{\frac{r+s}{m}}$ et $z = bx^{\frac{r}{m}}$, r, s, et exiſtentibus integris poſitivis, poſito $x = 0$ eſt ulti rationis $\frac{y}{z}$ exponens $= 0$. Eſt enim $\frac{y}{x^{\frac{r}{m}}} =$

$\frac{ax^{\frac{s}{m}}}{1}$ atque $\frac{z}{x^{\frac{r}{m}}} = \frac{b}{1}$, proinde $y : x^{\frac{r}{m}} =$

$ax^{\frac{s}{m}} : 1$ et $x^{\frac{r}{m}} : z = 1 : b$. ideoque $\frac{y}{z} = \frac{ax^{\frac{s}{m}}}{b}$

$= \frac{0}{b} = 0$.

§. 75.

Si fuerit y functio ipſius x integra vel rationa vel irrationalis atque z pariter ejusmodi functio ipſi x; ſi præterea exponens infimæ poteſtatis ipſius x functione y æqualis ſit exponenti infimæ dignitatis fu

functione z : ultima ratio $\frac{y}{z}$ eſt finita. Sit enim $y = ax^n + bx^{n+r} + cx^{n+r+s} +$ etc., atque $z = fx^n + gx^{n+p} + hx^{n+p+q} +$ etc.; erit $\frac{y}{x^n} = \frac{a}{1}$ atque $\frac{z}{x^n} = \frac{f}{1}$ variabili x evaneſcente. Proinde tum $y : x^n = a : 1$ et $x^n : z = 1 : f$, ideo $y : z = a : f$, vel $\frac{y}{z} = \frac{a}{f}$. Si vero exponens infimæ dignitatis in functione y major ſit, quam in functione z, erit ultima ratio $\frac{y}{z}$ infinita, et caſu $x = 0$, fractio $\frac{y}{z} = 0$. Si enim fuerit $y = ax^{m+n} + bx^{m+n+o} + cx^{m+n+o+p}$ etc., atque $z = fx^m + gx^{m+n} + hx^{m+r+s} +$ etc., habemus caſu $x = 0$, $\frac{y}{x^m} = \frac{0}{1}$ atque $\frac{z}{x^m} = \frac{f}{1}$, ſive $y : x^m = 0 : 1$ atque $x^m : z = 1 : f$, proinde $y : z = 0 ; f$, ſive $\frac{y}{z} = \frac{0}{f} = 0$.

§. 76.

Simili modo dijudicandæ ſunt ultimæ rationes quantitatum variabilium in infinitum creſcentium. Si fueriit $y = ax^m$, ratio $\frac{y}{x^m} = a$ conſtans eſt, utcunque varietur x, quare etiam cum hac ratione variabiles y et x^m fiunt inaſſignabiles. Sic quoque variabiles y et z cum ratione finita conſtante aſſignabiles eſſe deſinunt, ſi fuerit $y = ax^m$ atque $z = bx^m$. Quia enim caſu $x = \infty$ $\frac{y}{x^m} = \frac{a}{1}$, et $\frac{z}{x^m} = \frac{b}{1}$, vel $y : x^m = a : 1$,

atque

atque $x^m : z = 1 : b$; erit $y : z = a : b$, vel $\frac{y}{z} = \frac{a}{b}$

Si fuerit $y = ax^m$ exiſtente m numero poſitivo unitat majore, fit $\frac{y}{x} = \frac{ax^{m-1}}{1}$ ratio variabilis, atque pro inde ſi $x = \infty$, $\frac{y}{x} = \frac{\infty}{1}$, et ultima ratio infinit

Si ideo generaliter ſit $y = ax^{\frac{r+s}{m}}$ atque $z = bx^{\frac{r}{m}}$, e

$\frac{y}{x^{\frac{r}{m}}} = ax^{\frac{s}{m}}$ atque $\frac{z}{x^m} = b$, caſu infiniti fit $\frac{y}{x^{\frac{r}{m}}} =$

$\frac{1}{\infty}$ atque $\frac{z}{x^{\frac{r}{m}}} = \frac{b}{1}$, ſive $y : x^{\frac{r}{m}} = \infty : 1$, atque $x^{\frac{r}{m}}$

$: z = 1 : b$, proinde $y : z = \infty : b$, vel $\frac{y}{z} = \frac{\infty}{b}$

ratio infinita. Hinc $\frac{z}{y} = \frac{b}{\infty} = 0$. Ex his pr terea concludimus ſequentia.

§. 77.

Si y fuerit functio integra rationalis vel irratio lis variabilis x, atque z pariter ejusmodi variabilis functio; ſi præterea exponens maximæ dignitatis ipſi x in functione y æqualis fuerit exponenti maximæ di gnitatis ipſius x in functione z; erit ultima ratio $\frac{y}{z}$ cum qua variabiles y et z fiunt infinite magnæ, f nit

ſita. Sit enim $y = ax^{p} + bx^{p-q} + cx^{p-q-r} +$ etc., atque $z = fx^{p} + gx^{p-m} + hx^{p-m-n} +$ etc, caſu $x = \infty$ erit $\frac{y}{x^{p}} = \frac{a}{1}$ atque $\frac{z}{x^{p}} = \frac{f}{1}$, unde concluditur $y : x^{p} = a : 1$, $x^{p} : z = 1 : f$, atque $y : z = a : f$, vel $\frac{y}{z} = \frac{a}{f}$. Si vero exponens maximæ dignitatis ipſius x in functione y major fuerit, quam exponens maximæ dignitatis ipſius x in functione z; erit ultima ratio $\frac{y}{z}$, cum qua variabiles y et z finitæ eſſe deſinunt, infinita. Sit enim $y = ax^{m+n} + bx^{m+n-r} + cx^{m+n-r-s}$ etc., atque $z = fx^{m} + gx^{m-p} + hx^{m-p-q} +$ etc., caſu $x = \infty$, fiet $\frac{y}{x^{m+n}} = \frac{a}{1}$ atque $\frac{z}{x^{m+n}} = \frac{0}{1}$, proinde $y : x^{m+n} = a : 1$, $x^{m+n} : z = 1 : 0$, atque $y : z = a : 0$, unde $\frac{y}{z} = \frac{a}{0} = \infty$ atque $\frac{z}{y} = \frac{0}{a} = 0$.

§. 78.

Ex iis, quæ hucusque de ultimis variabilium tam evaneſcentium, quam infiniteſcentium rationibus ſunt expoſita, ratio patet, cur infinite magna pariter ac infinite parva in diverſos ab *Analyſtis* diſtribuantur ordines, licet enim infinite magna non tantum ſed et infinite parva, quippe quæ ſunt nihila, revera ſint incomparabilia, ultima tamen eorundem ratio, quacum evaneſcunt vel infiniteſcunt, ſeu comparabiles eſſe deſinunt, ſæpius finita eſt et determinata, ſæpius vero ipſa quoque infinita, qui caſus ſollicite ſunt diſtinguendi. Exponens enim ejusmodi ultimæ duarum variabilium rationis quan-

quantitas eſt finita atque determinata, ſi ipſa ratio ulti ma eſt finita: iſte vero exponens vel infinite magna e quantitas vel infinite parva, ſeu nihilo æqualis, ſi inf nita eſt ultima ratio. Sic exponens rationis $\frac{y}{z}$ ca $x = \infty$ eſt finita quantitas, ſi tam y quam z fuerit fun ctio n dimenſionum ipſius x. Si vero ſit y ipſius x fun ctio $n+m$ dimenſionum atque z ejusdem variabilis fun ctio n dimenſionum, n et m exiſtentibus numeris poſiti vis caſu $x = \infty$ eſt $\frac{y}{z} = \infty$, et $\frac{z}{y} = 0$. Prætere ſi y et z fuerint functiones variabilis x quarumcunqu dimenſionum, exponens vero infimæ dignitatis in utra que ſit m, ratio ultima $\frac{y}{z}$ caſu $x = 0$ finita eſt, e valor fractionis $\frac{y}{z}$ finitus. Si vero exponens infi mæ dignitatis ipſius x in functione y major eſt, quan exponens infimæ dignitatis ipſius x in functione z, ulti ma ratio $\frac{y}{z}$ caſu $x = 0$ infinita eſt, atque $\frac{y}{z} = 0$ vel $\frac{z}{y} = \infty$. Eſt itaque $\frac{a\infty^n}{b\infty^n} = \frac{a}{b}\infty^n \times \frac{1}{\infty^n}$ $= \frac{a}{b}\infty^n \times 0^n = \frac{a}{b}$, ſi in functione $\frac{ax}{bx}$ fiat $x =$ ∞. Sed $\frac{a\infty^n}{b\infty^{n+m}} = \frac{a}{b\infty^m} = \frac{b}{a}\infty^n \times 0^{n+m} = \frac{a}{b}$ $0^m = 0$, ſi in functione $\frac{ax^n}{bx^{n+m}}$ fiat $x = \infty$, atque numeri n et m ſint poſitivi.

SECT

SECTIO VII.

DE PROPRIETATIBVS RADICVM IN AEQVATIONIBVS, QVAE SVNT QVADRATICA ALTIORES.

§. 79.

Omnis æquatio ſive pura ſit, ſive non pura, reduci poteſt ad aliquam formarum ſequentium:

$$x + p = 0$$
$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$
$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

expreſſiones generales pro omnibus aequationibus

vel generatim

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + \phi x^{m-n+1} \ldots + rx^2 + sx + t = 0$$

ſi m denotet exponentem maximæ dignitatis ipſius x, et n numerum exprimentem, quotus eſt terminus in ordine. Quodſi in formulis hisce coefficientium $a, b, c, d, \ldots r, s, t,$ quivis modo affirmativam modo negativam quantitatem modo nihilum denotare ponatur; nulla concipi poteſt æquatio, quæ legitime reducta non cum aliqua earum congruat. *Reducendi* vero modus ab eo, qui apud æquationes quadraticas expoſitus eſt, non differt. Tolluntur ſigna radicum, quae quantitatem quæſitam afficiunt. Radicum enim quadraticarum ſigna qui eliminare novit, ſimili methodo cubicarum et reliquarum radicum ſigna facile tollet. Deinde quantitates incognitae ex denominatoribus transferuntur in numeratores, atque æquatio ordinatur ſecundum dignitates litteræ, quæ notat quæſitum, ut præcedat ſuprema, et hanc deinde ordine ſequantur reliquae. Tandem ſi

modus eas reducendi

ſuprema incogniti dignitas aliquem coefficientem cogn tum habuerit, per hunc omnes æquationis termini d videntur.

§. 80.

Quodſi in æquatione ita reducta ſubſtituatur num rus quicunque pro x, atque hoc facto æquatio evan ſcat, terminis ita productis per contraria ſigna ſeſe d ſtruentibus; id indicio eſt, numerum iſtum eſſe rad cem illius æquationis. Neque enim æquatio aliud vul quam ut pro x ſumatur numerus, qui datis eo mod qui per ſigna indicatur, junctus, efficiat, ut prius æqu tionis membrum æquale fiat poſteriori, vel ut id, quo oritur omnibus æquationis terminis ad eandem parte locatis, ſit nihilum. Id ergo ſi numerus aliquis loc litteræ x ſubſtitutus efficiat, eum radicem eſſe, necel eſt. Sic in æquatione $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ ſi p natur $x = 5$, prius æquationis membrum mutatur in $- 125 - 80 + 80$, quod nihilum eſſe, ultro appare quare 5 eſt radix hujus æquationis. Hinc et converſ ſi numerus quicunque a ſit radix æquationis, eo loco ſubſtituto evaneſcere debet prius æquationis membrun Sit igitur a ejusmodi numerus, qui in æquatione x^m $ax^{m-1} \ldots + \phi x^{m-n+1} \ldots + rx^2 + sx + t =$ ſubſtitutus efficit, ut omnes termini prioris membri ſe deſtruant, erit a hujus æquationis radix, atque $x =$ ſeu $x - a = 0$. Jam dico, quod *aequationis* x^m $ax^{m-1} \ldots + \phi x^{m-n+1} \ldots + rx^2 + sx + t =$ *membrum primum quod brevibus indicabimus per littera* X *absque reſiduo dividi poſſit per æquationis ſimplicis* $x -$ $= 0$ *membrum primum* $x - a$. Diviſo enim ipſo X pe $x - a$ ſi fiat quotus Q remanente R, erit $\frac{X}{x - a} = Q$ $\frac{R}{x - a}$ et adeo $X = (x - a) Q + R$. Sed quia X 0, erit $(x - a) Q + R = 0$. Praeterea eſt $x - a =$

hinc $(x-\alpha)\,Q=0$, et ideo quoque $R=0$. Quare X dividetur per $x-\alpha$ absque reſiduo.

§. 81.

Quodſi aequatio $X=0$ *absque reſiduo dividi queat per aequationem quandam ſimplicem* $x-\alpha=0$, *erit* α *radix illius aequationis.* Diviſa enim functione X per $x-\alpha$ ſi inveniatur quotus Q, erit $\frac{X}{x-\alpha}=Q$ et ideo $X=(x-\alpha)\,Q=0$, quia $x-\alpha=0$. Ideo X evaneſcit ſi α pro x in eadem ſubſtituatur, atque exinde patet, quod α ſit radix aequationis $X=0$. Ex hac propoſitione ſequentia deducuntur corollaria.

I. *Quodſi plures aequationes ſimplices* $x-\alpha=0$, $x-\beta=0$ - - - $x-\eta=0$ *ducantur in ſe invicem; orietur aequatio, cujus radices ſunt* α, β, - - η. Aequatione enim, quae oritur, generaliter per $X=0$ indicata, prius membrum X absque reſiduo dividi poteſt per $x-\alpha$ non tantum, ſed et per $x-\beta$ - - - et $x-\eta$. Ideo non tantum α ſed et β - - - η ſunt hujus aequationis radices.

II. *Numerus radicum aequationis poteſt eſſe aequalis exponenti ſummae dignitatis, ad quam incognita* x *in aequatione adſcendit.* Quodſi enim aequatio quaedam orta ſit ex multiplicatione ſimplicium $x-\alpha$, $x-\beta$ - - - - $x-\eta$ in ſeinvicem, quarum numerus eſt n, eadem aequatio eſt n dimenſionum, et praeterea ad minimum habet n radices.

§. 82.

Si aequatio $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ . . . $+ px^{m-n+1} + qx^{m-n} + rx^2 + sx + t$ *cujus radices ſint* α, β, γ - - ζ, η *dividi intelligatur per* $x-\eta$; *erit quotus aequatio gradus* $(m-1)$ti. Quaecunque quantitas fuerit η, ſive radix, ſive minus, quotus ad ſequentem reducetur formam:

$$x^{m-1} + Ax^{m-2} + Bx^{m-3} \ldots Px^{m-n+1}$$
$$+ Qx^{m-n} \ldots + Rx^2 + Sx + T + \lambda x^{-1}$$
$$+ \mu x^{-2} + \nu x^{-3} + \sigma x^{-n+1} + \tau x^{-n} \ldots \text{etc.}$$

Erit itaque multiplicato quoto per diviſorem $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Qx^{m-n+1} + Sx^2 + Tx + \lambda + \mu x^{-1} + \nu x^{-2} \ldots + \tau x^{-n+1} \ldots$ etc. $- \eta x^{m-1} - \eta A x^{m-2} \ldots \eta P x^{m-n+1} - \eta R x^2 - \eta S x - \eta \Gamma - \eta \lambda x^{-1} + \eta \mu x^{-2} \ldots - \eta \sigma x^{n+1}$ etc. formula haec eadem cum $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + qx^{m-n+1} \ldots rx^2 + sx + t$. Comparatis igitur terminorum homogeneorum coefficientibus erit

$$A - \eta = a, \text{ hinc } A = \eta + a$$
$$B - \eta A = b, \text{ hinc } B = \eta A + b$$
$$= \eta^2 + a\eta + b$$
$$C - \eta B = c, \text{ hinc } C = \eta B + c$$
$$= \eta^3 + a\eta^2 + b\eta + c$$

et generatim, ſi n non major eſt, quam $m+1$, coefficiens termini $n$ti, ſive $Q = P\eta + q$. Dico vero; fore coefficientem termini $n$ti, ſi n non major eſt, quam $m+1$,

$$= \eta^{n-1} + a\eta^{n-2} + b\eta^{n-3} \ldots + p\eta + q.$$

Si enim haec formula valet pro coefficiente termini $(n-1)$ti, valet quoque pro coefficiente termini $n$ti. Eſt nempe $Q = P\eta + q$, unde ſi $P = \eta^{n-2} + a\eta^{n-3} + b\eta^{n-4} \ldots + p$, erit $Q = \eta^{n-1} + a\eta^{n-2} + b\eta^{n-3} \ldots + p\eta + q$. Cum itaque valeat pro coefficiente termini ſecundi, valet pro coefficiente termini tertii, et pro omnibus usque ad terminum $(m+1)$tum.

Sequitur ex hiſce, quod termini $(m+1)$ti coefficiens λ ſit $= \eta^m + a\eta^{m-1} + b\eta^{m-2} \ldots + r\eta^2 + s\eta + t$. Si igitur η ſit radix aequationis, erit $\lambda = 0$. Evaneſcente vero λ ſimul μ, ν et ſequentes coefficientes omnes fiunt $= 0$. Cum enim coefficiens termini $n$ti poſt $(m+1)$tum ſit $\eta\sigma$, patet, poſito $\sigma = 0$, evaneſcere etiam τ, unde ſi $\lambda = 0$, omnes, qui ſequuntus λ, coefficientes fiunt $= 0$. Series igitur $x^{m-1} + Ax^{m-2} + Bx^{m-3} + \ldots$ etc. abrumpitur in termino $m$to.

§. 83.

Si *aequatio* $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + px^{m-n+1} + qx^{m-n} \ldots + rx^2 + sx + t = 0$ *cujus radices*

radices ſunt α, β, γ . . . ζ, η, *dividatur per aequationem ſimplicem* $x-\eta$, *quotus* $\frac{X}{x-\eta}$ *fiet* $=0$ *a ſubſtitutis* α, β, γ . . ζ, *non vero a ſubſtituto* η *vel ullo alio quanto.* Evaneſcit enim numerator X a ſubſtitutis α, β, γ . . ζ; ergo et fractio $\frac{X}{x-\eta}$ evaneſcit. Quodſi vero ſubſtituatur η, evaneſcit ſimul numerator et denominator, quare hoc caſu eſt $\frac{X}{x-\eta}=\frac{0}{0}$, qui valor non eſt $=0$. Ponitur enim X ita evaneſcere, ut termini, ex quibus X componitur, per ſigna contraria ſeſe deſtruant. Si igitur omnes ipſius x termini poſitivi ſimul ſumti fuerint $=P$ erunt omnes negativi ſimul ſumti $=-P$. Proinde loco $\frac{X}{x-\eta}$ habemus $\frac{P-P}{\eta-\eta}=\frac{P}{\eta}$, qui valor non eſt $=0$. Denique quotus $\frac{X}{x-\eta}$ non fit $=0$, niſi evaneſcente numeratore. Si itaque aliud quoddam quantum π ſubſtitutum efficiat, ut ſit $\frac{X}{x-\eta}=0$, erit π radix aequationis $X=0$, *quod contra hypotheſin.*

Eſt igitur $\frac{X}{x-\eta}=0$ aequatio gradus $(m-1)$ti habens radices α, β . . ζ, quarum numerus eſt $m-1$, ſi numerus radicum aequationis $X=0$ fuit m.

§. 84.

Si verum eſt de quavis aequatione gradus m *habente radices* α, β, *etc. eſſe ipſam eandem cum aequatione orta ex multiplicatione ſimplicium* $x-\alpha$, $x-\beta$ . . *etc. in ſe*

invi-

invicem; idem verum erit de aequatione gradus (m+1)*ti* nimirum et hanc eſſe eandem cum aequatione orta ex ductu ſimplicium in ſe invicem, quarum quaelibet continet unam ex radicibus aequationis propoſitae. Sit enim aequationis $x^{m+1} + ax^m + bx^{m-1} \ldots + rx + sx + t$ (X) $= 0$ radices $\alpha, \beta \ldots \zeta, \eta$, et divid intelligatur $X = 0$ per $x - \eta = 0$ erit $\frac{X}{x-\eta} = 0$ aequatio gradus *m*ti habens radices $\alpha, \beta \ldots \zeta$, quae itaque poſita ſub hypotheſi eadem erit cum aequatione orta ex multiplicatione ſimplicium $x - \alpha, x - \beta \ldots x - \zeta$. Quodſi itaque hæc indicetur per Z, erit $Z = \frac{X}{x-\eta}$ et adeo $X = Z(x - \eta)$, ex quo patet propoſitum.

Cum igitur æquatio quaevis quadratica ſit eadem cum aequatione orta ex ejusmodi ſimplicibus, in ſe ductis, quarum quaelibet continet unam ex radicibus aequationis quadraticae; eadem lex valet pro cubica, hinc et pro biquadratica et quavis alia.

§. 85.

Aequatio habens m *radices eſt totidem dimenſionum.* Habeat enim aequatio quaedam *m* radices, quae ſint $\alpha, \beta, \gamma \ldots \eta$, erit haec eadem cum aequatione orta ex *m* ſimplicibus $x - \alpha, x - \beta \ldots x - \eta$ in ſe ductis. Haec vero eſt aequatio *m* dimenſionum.

Aequatio igitur m *dimenſionum habet totidem radices.* Sit enim falſum et numerus radicum ſit *n*, erit aequatio *n* dimenſionum, quod *contra hypotheſin.*

Porro *quaevis aequatio* m *dimenſionum oritur ex* m *aequationibus ſimplicibus in ſe ductis, quarum quaevis continet unam ex radicibus illius aequationis ordinis* m. Ubi notandum eſt, quod radix poſitiva in aequatione ſimplici, per quam datur, ſemper afficiatur ſigno —, negativa ſigno +. Sit enim $x = a$; erit *a* radix affirmativa, cum forma aequationis ſimplicis, per quam exhibetur, ſit

$-a = 0$. Sit $x = -a$, erit $-a$ radix negativa, cum aequatio ſimplex, per quam exhibetur, ſit $x + a = 0$. Caeterum radix illa a vel poſſibilis erit, vel impoſſibilis, et ſi prius vel rationalis, vel irrationalis.

Si nullus aequationis cujuscunque gradus m legitime ordinatae terminus defecerit, vel ſi defecerit, in ejus loco ſcriptus intelligatur $\pm\, 0 x^{m-n+1}$, tot in aequatione ſunt radices, quot ſignorum combinationes fieri poſſunt, quodvis cum eo componendo, quod immediate ſequitur. Sic in aequatione $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 12x - 13 = 0$ quinque ſunt radices, et totidem ſignorum ſucceſſiones iſtae $++$, $+-$, $--$, $-+$, $+-$. Sunt enim ſex aequationis termini.

§. 86.

Quaecunque ſint aequationis ſigna, ſi multiplicetur per ſimplicem, quae radicem negativam continet, hoc modo:

$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 12x - 13 = 0$$
$$x + 2 = 0$$

$$x^6 + 3x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 12x - 13x \quad . \quad . \quad (A)$$
$$+ 2x^5 + 6x^4 - 10x^3 - 8x^2 + 24x - 26 \quad (B)$$

$$x^6 + 5x^5 \quad . \quad . \quad . \quad . + 4x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . + x^4 - 14x^3 \quad . \quad . + 11x - 26 = 0$$

duae inter multiplicandum producuntur ſeries ſignorum, una in A, altera in B, plane eaedem, ſed quarum poſterior uno loco magis verſus dextram promota eſt: quo fit, ut quodlibet ſignum ſeriei B ſit idem cum ſigno ſeriei A, quod illud uno loco praecedit. Si vero per aequationum ſimplicem, cujus radix eſt affirmativa, multiplicetur quaecunque aequatio, prout ſequitur,

 x^5

$$x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 12x + 13 = 0$$
$$x - 2 = 0$$

$$x^6 + 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 13x \;.\;.\;.\;.\; (A)$$
$$- 2x^5 - 6x^4 - 10x^3 + 8x^2 + 24x - 26 \;.\; (B)$$

$$x^6 + x^5 \;.\;.\;.\;.\; - 4x^2 + 37x \;.\;.$$
$$- x^4 - 14x^3 \;.\;.\;.\;.\; - 26$$

ſigna poſterioris ſeriei B, quæ multiplicatione producitur, ſignis ſeriei prioris A adverſantur ita, ut ſi quodcunque ſeriei B ſignun ſumatur, id contrarium ſit illi ſigno ſeriei A, quod uno loco præcedit.

§. 87.

Jam ex ſignis harum ſerierum A et B atque ex magnitudinibus terminorum, qui iis ſignis adficiuntur, colliguntur ſigna æquationis productæ. Patet autem in ſigis his locandis ſemper incipiendum eſſe a ſigno primi termini ſeriei A, atque locando ſigna hujus ſeriei pergendum, donec ad terminum deveniatur, cui major terminus cum ſigno contrario in ſerie *B* ſubſcriptus eſt: Idque ubi contigerit deſerta ſerie A ſigna deinde ex ſerie B ordine petenda eſſe, donec iterum ad quantitatem deveniatur, cui major cum ſigno contrario in ſerie A imminet. Superioris enim hujus termini ſigno loco inferioris aſſumto, quæ ſequuntur, jam iterum ex ſuperiori ſerie petenda erunt, et porro alternatim, ita vero, ut in ſerie B demum deſinamus, cujus termino ultimo cum nullus in ſerie A terminus immineat, ejus ſignum in facto mutari nequit. Hinc ſequitur in collocandis ita producti ſignis ſemel minimum ex ſerie A in ſeriem B tranſeundum eſſe, et quotcunque tranſitus æquatio multipli-

tiplicanda exigit, eorum tamen, qui fiunt ex A in B numerum ſemper unitate majorem eſſe numero regreſſuum ex B in A.

§. 88.

Tranſitus ex ſerie in ſeriem fieri nunquam debet, niſi termini ſerierum A et B, quorum alter ſcriptus eſt ſub altero, ſigna adverſa habuerint. Quodſi igitur primo æquatio multiplicetur per ſimplicem radicis negativæ; duo hi erunt ſignorum ordines, apud quos tranſitus fieri ſolos debet.

I.		II.	
a	*c*	*a*	*c*
+	−	+	−
d	*b*	*d*	*b*
+	+	−	+
vel		vel	
a	*c*	*a*	*c*
−	+	−	+
d	*b*	*d*	*b*
−	−	+	−

Ponitur tranſeundum eſſe vel a ſigno *a* ad ſignum *b*, vel a *d* ad *c*. Signum ergo *a* cum ſigno *b* idem erit, quia æquatio multiplicans habet radicem negativam. Signum *c* vero, cum adverſum ſit ſigno *b*, etiam ſigno *a* adverſum erit. Sed *d* vel convenire poteſt cum ſigno *b*, vel ei adverſum eſſe. Quodſi ſecundo æquatio multiplicetur per ſimplicem radicis poſitivæ; ordo ſignorum, apud ea loca ſerierum A et B, in quibus tranſitum fieri neceſſe eſt, erit alteruter ex duobus, qui ſequuntur:

I		II.	
a	*c*	*a*	*c*
+	+	+	+
d	*b*	*d*	*b*
−	−	+	−
vel		vel	
a	*c*	*a*	*c*
−	−	−	−
d	*b*	*d*	*b*
+	+	−	+

Jam eſt ſignum *b* adverſum ſigno *a*, et cum prætere transſitus ab *a* ad *b*, vel a *d* ad *c* ponitur faciendus etiam *c* ſigno *b* adverſum, adeoque cum *a* idem erit Cæterum ſigna *b* et *d* vel eadem vel diverſa erunt. Conſequitur ex hiſce, per multiplicationes has mutari debere ſignorum ſucceſſiones ita, ut ſi in æquatione multiplicanda numerentur ſucceſſiones ſignorum ſimilium ++ vel − −, alius iſtarum ſucceſſionum numerus deprehendatur in æquatione per multiplicationem producta; vel certe numerus ſucceſſionum ſignorum adverſorum + − vel − + in æquatione producta a numero ſucceſſionum ejusmodi in æquatione multiplicata diverſus evadat. Id autem qua demum ratione fiat, exemplo, ſed eo univerſali, optime declarabitur.

§. 88.

Sit primo æquatio quæcunque multiplicanda per ſimplicem radicis negativæ, cujus adeo ſigna ſunt ++, ac productæ ponantur multiplicatione hac ſeries ſignorum, quales ab initio deſcriptæ ſunt, ſequentes:

(A) *α a b c β γ δ d ε*
++ − − − + − + − + − − +

(B) *a b c d*
+ + − − − + − + − + − − +.

Signa-

Signatis ergo omnibus ſucceſſionibus ſimilium ſignorum ++ vel −− per litteras *a*, *b*, *c*, *d* easdem in utraque ſerie, patet, earum numerum indifferenter obtineri, numeratis his litteris, ſive in ſerie A occurrant, ſive in B, ſed ita ut nulla bis ſumatur. Si jam cum ponuntur ſigna aequationis productae, apud *α* tranſeundum ſit ex A in B, apud *β* regrediendum ex B in A; apud *γ* iterum ex A in B deſcendendum, et ita porro; ſucceſſiones ſignorum ſimilium in aequatione producta, quae ſcilicet ſigna petit ab initio uſque ad *α* ex ſerie A, ab *α* uſque ad *β* ex ſerie B a *β* ad *γ* iterum ex A et ita porro alternando, tandemque ab *ε* ad finem ex B colliguntur hunc in modum. Prima ſucceſſio eſt *a*; altera neceſſario accidit apud *α* ex A in B deſcendendo: tertia eſt *b* ſeriei B, quarta foret *c* ejusdem ſeriei, ſed hæc aſcendendo in ſeriem A deſtruitur, unde huc uſque non ſunt ſucceſſiones, niſi tres. Sed quarta accedit apud *γ* deſcendendo, quinta apud *δ* adſcendendo, ſexta eſt *d*, et ſeptima accedit apud *ε* deſcendendo. Eſt ergo in hoc exemplo numerus ſucceſſionum ſimilium ſignorum tribus ejusmodi ſucceſſionibus auctus. Generatim autem patet, per omnem deſcenſum ex A in B numerum ſucceſſionum harum neceſſario auctiorem fieri; per adſcenſum vero vel itidem unam talem ſucceſſionem ad reliquas accedere, ut hic contingit apud *δ*, vel unam decedere, ut apud *β* contingit ſucceſſione *c* deſtructa. Unde cum transgreſſiones ex A in B neceſſario una plures ſint, quam regreſſiones ex B in A; generatim ſequitur, quotiescunque in ponendis ſignis facti ex una ſerie in alteram tranſeundum ſit, numerum ſucceſſionum ++ vel −−, quae ad ſimiles ſucceſſiones aequationes multiplicatae vel ſeriei A aut B ea re accedunt, neque unitate minorem, neque univerſo transgreſſionum numero majorem eſſe. Sic in hoc exemplo ſucceſſiones ejusmodi tres acceſſerunt, cum tranſitus facti ſint quinque.

§. 90.

§. 90.

Sit ſecundo æquatio multiplicanda per ſimplicem radicis affirmativæ, cujus adeo ſigna ſunt + —, ſintqu inter multiplicandum producta ſignorum ordines ſecun dum dicta explicandi iſti

(A) $\overset{a}{+} - \overset{\alpha}{-} \overset{b}{+} \overset{c}{-} \overset{\beta}{-} - \overset{\gamma}{-} - \overset{\delta}{-} \overset{d}{+} \overset{\epsilon}{+}$

(B) . . — $\overset{a}{+}$ + $\overset{b}{-}$ $\overset{c}{+}$ + + + + + $\overset{d}{+}$ — —.

Signentur jam omnes ſucceſſiones ſignorum adverſorum + — vel — + litteris *a*, *b*, *c*, *d*. Græcis litteris tribua tur ſignificatio, cum illa, quam habent in §. præc. ea dem. Nunc prima ſignorum adverſorum ſucceſſio eſt *a* ſuperioris ſeriei, altera accedit apud *α* ex A in B trans eundo. Tertia eſt *b*, quarta foret *c* ſeriei B, ſed hæc deſtruitur per tranſitum ex B in A, unde quarta eſt, quæ accedit apud *γ* deſcendendo, quinta fit aſcendendo apud *δ*, ſexta eſt *d* ſeriei A, et ſeptima, quæ fit deſcen do apud *ε*. Eadem igitur hic prorſus obtinent, quæ apud præcedentem multiplicationem vidimus. Per omnem deſcenſum numerus ſucceſſionum + —, vel — +, quæ in ſunt in æquatione multiplicata, vel in ſerie A aut B neceſſario una augetur, per adſcenſum vero vel itidem talis ſucceſſio ad reliquas accedit, vel una ab eo rum numero detrahitur. Adſcenſionum vero numerus unitate minor eſt numero deſcenſionum. Ideo quoque univerſus numerus harum ſucceſſionum, quæ ad æqua tionem quamcunque accedunt, ſi per ſimplicem radicis poſitivæ multiplicatur, non poteſt eſſe minor unitate, neque major univerſo transgreſſionum numero.

§. 91.

Quia ergo per quamlibet æquationis multiplicatio nem, per quam nova radix realis negativa in eam infer tur, una minimum ſignorum ſimilium ſucceſſio + + vel

vel — — ad earum, quæ in æquatione multiplicata inſuerunt, numerum accedit; numerus harum ſucceſſionum in quacunque æquatione numero radicum ejus realium negativarum minor non erit. Similemque in modum concludetur, neque numerum ſucceſſionum ſignorum adverſorum + — vel — + numero radicum cujuscunque æquationis realium affirmativarum, minorem fore. Quare, ſi in æquatione omnia ſigna fuerint eadem + vel —, nulla æquationis radix realis poſitiva erit. Si foret vel una, etiam una minimum in ea deprehenderetur ſignorum adverſorum ſucceſſio. Si ergo hujusmodi aequatio praeter reales negativas, alias radices contineat, illae impoſſibiles erunt. Sic quoque ſi in aequatione quodlibet ſignum utrique vicino adverſum fuerit, non inerit in æquatione radix realis negativa. Si foret vel una, una nimirum in ea appareret ſimilium ſignorum ſucceſſio. Quare ſi ejusmodi æquatio praeter reales poſitivas alias habuerit radices, hæ impoſſibiles erunt.

§. 92.

In quavis aequatione, cujus radices omnes reales ſunt, numerus ſucceſſionum ſignorum adverſorum + — vel — + aequalis erit numero radicum ejus affirmativarum, et numerus ſucceſſionum ſimilium ſignorum + + vel — — aequalis numero radicum ejusdem aequationis negativarum. Sit enim n numerus radicum negativarum et N numerus ſucceſſionum + + vel — — ejusdem aequationis. Præterea ſit m numerus radicum ejus affirmativarum et M numerus ſucceſſionum + — vel — +. Erit ergo $n+m = N+M$. Jam N non minor eſt quam n. Eſt vero et N non major quam n. Si enim ponatur $N > n$, erit $M < m$, quod contra demonſtrata. Ergo eſt $N = n$, et hinc quoque $M = m$.

Si igitur undecunque conſtiterit, numerum radicum aequationis realium negativarum numero N, ſimulque numerum radicum realium affirmativarum numero

Mae.

M aequalem non eſſe; concludendum erit, aliquas radice aequationis impoſſibilis eſſe.

§. 93.

Si A factum denotet ex certis quibusdam factoribu ſimplicibus, qui ſcilicet in alios ſimpliciores dividendo r ſolvi non poſſunt; non producetur idem A ex aliis factor bus ſimplicibus a prioribus diverſis. Sint inter factore ſimplices facti A hi duo α et β; ſique A dividatur pe α, prodeat a ſimplex vel ex aliis factoribus multiplican do compoſitus; ſi vero A dividatur per β prodeat b itidem vel ſimplex, vel compoſitus: erit $\alpha a = A = \beta b$ hinc $\alpha = \frac{\beta b}{a}$. Quare cum α inſtar numeri integ ſit, et $\frac{\beta b}{a}$ integer erit, divideturque adeo βb per absque reſiduo, quod fieri non poſſe, niſi a in duos fa ctores ſolvi queat, quorum alter dividat β alter ver b, facile patet, ſi inter eos factores et unitas admittatu et β atque b. Sint factores iſti m et n, erit $mn =$ et $\alpha = \frac{\beta}{m} \times \frac{b}{n}$, atque $\frac{\beta}{m}$ integer erit, ut $\frac{b}{n}$. Cum ergo factor β ſimplex ſit, erit vel $m = 1$ vel $m = \beta$. Sit 1) $m = 1$, erit $\alpha = \beta \times \frac{b}{n}$, id e $\beta \times \frac{b}{n}$ erit æqualis ſimplici α, quod eſſe non pot niſi $\frac{b}{n} = 1$, et hinc $b = n$. His autem in $\alpha a =$ introductis, ſit $\alpha n = \beta n$, atque $\alpha = \beta$. Ideo diviſo α et β, qui diverſi eſſe ponebantur, non deprehend tur diverſi. Sit 2) $m = \beta$, erit $\frac{\beta}{m} = 1$, et $\alpha =$

$= \beta n$. Sed $\alpha = \frac{b}{n}$, ſive $\alpha n = b$. His vero iterum in $\alpha = \beta b$ introductis, fit $\alpha\beta n = \beta a n$, ex quo patet, neque hoc ſumto, A in diverſos factores ſimplices ſolvi.

Omnis aequatio $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + rx + s = 0$ eſt factum ex tot factoribus ſimplicibus hujus formae $x - \alpha = 0$, $x - \beta = 0$ etc. compoſitum, quot unitates inſunt in numero m, in quibus α, β, etc. ſunt radices aequationis propoſitae. Ideo omnis aequatio ex certis tantum aequationibus ſimplicibus $x - \alpha = 0$, $x - \beta = 0$ etc. componetur, non ex aliis atque aliis.

§. 94.

Si aliquis aequationis terminus defecerit, poterit ejus loco ſcribi vel $+ 0$, vel $- 0$, perinde enim eſt. Quodſi ergo alterutro horum ſumto, alius numerus radicum affirmativarum vel negativarum ex ſucceſſionibus ſignorum colligitur, quam ſi ſumatur alterum; id indicio erit, aequationem radices impoſſibiles continere, quia in eadem aequatione alius atque alius numerus radicum affirmativarum ineſſe nequit. Continget autem id, ut per dictas poſitiones diverſi radicum affirmativarum vel negativarum numeri producantur, ſi ſignum termini, qui deficientem praecedit, idem fuerit cum ſigno termini deficientem ſequentis, non aliter. Sit $y^3 + py - q = 0$, atque ſi in locum termini deficientis ponatur $+ 0y^2$, aequatio fit $y^3 + 0y^2 + py - q = 0$, cujus duae producuntur radices negativae et una affirmativa. Si vero eodem loco ſcribatur $- 0y^2$, omnes aequationis radices per ſigna indicantur affirmativae eſſe. Utrumque cum eſſe non poſſit, neceſſe eſt, earum aliquas impoſſibiles eſſe.

quando [illegible] poſſit aequatio non habere radices impoſſibiles.

§. 95.

Si in aequatione plures uno termino deinceps defecerint, radicum aliquas impoſſibiles eſſe palam erit, niſi in

in locum cujuslibet terminorum deficientium $+0$ et -0 ſubſtituto omnes ſignorum combinationes, quae ita oriuntur eundem radicum affirmativarum vel negativarum numerum indicaverint. Id ergo cum eſſe non poſſit omnes ejusmodi aequationes radices impoſſibiles continebunt. Sit aequatio $x^3 + a = 0$, vel $x^3 - a = 0$ in qua duo deinceps termini deficiunt. Subſtituto ergo in locum cujusvis nunc $+ 0$, nunc $- 0$, quatuor hi ſignorum ordines prodeuns

ex priori				ex poſteriori			
+	+	+	+	+	−	+	−
+	+	−	+	+	−	−	−
+	−	+	+	+	+	+	−
+	−	−	+	+	+	−	−

quorum primi indicant, omnes radices negativas eſſe vel affirmativas, reliqui non omnes. Patet autem vel ex his exemplis, manentibus ſignis extremis, ſi intermedia omni, quo poſſunt, modo coordinentur, fieri non poſſe, ut idem per omnes hos ordines radicum numerus indicetur.

§. 96.

Aequatione quacunque per quamcunque ſimplicem radicis poſitivae multiplicata, numerus radicum poſitivarum in aequatione producta unitate major fieri debet; idemque debet contingere radicibus negativis ſi radix aequationis ſimplicis datam multiplicantis fuerit negativa. Id ergo augmentum niſi per ordinem ſignorum aequationis ea multiplicatione productae indicetur, aliquas radicum aequationis multiplicatae impoſſibiles eſſe, palam erit. Ita ſi aequatio $x^3 + x^2 + 3x + 5 = 0$ multiplicetur per $x - 2 = 0$, prodit $x^4 - x^3 + x^2 - x - 10 = 0$, cujus tres radices affirmativas ordo ſignorum exhibet, et unam negativam. Debebat autem eſſe una affirmativa et tres negativae. Ergo aequatio propoſita continet radices impoſſibiles.

Segner Elem. Anal. fin. Sect. IX. §. 507 – 527.

§. 97

§. 97.

Quodſi quantitas quaecunque realis, quae ſit E, dividatur per impoſſibile R + I compoſitum ex reali R et imaginario I quocunque; quotus partim ex realibus conſtabit, partim ex imaginariis, quia ſive ex ſolis realibus conſtare ponatur, ſive ex ſolis imaginariis, multiplicatus in diviſorem R + I dividendum reale E reſtituere nequit. Sit omnium terminorum quoti realium ſumma $= r$, et ſumma omnium terminorum quoti imaginariorum $= i$, ita ut integer quotus ſit $= r + i$; erit $E = (R+I)(r+i) = Rr + Ri + Ir + Ii$, ubi Rr et Ii quantitates reales erunt, reliquae Ri et Ir imaginariae. Jam quia E realis ponitur, erit $E = Rr + Ii$ et $Ri + Ir = 0$, ergo quoque eſt $E = Rr + Ii - Ri - Ir = (R - I)(r - i)$. Exinde concludimus, quod quantitas realis E diviſa per impoſſibile $R - I$ reddat quotum $r - i$, qui a priori $r + i$ ſolis ſignis imaginariorum differt. Quodſi igitur aequatio dividi poſſit per ſimplicem $x + r + i = 0$, notante r quantitatem realem et i impoſſibilem, ita ut ſit $-r - i$ radix aequationis; eadem aequatio quoque per $x + r - i = 0$ dividetur, atque ideo ſimul habebit radicem impoſſibilem $-r + i$. *Quodſi igitur aequatio habeat radices impoſſibiles, earum numerus ſemper eſt numerus par*, atque perpetuo quacunque earum ſumta poteſt reperiri alia, quae ſi illi addatur, ſummam realem exhibeat. Eſt enim $(-r+i) + (-r-i) = -2r$, et $(+r+i) + (+r-i) = 2r$. Aequationum autem ſimplicium, per quas duae iſtae radices impoſſibiles exhibentur, altera ducta in alteram, aequatio quadratica rationalis producitur. Eſt enim $(x + r + i)(x + r - i) = (x+r)^2 - ii$, in qua expreſſione utrumque quadratum reale eſt.

§. 98.

Cum ergo et aequatio ſimplex, quae radicem realem exhibet, in aliam ejus generis ſimplicem ducta, aequationem quadradicam realem det, etſi non ſemper

rationalem: quaelibet aequatio alicujus eorum ordinum, quorum index eſt numerus par, conſtabit ex aequationibus quadraticis realibus in ſe invicem ductis. Si vero impar fuerit exponens ordinis, ad quem aequatio pertinet, ad quadraticas iſtas aequationes ſimplex accedet itidem realis. Si index ordinis fuerit $2n$, erit n numerus aequationum iſtarum quadraticarum: ſi vero index ordinis fuerit $2n+1$, ad eundem quadraticarum numerum æquatio ſimplex realis accedet. Separata igitur primo, ſi opus ſit, reali ſimplici, ſi aequatio in quadraticas reales ſoluta intelligatur, quarum haec forma generalis erit $xx+px+q=0$; radices ejus omnes, praeter illam, quæ in ſimplici ſeparata ineſt, ad hanc formam redibunt $x=-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)}$, neque erit in æquatione radix impoſſibilis, quae per hanc formam exhiberi nequeat: in qua cum p et q quantitates reales ſint, licet non ſemper ſint rationales, impoſſibilitas ab eo ſolo pendebit, quod $\frac{1}{4}pp-q$ ſit quantitas negativa. Quare omnis radix impoſſibilis cujuscunque aequationis reduci poterit ad hanc formam $\alpha \pm \sqrt{-\beta}$ indeque porro ad ſimpliciſſimam iſtam $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ notantibus α et β quantitates reales. Segneri. El. An. fin. Sect. IX. §. 564–571

§. 99.

Si propoſitis quantitatibus quotcunque, quarum ſingulae binæ, vel ſingulæ tres etc. inter ſe combinandæ ſunt; quæratur numerus combinationum poſſibilium; numerus indicans, quot earum invicem combinari debeant, dicitur *Exponens combinationum.* Sic datis quantitatibus tribus, ſi quaeratur numerus combinationum, quando ſingulæ binæ inter ſe combinantur, erit numerus 2 exponens combinationis. In caſibus ſpecialibus, ſi numerus quantitatum combinandarum haud magnus eſt, dato exponente ipſe numerus combinationum haud difficile invenitur. Sic quantitas una nullam combinationem admittit. Si duae quantitates a et b ſunt combinandae, una tantum combinatio ab poſſibilis eſt, exponente

exiſtente

exponente exiſtente 2. Trium a, b, c, combinationes ſunt tres, nimirum ab, ac, bc, ſi nimirum 2 eſt exponens combinationis. Numero vero 3 pro exponente combinationis aſſumto, combinatio tantum una eſt poſſibilis. Si quatuor quantitates a, b, c, d exponente 2 ſunt combinandæ, erunt combinationes ſex iſtæ ab, ac, bc, ad, bd, cd, poſſibiles; exponente 3 poſſibiles ſunt combinationes quatuor abc, abd, bcd, acd; denique exponente 4 iterum una tantum combinatio $abcd$ poſſibilis manet. Caeterum quotcunque ſint quantitates combinandæ, ut α, β, γ, δ — — η, ϑ, quarum ſingulæ n in quamvis combinationem aſſumuntur, ita ut exponens combinationis ſit numerus n; quibusdam harum combinationum tantum inerit ultima ϑ, reliquis non inerit, ideoque numerus earum combinationum, quibus non ineſt ϑ, aequalis erit numero combinationum poſſibilium, ſi quantitatum α, β, γ - - η, ſingulæ n inter ſe combinentur. Reliquarum combinationum, quibus ineſt ϑ, quælibet non niſi $n-1$ ex quantitatibus cæteris α, β, γ - - η, continebit, ideoque numerus earum combinationum, quibus ineſt ϑ, æqualis erit numero combinationum poſſibilium, ſi quantitatum α, β, γ - - η, ſingula $n-1$ inter ſe combinentur. Combinationum numerus, qui oritur ex α, β, γ - - η, exponente combinationis n, ponatur $=\lambda$; combinationum numerus, qui oritur ex α, β, γ - - η, exponente combinationis $n-1$, ſit $=\mu$; denique numerus combinationum, qui oritur ex α, β, γ - - - η, ϑ, exponente n ponatur $=\nu$: et patet, eſſe $\nu=\lambda+\mu$.

Oriuntur igitur omnes combinationes ν, ſumendo omnes combinationes λ, omnesque combinationes, quæ oriuntur, ſi cuivis combinationum μ jungatur ϑ. Quodſi igitur quantitates combinatæ in ſe multiplicari intelligantur, et ſumma factorum λ ſit $=\varphi$, factorum $\mu=\psi$, factorum $\nu=\pi$; patet, fore $\pi=\varphi+\psi\vartheta$.

§. 100.

Si pro æquationibus gradus mti *verum ſit, coefficientem termini* nti *non connumerato primo, eſſe æqualem ſummæ factorum ex ſingulis* n *radicibus, cum ſignis propriis, ſi* n *par, contrariis vero, ſi* n *impar fuerit; idem verum eſt pro aequationibus gradus* (m+1)*ti.* Sint aequationis gradus (m+1)ti.

$x^{m+1} + Ax^{m} + Bx^{m-1} \dots Px^{m-n+1} \dots + Rx^{2} + Sx + T$ radices α, β, γ - - - η, ϑ; ſitque aequatio, cujus radices ſunt α, β, γ - - η, excluſo ϑ

$x^{m} + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + \psi x^{m-n+1} \dots + rx^{2} + sx + t$, qua ducta in $x - \vartheta$ oriatur

$$x^{m+1} + ax^{m} + bx^{m-1} \dots + \phi x^{m-n+1} \dots + sx^{2} + tx$$
$$- \vartheta x^{m} - \vartheta a x^{m-1} \dots - \vartheta \psi x^{m-n+1} \dots - \vartheta r x^{2} - \vartheta s x - \vartheta t.$$

Erit itaque $P = \phi - \vartheta\psi$.

Sit primum n numerus par, et aſſumtis, quæ ponuntur in propoſitione, erit

$+\phi$ = ſummæ factorum ex ſingulis n radicibus α, β, γ - - η, cum ſignis propriis,

$+\psi$ = ſummæ factorum ex ſingulis $n-1$ radicibus α, β, γ - - η, cum ſignis contrariis.

Hinc $P = \phi - \vartheta\psi$ = ſummæ factorum ex ſingulis n radicibus, α, β, γ - - η, ϑ, cum ſigno propriis.

Si vero n fuerit numerus impar, eodem modo patet eſſe

$+\phi$ = ſummæ factorum ex ſingulis n radicibus α, β, γ - - η cum ſignis contrariis,

$+\psi$ = ſummæ factorum ex ſingulis $n-1$ radicibus α, β, γ - - η cum ſignis propriis.

Ergo eſt $P = \phi - \vartheta\psi$ = ſummæ factorum ex ſingulis n radicibus α, β, γ - - η, ϑ, cum ſignis contrariis.

Et

Ex his concludimus, quod lex iſta coefficientium valeat pro omnibus aequationibus algebraicis. Valet enim pro æquationibus quadraticis, ergo et pro cubicis, hinc quoque pro biquadraticis et ſic porro; ergo valet pro omnibus. Eſt igitur coefficiens termini ſecundi aequationis algebraicæ legitime ordinatæ æqualis ſummæ omnium radicum cum ſignis contrariis; coefficiens termini tertii æqualis ſummæ factorum ex ſingulis binis, cum ſignis propriis; coefficiens termini quarti æqualis ſummæ factorum ex tribus quibusvis radicibus cum ſignis contrariis, et ſic porro uſque ad terminum ultimum, qui æqualis eſt facto omnium radicum cum ſignis propriis vel contrariis, prouti vel numero pari vel impari a termino æquationis primo diſtat, ipſo termino primo non connumerato.

§. 101.

Ea, quæ huc uſque de radicibus æquationem altiorum fuerunt expoſita, adeo univerſalia ſunt, ut de eorum veritate poſſimus eſſe convicti, quicunque valor litteris α, β, γ, etc. quibus radices deſignavimus, tribuatur. Denotare nimirum poſſunt tam impoſſibiles, quam reales quantitates, et hoc caſu tam poſitivas quam negativas, integras et fractas, rationales vel irrationales.

Universalitas doctrinae de radicibus aequationum ostenditur.

Numerus quivis ſub forma fracti $\frac{a}{b}$ continetur, poſito $b=1$, ſi integer ſit. Ideo patet, aequationes ſimplices $x-\alpha=0$, $x-\beta=0$, $x-\gamma=0$, etc. ex quibus æquatio quævis gradus altioris multiplicando conflatur, ſub hac quoque forma $x-\frac{a}{b}=0$ vel $bx-a=0$, vel $a-bx=0$ exhiberi poſſe. Quodſi terminus æquationis ultimus fuerit numerus fractus verus, vel etiam ſpurius integro quodam non æquipollens, non omnes æquationis radices erunt numeri rationales integri; ſi enim omnes forent integri, etiam factum ex omnibus ideoque ter-

minus ultimus integer foret, quod eſt contra hypotheſin. Aequationis igitur hujus formæ $px^m + qx^{m-1} \ldots + rx + s$, quæ facta reductione fit $x^m + \frac{q}{p} x^{m-1} \ldots + \frac{r}{p} x + \frac{s}{p}$ radices non omnes erunt numeri integri, ſi $\frac{s}{p}$ ſit fractio vera, vel ſpuria integro non æquipollens. Quodſi in hac æquatione ſit $s = 1$, et p numerus integer, omnes radices illius æquationis poſſunt eſſe numeri fracti, eundem habentes numeratorem unitati æqualem. Quod ſi hoc accidat, erit denominator p factum ex omnibus harum fractionum denominatoribus, et æquationes ſimplices, quæ radices harum æquationum $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ etc. exhibent, erunt hujus formae $x - \frac{1}{\alpha} = 0$; $x - \frac{1}{\beta} = 0$ etc, vel $1 - \alpha x = 0$, $1 - \beta x = 0$ etc. Praeterea coefficiens cujuslibet termini $n$ti non connumerato primo eſt ſumma factorum ex ſingulis n earum fractionum, quae ſunt radices aequationis. Multiplicetur tota æquatio, quæ ſit gradus m per denominatorem termini ultimi, qui eſt factum ex m radicibus cum contrariis vel propriis ſignis, prout terminus is vel numero impari vel numero pari a termino primo diſtat; erit coefficiens cujuscunque termini $n$ti non connumerato primo, æqualis ſummæ factorum et ſingulis $m-n$ denominatoribus fractionum, quæ ſunt radices. Scribatur æquatio ordine inverſo ſequentem in modum

$$1 + ax + bx^2 + cx^3 \ldots sx^m = 0$$

atque in termino ultimo 1 erit $m = n$ ideoque $m-n=0$; in termino ſecundo a fine, eſt $m-n=1$, ideoque coefficiens a = ſummæ ex ſingulis denominatoribus fractionum,

num, quae ſunt hujus æquationis radices cum ſignis contrariis; in termino tertio a fine eſt $m-n=2$, et ideo b = ſummæ factorum ex ſingulis 2 denominatoribus fractionum earum, quæ ſunt radices cum ſignis propriis. Ideo generaliter eſt termini $r$ti a fine, non connumerato ultimo coefficiens æqualis ſummæ factorum ex r denominatoribus earum fractionum, quæ ſunt hujus aequationis radices, cum ſignis propriis, ſi n par, contrariis vero, ſi n fuerit numerus impar.

SECTIO VIII.

DE
SOLVTIONE PROBLEMATVM DETERMINATORVM SECVNDO ORDINE ALTIORVM ARITHMETICA.

§. 102.

Methodus in antecedentibus expoſita, ſecundum quam ex aequatione problematis fundamentali eruitur valor incognitae quantitatis, ſi ſimplex ſit iſta aequatio, ſufficiens non eſt, quando propoſiti problematis conditiones aequatione quadam altiore et quidem affecta exprimuntur. Ipſa illa methodus jam aliqua ratione mutanda erat, ſi aequatio problematis erat quadratica non pura. Detegendi nimirum erant duo valores incognitae quantitatis; cum unicus tantum valor ſit inveniendus, ſi propoſiti problematis conditiones per ſimplicem aequationem poterant exprimi. Jam vero generaliter omnis aequatio algebraica tot exhibet valores incognitae quantitatis, quot unitates continet exponens ordinis, ad quem aequatio pertinet. Atque detegendi

ſunt iſti valores omnes, imaginariis non excluſis, ſi problema plenarie ſolvere velimus. Tantum abeſt, ut generales methodi cognitae ſint, in quovis caſu ad completam ejusmodi problematis ſolutionem perducentes, ut potius ipſum hoc negotium vires Analyſeos hucuſque cognitae ſuperare fatendum ſit. Exponere in hac ſectione tantum poſſumus prima intricatae hujus inveſtigationis elementa, cum methodos hunc in finem adhibendas perplures ipſa demum Analyſis Sublimior ſuppeditare queat.

§. 103.

Generalis aequationum conſideratio in praecedente ſectione expoſita docet, radices aequationis vel reales eſſe, vel impoſſibiles. Atque reales iterum rationales eſſe poſſunt vel irrationales. Si aliqua æquationis radix fuerit realis et rationalis, ea quae de coefficientibus terminorum aequationis algebraicae expoſita ſunt, clare oſtendunt methodum, quamvis ejusmodi radicem inveniendi. Demonſtravimus enim (§. 100.) quod coefficiens termini ſecundi aequationis algebraicae legitime ordinatae aequalis ſit ſummae omnium radicum cum ſignis contrariis; coefficiens termini tertii aequalis ſummae factorum ex ſingulis binis cum ſignis propriis; coefficiens termini quarti aequalis ſummae factorum ex tribus quibusvis radicibus cum ſignis contrariis, ſicque porro uſque ad terminum ultimum plane cognitum, qui aequalis eſt producto omnium radicum in ſe invicem cum ſignis propriis vel contrariis, prouti vel numero pari vel impari diſtat a termino aequationis primo, ipſo termino primo non connumerato. Reſolvatur itaque terminus aequationis legitime ordinatae ultimus in ſuos factores, atque hi factores vel cum ſignis propriis vel contrariis, prout diſtantia termini ultimi a primo illud jubet, ſucceſſive ſubſtituantur loco incognitae quantitatis in aequatione data. Quodſi enim eorum numerorum aliquis ſubſtitutus efficit, ut omnes termini aequationis

methodus radices aequationis inveniendi.

mutuo ſeſe deſtruant, is erit unus incognitae quantitatis valor, idemque rationalis. Sit propoſita aequatio $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$, erunt ultimi termini cum ſigno contrario factores vel, 1, 3, −5; vel −1 + 3 + 5 vel + 1 − 3 + 5. Poſito jam $x = +1$, erit $1 - 3 - 13 + 15 = 0$. Poſito $x = +3$, aequationis termini non deſtruuntur, proinde + 3 non eſt radix aequationis. Poſito $x = +5$ fiet $125 - 75 - 65 + 15 = 0$, ideo quoque + 5 eſt radix aequationis. Quia jam factores + 1, + 5, et − 3, ultimum aequationis terminum producunt; tentetur ſubſtitutio cum ſigno contrario $x = -3$. Et quia fit $-27 - 27 + 39 + 15 = 0$, − 3 eſt radix aequationis, atque proinde omnes hujus aequationis radices inventae ſunt, quia tribus plures non adſunt.

§. 104.

Ex his patet, eſſe $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x-1)(x+3)(x-5)$ (§. 84.). Poterat igitur quoque per diviſionem tentari, utrum aliquis factorum termini ultimi ſit radix aequationis. Quia enim generaliter aequatio algebraica altioris gradus eſt productum ex tot aequationibus ſimplicibus, quarum quaelibet exhibet unam aequationis radicem, quot unitates continet exponens ordinis ad quem aequatio pertinet; formentur aequationes ſimplices $x - 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 5 = 0$, vel $x + 1 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 5 = 0$, atque his aequationibus diviſio tentetur. Quodſi propoſita æquatio per unam earum aequationum ſimplicium diviſibilis eſſe deprehendatur abſque reſiduo; eadem aequatio ſimplex unam aequationis propoſitae indicat radicem. Si vero aequatio propoſita per nullam earum aequationum ſimplicium deſcripto modo formatarum dividi queat; hoc indicio erit, quod eadem nullam omnino agnoſcat radicem realem rationalem.

§. 105.

Ultima hæc methodus palmam praeripit priori.

 Quod-

Quodſi enim aequatio propoſita ſit gradus m, eaque diviſibilis deprehendatur per aequationem ſimplicem $x \pm a = 0$, quotus ſit aequatio gradus $m - 1$, quæ ſi inventa ſit, eodem modo tractanda eſt, ac prior. Eadem enim hæc aequatio continet reliquas aequationis propoſitae radices. Labor vero ſæpe minuitur inveniendi radices hujus aequationis, quae quotus eſt, ſi nimirum ultimus ipſius terminus, quod ſemper accidit, niſi radix inventa ſit vel $+1$ vel -1, minor eſt termino ultimo prioris aequationis. Quin ſaepius aliae extant methodi aequationis hujus radices, quae quotus eſt, omnes non tantum reales rationales, ſed quoque irrationales vel adeo impoſſibiles inveniendi. Sic ſi æquatio propoſita fuerit cubica, quotus ſit æquatio quadratica, cujus ambae radices ſemper inveniuntur ex §. 61. Sic in exemplo §. *praec.* invenitur $\frac{x^3 - 3x^2 - 13x + 15}{x - 1} = x^2 - 2x - 15$. Aequatio vero $x^2 - 2x - 15 = 0$ quadratica eſt, atque proinde duae reliquae radices ſatis promte inveniuntur. Caeterum quia ultimus æquationis propoſitae terminus multos habere poteſt diviſores, quorum vel unus tantum, quin adeo nullus eſt datae aequationis radix, admodum moleſta ſaepe evadit hæc methodus, radicem, vel quod idem eſt, factorem ſimplicem realem aequationis rationalem inveniendi. Huic vero incommodo remedium afferetur, ſi duae aſſignari poſſint quantitates, quarum altera major ſit quavis radice aequationis reali poſitiva, altera autem major quavis radice aequationis reali negativa, quae quidem quantitates *limites aequationis* vocantur. Atque inveſtigatio earum limitum ſequentibus nititur ratiociniis.

§. 106.

F. 228. De limitibus aequationum. Quodſi aequatio quaedam duas habeat radices reales poſitivas AB, AC, negativam vero unam AD, aſſumatur punctum aliquod E pro lubitu, atque ponatur AE =

$=p$, EC $=z$: erit $x=p+z$, ſi incognita aequationis littera x denotetur. Subſtituatur itaque $p+z$ loco x in aequatione, atque aequatio propoſita mutabitur in aliam, cujus radices erunt EC, EB, ED, atque punctum B datur per radicem negativam, quod ante dabatur per radicem affirmativam. Ponatur jam p vel AE creſcere, et radix poſitiva EC decreſcet, atque fiet negativa, ſi E cadat ultra c. Ergo jam AE major eſt quavis radice aequationis reali poſitiva, ſi $p+z$ loco x ſubſtituto omnes radices aequationes reales evadant negativae. Quodſi vero punctum E aſſumtum fuerit in parte oppoſita verſus D, atque verſus hanc partem AE negative creſcente tandem cadat ultra D, loco radicis negativae AD introducitur poſitiva ED, atque jam omnes radices aequationis fiunt poſitivæ. Ideo viciſſim ſi $-p+z$ loco x ſubſtituto, omnes radices aequationis fiant poſitivae, erit p major quavis radice reali negativa. Ordo vero ſignorum oſtendit, utrum aequationis propoſitae radices reales omnes poſitivae ſint, an omnes negativae (§. 92.). Sit igitur jam propoſita aequatio $x^3-x^2-57x+105=0$, poſito $x=z+p$, erit

$$
\begin{array}{rcccc}
x^3 = & z^3 & +3pz^2 & +3p^2z & +p^3 \\
-x^2 = & & -z^2 & -2pz & -p^2 \\
-57x = & & & -57z & -57p \\
+105 = & & & & +105.
\end{array}
$$

Aequationis ita productae ſigna omnia ſunt eadem, ſi ponatur $p=10$, et proinde poſito $10+z$ loco x in aequatione propoſita, omnes ejus radices fiunt negativae, quod indicio eſt, $+10$ eſſe limitem radicum aequationis poſitivarum. Ipſa hæc limes vero magis arctari poteſt, ſi tentetur ſubſtitutio numerorum poſitivorum denario minorum. Poſito $p=8$ ſtatim patet, eadem ſigna $+$ adhuc apud priora membra locum habere. Sed et ultimum membrum $512-64-456+105$ poſitivum manet. Proinde arctior adhuc limes radicum poſitivarum erit 8. Quodſi ulterius tentetur ſubſtitutio $p=7$, quod priori-

bus

bus terminis poſitivis manentibus fieri poſſe, facile per ſpicitur, ultimus terminus ſit $343 - 49 - 399 + 10 = 0$, atque aequatio reducitur ad ſequentem $z^3 + 20z + 76z = 0$, ex qua habetur una radix $z = 0$, atque ex inde concluditur, unam aequationis $x^3 - x^4 - 57x \cdot 105 = 0$ radicem eſſe $= 7$, eamque ſimul poſitivarum maximam. Ipſa igitur hæc aequatio jam plenarie ſolu ta eſt, quia diviſa per $x - 7 = 0$ reducitur ad quadrat cam. Quodſi tamen eadem methodo quaerere velimus limitem radicum hujus aequationis negativarum; ſtatim patet, in aequatione transformata

$$\begin{aligned} z^3 + 3pz^2 &+ 3p^2z + p^3 = 0 \\ - z^2 &- 2pz - p^2 \\ &- 57z - 57p \\ &\quad + 105 \end{aligned}$$

hunc fore ſignorum ordinem $+ - + -$, ſi ponatur $= -10$. Quare hac poſitione omnes radices aequatio nis fiunt affirmativae atque -10 eſt limes radicum ne gativarum. Sed hæc quoque limes magis arctari po teſt. Poſito enim $p = -8$ iterum prodit ordo ſigno rum radices affirmativas indicans.

§. 107.

Accidit interdum ut limites aequationum ita quae ſiti, et quantum fieri potuit arctati, in unam coeant. Atque tum illud indicio eſt, aequationem propoſitam nullas habere radices reales. Intra unum enim eundem que limitem a et a, quicunque ſit, nulla alia radix reali contineri poteſt, praeter 0, quae nunquam in cenſum venit, quia ante tolli ſolet, aequationem per x dividen do. Evenit hoc in ſequente aequatione $x^2 + 5x + 10 = 0$, quae poſito $x = p + z$ ſic transmutatur

$$\begin{aligned} z^2 + 2pz &+ p^2 = 0 \\ + 5z &+ 5p \\ &+ 10 \end{aligned}$$

Quodſi

Quodſi jam ſit $p = -\frac{5}{2}$, fiet $z^2 \pm 0z + \frac{25}{4} = 0$. Atque proinde ſimul obtinetur cum ille ſignorum ordo, qui ad limitem radicum affirmativarum pertinet, tum is, qui pertinet ad limitem negativarum, quia 0 ſemper utrolibet ſigno affici poteſt. Radices igitur datae aequationis reales inter limites $-\frac{5}{2}$ et $-\frac{5}{2}$ cadunt, id eſt, nullae ſunt.

§. 108.

Subſtitutis $z - f$ vel $z - f$ loco x in aequatione, cujus unus vel alter terminus deficit, aequatio fit completa. Quodſi enim fuerit $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$, poſito $x = z \pm f$ erit

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & z^3 \pm 3fz^2 + 3ffz \pm f^3 \\ -ax^2 & = & -az^2 \pm 2afz - aff \\ +bx & = & \pm bz + bf \\ +c & = & +c; \end{array}$$

atque aequatio ſic producta

$$\begin{array}{l} z^3 \pm 3fz^2 + 3ffz \pm f^3 = 0 \\ \quad - az \pm 2afz - aff \\ \quad\quad \pm bz + bf \\ \quad\quad\quad + c \end{array}$$

plena erit, licet in aequatione $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$ fuerit vel $a = 0$, vel $b = 0$, vel utrumque. Praeterea ſi f aſſumatur debitae magnitudinis, viciſſim ex aequatione propoſita quilibet terminus tolli poteſt. Si enim fuerit in caſu praeſenti $3f - a = 0$, ex quo concluditur $f = \frac{1}{3}a$, evaneſcit coefficiens ipſius z^2 atque terminus ſecundus tollitur. Pari ex ratione, ſi f determinatur ex aequatione $3ff - 2af + b = 0$, tollitur terminus tertius. Determinato vero ipſius f valore ex æquatione $f^3 - aff + bf + c = 0$, quartus terminus evaneſcit: quae ratiocinia per omnes terminos poſſunt continuari. In caſu præſenti ſi quartus æquationis $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$ terminus hac transformatione evaneſcat, producitur æquatio hujus formæ $z^3 + pz^2 + qz = 0$, quæ diviſa

viſa per z ad inferiorem deprimitur gradum. Sed quantitas f, qua tollitur terminus quartus, per cubicam datur æquationem; atque ſi plures fuerint æquationes termini, æquationes, quibus reperitur ipſius f valor, quo ſubſtituto tollitur aliquis terminorum quarto poſterior, cubica etiam altiores ſunt. Secundus igitur et tertius æquationis terminus tolli ſemper poteſt, quia non tantum æquationis ſimplicis, ſed et quadraticæ ſolutio ſemper in poteſtate eſt. Nihilo tamen minus plerumque ſecundi tantum termini ſublatio utilis eſt ob varios ſcopos infra declarandos.

§. 109.

Præter eam, quæ modo explicata eſt, æquationis transformationem, aliæ quoque ſuſcipi ſolent æquationum transformationes, vel quia regulæ easdem plene ſolvendi ad certas adſtrictæ ſunt formas, vel quia tentamina, quibus ad radices detegendas ſæpe opus eſt ob regularum defectum, ea re facilitantur. Quodſi enim propoſita æquatio, cujus incognita eſt x, ſubſtituto $z + f = x$ transformetur in aliam, cujus incognita eſt z; accidit interdum, ut ultimæ hujus æquationis radices, ſeu valores ipſius z, detegi queant. Hoc vero caſu ſimul prioris æquationis, cujus incognita eſt x, radices inventæ ſunt, quia jam in æquatione $x = z + f$ quanta z atq
methodus pro incognita x in aequationem incognitam z introducendi
f ſunt cognita. Poteſt ex his deduci generalis quæd methodus, æquationem, in qua incognita quantitas d notatur per x, in aliam, cujus incognita eſt z, ita tra formandi, ut data z in poſteriori æquatione ſimul de x in priori. Sit enim v. g. iſta propoſita æquatio x^3 $ax^2 + bx - c = 0$, atque fingatur quæcunque æqua alia, in qua x atque z occurrunt cum quantitatibus cognitis vel pro re nata determinandis utcunque com ſitæ, qualis hæc eſt: $x^2 + xz = aa$. Conjungi hæc quatio poteſt cum ſuperiori per regulas §. 33. et explicatas ſic, ut x eliminetur. Quodſi jam iſta tra formatione producatur æquatio hujus formæ $z^3 +$

$+qz+r=0$, vel cujuscunque alterius, data z in h[illegible] æquatione ſimul dabitur x per æquationem x^3+xz [illegible] aſſumtam, quia ſub hac hypotheſi jam z erit quantit[illegible] cognita. Quamvis hæc transformandi methodus gen[illegible] ralis ſit, raro tamen ad ejusmodi transformationes a[illegible] quationes complicatiores aſſumuntur. Praeter ea[illegible] quæ jam explicata eſt, transformationem præcipui uſu ſunt duo adhuc modi, quibus ponitur vel $xz=e$ ſive $=\frac{e}{z}$, vel $x=\frac{m}{n}z$. Propoſita ſit æquatio x^3-ax $+bx+c=0$, atque ſi primo ponatur $x=\frac{e}{z}$, producitur haec aequatio transformata $\frac{e^3}{z^3}-\frac{ae^2}{z^2}-\frac{be}{z}+c=0$, ex qua fit $e^3-e^2az-ebz^2+cz^3=0$ vel $z^3-\frac{eb}{c}z^2-\frac{e^2a}{c}z+\frac{e^3}{c}=0$, atque ſi e ſu[illegible] matur $=c$, $z^3-bz^2-acz+cc=0$. Hujus aequatio nis radices dicuntur eſſe *reciprocae* radicum aequationi datae, ſitque minima radicum aequationis productae e maxima aequationis propoſitae, hujus vero maxima e illius minima, atque ſic quoque reliquae ſervato ordin magnitudinis.

§. 110.

Deinde ſi propoſita ſit aequatio x^3-12x^2-21x [illegible] $136=0$, atque nunc ponatur $x=\frac{m}{n}z$; erit aequati transformata $\frac{m^3}{n^3}z^3-12\frac{m^2}{n^2}z^2-21\frac{m}{n}z+136=$[illegible] ex qua ſit $z^3-12\frac{n}{m}z^2-21\frac{n^2}{m^2}z+136\frac{n^3}{m^3}=$ [illegible]

In hac aequatione numeris pro n et m ſubſtitutis complura praeſtari poſſunt.

1) Poteſt effici, ut quicunque coefficiens fiat datae magnitudinis. Sic coefficiens ſecundi termini ſi debeat eſſe $= 2$, poni debet $m = 6$, et $n = 1$. Si terminus ultimus debeat eſſe $= 17$, poni debet $n = 1$ et $m = 2$. Idem praeſtari poſſe, ſi coefficientes aequationis propoſitae non numeros notaverint, ſed alias quascumque quantitates, facile perſpicitur.

2) Si in locum coefficientium numericorum iterum ponantur litterae a, b, c, atque aequatio propoſita ſit

$$x^3 - ax - bx + c = 0$$

cujus transformata eſt

$$z^3 - \frac{n}{m} az^2 - \frac{n^2}{m^2} bz - \frac{n^3}{m^3} c = 0$$

patet, numerorum in novam aequationem introductorum $\frac{n}{m} a$, $\frac{n^2}{m^2} b$, $\frac{n^3}{m^3} c$, aliquos vel omnes integros fieri poſſe, ſi numeri a, b, c, vel eorum aliqui ſint fracti. Sit enim $a = \frac{f}{g}$, $b = \frac{h}{k}$, $c = \frac{p}{q}$, atque poſitis $m = 1$, et $n = gkq$, erit $\frac{n}{m} a = \frac{gkqf}{g} = kqf$, $\frac{n^2}{m^2} b = \frac{g^2k^2q^2h}{k} = g^2kq^2h$, $\frac{n^3}{m^3} c = \frac{g^3k^3q^3p}{q} = g^3k^3q^2p$.

3) Simili modo, ſi numerorum a, b, c, aliqui irrationales fuerint formae $a = f\sqrt{g}$ vel $b = \frac{h}{\sqrt{k}}$, vel alterius cujuscunque, tolli quoque poſſunt factorum irrationalium aliqui, vel ſubinde omnes, valoribus litterarum m et n convenienter aſſumtis. Nihil enim impedit, quo minus m vel n irationalis ſumatur.

4) Atqu

4) Atque ſic generatim, ſi coëfficientes a, b, c, vel omnes, vel eorum aliqui ex pluribus factoribus fuerint compoſiti; horum factorum quidam tolli poterunt ex quocunque coefficiente. Si v. g. fuerit $b = 4f$, poſitis $m = 2$ et $n = 1$, erit coefficiens, qui in aequatione transformata ſuccedit in ipſius locum, $\frac{4f}{4} = f$. Cæterum multiplicem uſum, quem iſtæ transformationes ſolvendis problematibus adferunt, ſuis locis explicabimus.

§. 111.

Regulæ §. 84. (104.) pro invenienda radice aequationis, ſi quam habeat, rationali, generales ſunt, atque facili negotio ad eum adplicantur caſum, quo aequationis propoſitæ terminus primus habet coefficientem praeter unitatem, atque aequatio reducta talem induit formam, ut terminus ultimus ſit fractio non æquipollens numero integro. Sit propoſita æquatio, quæ ſequitur $3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$, quae ad iſtam reducitur $x^3 - \frac{29}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{60}{3} = 0$. Præ omnibus quaerantur limites hujus æquationis, quæ invenientur -1 et $+10$. Deinde inveſtigentur omnes termini ultimi $\frac{60}{3}$ factores, qui extra hos limites non cadunt, idque fiet quærendo diviſores tam numeratoris, quam denominatoris ejusdem fractionis. Factores numeratoris ſunt -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, atque denominatoris 1 et 3. Quod ſi igitur aequatio propoſita radicem quandam agnoſcat rationalem; ea erit aliqua ex hiſce -1, $-\frac{1}{3}$, 1, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{2}{3}$, 3, 4, $\frac{4}{3}$, 5, $\frac{5}{3}$, 6. Tentata diviſione per haſce æquationes ſimplices $x + 1 = 0$, $3x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, etc.; propoſita æquatio $3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$ diviſibilis eſſe deprehenditur per ſimplicem $3x - 5 = 0$, ideoque $\frac{5}{3}$ eſt radix æquationis propoſitæ realis.

Reliquæ ejusdem æquationis radices dantur per æquationem quadraticam ipſa diviſione inventam $x^2 - 8x - 12 = 0$.

§. 112.

methodus diviſores termini ultimi ad pauciores reducendi.

Inveſtigatione limitum æquationis diviſores quidem termini ultimi, quorum quilibet, an radix ſit, tentari debet, ad pauciores jam reducuntur. Nihilo tamen minus plerumque reſtat eorum numerus tantus, ut multæ diviſiones fruſtra tentandæ ſuperſint. Tum vero diviſores tentandi denuo reducentur ad pauciores artificio, quod ſequentibus nititur ratiociniis. Quodſi in æquatione propoſita ponatur $x = y + n$, in æquatione producta omnes radices prioris data quantitate imminutae ſunt vel auctae, prout vel n fuerit vel poſitivus vel negativus, atque ſi t denotaverit unum vel alterum radicum æquationis datae realium limitem, erit aequationis transformatae limes $t - n$. Data igitur aequatione $3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$, cujus limites ſunt 10 et -1, poſito $x = y + 1$, erunt limites aequationis productae $10 - 1 = 9$, et $-1 - 1 = -2$. Ipſa vero aequatio transformata eſt

$$\begin{aligned} 3x^3 &= 3y^3 + 9y^2 + 9y + 3 \\ -29x^2 &= \quad\;\; - 29y^2 - 58y - 29 \\ +4x &= \qquad\qquad\quad + 4y + 4 \\ +60 &= \qquad\qquad\qquad\quad + 60 \\ \hline \text{unde}\quad 0 &= 3y^3 - 20y^2 - 45y + 38 \\ \text{vel}\quad 0 &= y^3 - \frac{20}{3}y^2 - \frac{45}{3}y + \frac{38}{3}. \end{aligned}$$

Jam diviſores termini 38, qui cadunt intra limites -2 et $+9$, ſunt -1, 1, 2, non alii. Atque proinde ſi aequatio habeat radicem rationalem, ea debet eſſe unus ex numeris $-\frac{1}{3}$, -1, $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{2}{3}$, 2. Ponatur nunc $x = y - 1$, erunt transformatae aequationis limites $10 + 1 = 11$, et $-1 + 1 = 0$, atque ipſa aequatio transformata

$$\begin{array}{rclllll}
3x^3 & = & 3y^3 & - 9y^2 & + 9y & - 3 \\
-29x^2 & = & & - 29y^2 & + 58y & - 29 \\
+ 4x & = & & & + 4y & - 4 \\
+ 60 & = & & & & + 60 \\
\hline
\text{proinde } 0 & = & 3y^3 & - 38y^2 & + 71y & + 24
\end{array}$$

Jam factores numeri 24, qui cadunt intra limites 0 et 11 ſunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, ideoque numeri, praeter quos radix rationalis nullus alius eſſe poteſt, 1, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{2}{3}$, 3, $\frac{4}{3}$, 4, 6, 8, $\frac{8}{3}$. Scriptis jam numeris ita repertis ordine, poſitisque in primam ſeriem iis, inter quos reperiri debet radix rationalis aequationis, ad quam $y = x + 1$; in ſecunda, qui reperti ſunt ad ipſam aequationem propoſitam; in tertia vero illis, qui pertinent ad eam, ad quam $x = y - 1$ hoc modo

$- \frac{1}{3}$, $- 1$, $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{2}{3}$, 2

$- 1$, $- \frac{1}{3}$, 1, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{2}{3}$, 3, 4, $\frac{4}{3}$, 5, $\frac{5}{3}$, 6,

1, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{2}{3}$, 3, 4, $\frac{4}{3}$, 6, 8, $\frac{8}{3}$,

manifeſtum eſt, nullum numerorum ſecundae ſeriei eſſe poſſe radicem aequationis datae, ad quam haec ſeries pertinet, niſi inter numeros primae ſeriei inveniatur aliquis, qui ex illo oritur, ſi ad eum addatur $- 1$, et inter numeros ſeriei tertiae alius, qui ex eodem illo fit, ſi ad eum addatur $+ 1$; quia, cum in ſerie ſecunda illa radix dicatur x, eſt radix aequationis, ad quam pertinet ſeries prima $x - 1$, et radix aequationis, ad quam ſeries tertia pertinet, $x + 1$. Examinatis jam ſerierum ita repertarum numeris apparet, nullos dictarum conditionum adeſſe praeter ſequentes, quorum prima ſeries deſumta eſt ex prima repertarum, ſecunda ex ſecunda, tertia ex tertia,

1, , 2, $\frac{2}{3}$

2, 3, $\frac{5}{3}$

3, 4, $\frac{8}{3}$

Ideo radix aequationis propoſitae, ſi qua adſit, erit vel 2, vel 3, vel $\frac{5}{3}$. Dividenda igitur eſt aequatio $3x^3 -$

$29x^2 + 4x + 60 = 0$ per aequationes $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $3x - 5 = 0$; ſicque diviſores tentandi ad tres reducti ſunt, qui antea erant duodecim, magno utique laboris compendio.

§. 113.

Hae ſunt methodi inveniendi radicem aequationis propoſitae, ſi qua adſit, rationalem, vel quod eodem redit, factorem aequationis rationalem ſimplicem. Quodſi ejusmodi factor ſimplex rationalis non adſit, inveniri ſaepius poteſt aequatio quadratica, vel cubica, vel altior quaedam, aequationem propoſitam dividens absque reſiduo, ſicque aequatio ſaepe in duas vel plures rationales reſolvi poteſt. Hoc autem facto inveniuntur aequationes data inferiores, quarum radices ſaepe cognitis deteguntur methodis, quaeque ſimul ſunt radices aequationes propoſitae. Ipſa vero diviſio ſi inſtitui poteſt, ſemper poteſt intelligi per aequationem fieri inferiorem ea, quae pro quoto prodit, vel cum ea aeque altam, nunquam per altiorem. Aequatio rationalis, quae aequationem quinti ordinis dividat, ut quadratica altior ſumatur, nunquam opus eſt, quia cubicus diviſor pro quoto prodit. Generalis itaque, ad factores hoſce obtinendos deſcribenda erit methodus, cum ob ſcopum modo explicatum, tum ob alios quoque magni momenti uſus.

Sit igitur propoſita hæc æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 18x^2 + 9x - 40 = 0$ in duas ſolvenda, quarum una quadratica ſit, altera cubica. Fingo æquationes quæſitas eſſe has $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, et $x^2 + mx + n = 0$. Multiplico unam per alteram, ut prodeat aequatio,

$$\begin{aligned} x^5 &+ px^4 + qx^3 + rx^2 + mrx + nr = 0, \\ &+ mx^4 + mpx^3 + mqx^2 + nqx \\ &\qquad\quad + nx^3 + npx^2 \end{aligned}$$

quam eandem eſſe pono cum data. Quod verum erit ſi fuerit

$p+$

$$p+m=-2 \qquad mr+nq=9$$
$$q+mp+n=-10 \qquad nr=-40$$
$$r+mq+np=18$$

Ex his jam æquationibus elici poſſunt valores coefficientium aſſumtorum m et n. Sed quia æquationes, quæ oriuntur, has combinando, prouti leges §phi jubent, plerumque prodeunt admodum difficiles, valor litterarum n et r tentando quæri poteſt ex facto, quod multiplicati in ſe invicem producunt. Scribatur jam y loco m, erit ex prima æquatione $p=-2-y$, quo valore in reliquis ſubſtituto fit ſecunda

$$q-2y-yy+n=-10,$$

atque $q=-10+2y+yy-n$.

Tertia æquatio eadem ſubſtitutione fit

$$r+qy-2n-ny=18;$$

atque ſi in eandem introducatur q ex æquatione ſecunda, prodit $r-10y+2y^2+y^3-2ny-2n=18$.

$$\text{vel } \begin{array}{l} y^3+2y^2-2ny-2n=0 \\ \qquad\quad -10y+r \\ \qquad\qquad\quad -18 \end{array}$$

Quarta æquationum initio repertarum a ſubſtituto valore ipſius q mutatur in ſequentem

$$ry-10n+2ny+nyy-nn=9$$

$$\text{vel } \begin{array}{l} ny^2+2ny-nn=0 \\ \quad +ry-10n \\ \qquad\quad -9 \end{array}$$

Inventis duabus ejusmodi æquationibus in quovis caſu quantitas cognita -40 æquationis $nr=-40$ ſolvenda eſt in ſuos factores, quorum alteruter ponatur $=n$ alter $=r$, atque his valoribus tanquam certi eſſent, in utraque æquatione ſubſtitutis, quærantur earum radices rationales, vel ex una reperta radix tentetur, an quoque ſit radix alterius. Quæ utriusque æquationis radix eſt, ea eſt y vel m quæſita, utpote quæ per utramque æquationum repertarum datur. Si talis radix non reperiatur, aliter dividendum erit nr, idque toties, donec ex-

exhauriantur omnes modi, quibus in duos factores rationales et integros ſolvi poteſt. Hoc facto ſi nulla radix utrique aequationi communis reperiatur; ex eo concludendum erit, ſolutionem æquationis propoſitæ in duas rationales eſſe impoſſibilem. In præſenti caſu ſi n ponatur $= -5$ et $r = 8$, quia $-5 \times 8 = -40$ fit æquatio poſterior

$$-5y^2 - 2y + 16 = 0$$
$$\text{vel } y^2 + \tfrac{2}{5}y - \tfrac{16}{5} = 0,$$

cujus radices ſunt $\frac{8}{5}$ et -2. Poſterior etiam radix eſt prioris æquationis $y^3 + 2y^2$ etc. quia ſi loco y ſubſtituatur -2, omnia evaneſcunt. Proinde æquatio quadratica quæſita propoſitam dividens eſt $x^2 - 2x - 5 = 0$, qua diviſione producitur quotus $x^3 - 5x + 8 = 0$. Poterat eadem y etiam facilius reperiri, ſi valor -5 litteræ n et valor 8 litteræ r aſſumtus in æquatione cubica ſubſtituatur. Hoc facto fit eadem æquatio $y^3 + 2y^2 = 0$, unde ſequitur $y = -2$.

§. 114.

methodus radices aequationis per approximationem ope fractionum decimalium inveniendi.

Quodſi ejusmodi factores æquationis rationales non reperiantur, ut radices æquationis reales irrationales ſi quæ adſint, in numeris decimalibus proxime detegantur, ſic rationandum erit. Si fuerit $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} \ldots\ldots + s = y$, valor functionis y determinatur quocunque valore loco x ſubſtituto, quia hoc facto y datur per æquationem ſimplicem. Poſito jam $x = a$, ſi y prodierit affirmativa $= +\alpha$, negativa autem $-\beta$ poſito $x = b$; certum eſt, quod detur aliquis valor ipſius x inter a et b intermedius, quo loco x ſubſtituto, fiat $y = 0$. Quodſi enim ponatur x ab a ad b continuo creſcere vel decreſcere, mutabitur quoque valor ipſius y, quantitas ſcilicet $+\alpha$ continuo creſcendo vel decreſcendo, ita vero ut tandem deſinat in $-\beta$. Cum vero valor ille litteræ y ad quemlibet valorem x fit magnitudinis determinatae, non poterit y ab $+\alpha$ ad $-\beta$ tranſire,

nisi

niſi aliquando fiat $= 0$. Erit itaque ſemper aliquis valor ipſius x inter a et b intermedius, ad quem ſit $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} - - - - + s = 0$, qui proinde eſt radix hujus æquationis realis.

Ex his denuo patet, quod §. 97. jam fuit demonſtratum, unam ad minimum æquationis radicem realem eſſe, ſi m exponens ordinis æquationis numerus impar fuerit. Creſcente enim x, eam tandem majorem fieri neceſſe eſt, quam p, et x^2 majorem, quam q, et x^3 majorem, quam r, et ita porro, ideoque x^m tandem ſuperare omnes æquationis terminos reliquos, primo quidem ſeorſim, deinde etiam conjunctim, atque hoc facto y affirmativa erit, licet omnes hi termini negativi fuerint. Contra ſi x negativa ponatur, etiam x^m negativa erit, quia m ponitur impar eſſe; atque ad hanc partem creſcente x, eodem modo x^m æquationis terminos reliquos ſuperabit, atque y negativam reddet, etiamſi omnes iſti termini fuerint poſitivi. Inter duos autem illos litterae x valores, quorum unus y affirmativam exhibet, alter negativam, æquationis radicem realem minime unam eſſe, neceſſe eſt.

Præterea vero ex his concluditur, duas ad minimum æquationis radices eſſe reales, ſi m, exponens ſummae dignitatis incognitæ x in æquatione propoſita ſit numerus par, atque terminus æquationis ultimus negativus. Patet enim, y poſitivam fieri, quando x poſitiva ingens eſt. Deinde ſi x ſumatur negativa, x^m pariter poſitiva eſt, at y quoque poſitiva ſit ad ingentem x negativam. Sed eadem negativa fit ad $x = 0$, quia tum eſt $x = s$, s vero ponitur negativa. Bis igitur in tali æquatione y e poſitivo negativum et viciſſim e negativo poſitivum ſit, ergo duæ ad minimum radices aequationis ſunt reales. Si igitur ultimus terminus ſit poſitivus, fieri poteſt, ut aequatio nullas habeat radices reales. Sic aequationis $x^6 + ax^4 + bx^2 + c = 0$ radices

dices reales nullae ſunt, quia y ſemper poſitiva prodit, quicunque valor realis ipſi x tribuatur.

§. 115.

Quodſi jam data ſit æquatio $x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = 0$, cujus radices reales in numeris decimalibus vero proximæ ſunt inveniendæ, ſic procedendum erit. Quærantur limites æquationis, quæ erunt 15 et -11. Jam incipiendo a numero -11 ſubſtituantur in locum x numeri ab hoc termino ordine, conveniente inter duos proximos intervallo relicto, et colligantur valores ipſius y loco o poſiti hoc modo:

Si fuerit $x =$	-11	erit $y =$	-261
	-10	- - - -	$+150$
	-5	- - - -	$+1125$
	0	- - - -	$+850$
	$+5$	- - - -	$+75$
	$+10$	- - - -	-450
	$+15$	- - - -	$+25$

Si itaque duorum y hoc modo repertorum contraria fuerint ſigna, inter x illis reſpondentes radix cadet realis, cujus magnitudo proxime colligitur ex numeris per quos y exprimitur, hunc in modum. Quia in æquatione ad $x = -11$ reperta eſt $y = -261$, et ad $x = -10$ inventa $y = +150$, inter -10 et -11 una minimum cadit aequationis radix. Eodem rotiocinio et aliarum radicum limites deteguntur. Cadit nempe harum una intra 5 et 10, altera intra 10 et 15. Quia jam plures tribus radicibus in æquatione propoſita ineſſe non poſſunt, intra limites -11 et -10 una tantum radix erit, intra 5 et 10 altera, tertia intra 10 et 15. Quia $x = -10$ notabiliter minorem efficit y, quam $x = -11$, exinde colligi debet, hanc radicem numero -10 propiorem eſſe, quam numero -11, eamque ideo eſſe circiter $-10, 3$, vel $-10, 4$.

Sic quoque radix, quæ intra 5 et 10 cadit, proxime determinabitur concludendo, ut intervallum inter duos y his

his numeris reſpondentes ad y priorem, ſic circiter eſt intervallum inter duos illos ipſius x valores, ad exceſſum radicis ſupra priorem ipſius x valorem; id eſt, ut $75 + 450$ ad 75, ita 5 ad exceſſum radicis ſupra 5 quæſitum, qui ideo reperitur $0, 7$, unde radix hæc erit circiter $5, 7$. Simili ratione radix tertia propius determinatur, reperto ejus ſupra 10 exceſſu $= \frac{450 \times 5}{475} =$ $4, 7$, unde hæc radix numero $14, 7$ proxime æqualis colligitur.

Poſſunt numeri ita reperti ſi non longiſſime tamen longe ſatis a veris radicum valoribus aberrare. Proinde corrigendi ſunt, quod fiet eodem modo, quo antea ſunt inventi. Sit corrigendus numerus repertorum maximus $14, 7$, atque radici æquationis maximæ propinquior reddendus. Pono in æquatione $x = 14, 7$, ac reperio, ei valori reſpondere $y = -45, 377$. Valori vero $x = 15$ reſpondet $y = +25$. Proinde radix vera paullo major eſt reperta, utpote quæ cadit intra $14, 7$ et 15. Ex valoribus vero his litteræ y per methodum approximando deſcriptam prodit exceſſus radicis ſupra $14, 7$ iſte $0, 19$, quo addito fit numerus exactior $14, 89$. Subſtituto hoc numero loco x in aequatione invenitur $y = -1, 528$, unde patet, numerum inventum nunc quoque radice minorem eſſe, ſed differentia modica, quæ quidem eadem methodo imminui poteſt. Reperitur enim per eandem exceſſus radicis ſupra numerum $14, 89$ ultimo repertum $= 0, 00633$, quo addito numerus iſte ad verum radicis valorem propinquius accedens, erit $14, 89633$, qui eadem via porro corrigi poteſt.

Caeterum non nimis magna aſſumenda ſunt intervalla valorum ipſius x, partim quia alias prima opera ſaepe radices omnes non deteguntur, partim quia ſic anguſtiores inveniuntur radicum limites, quibus ſtatim ab initio exactiores determinantur. Sic ſi quoque in

 caſu

caſu præſenti poſuiſſemus $x = 6$, inventus fuiſſet valor $y = -74$, ex quo ſtatim patet, radicum poſitivarum minorem parum differre a 5, 5, atque per laxiores limites eandem nimis magnam inventam eſſe nimirurum 5, 7. Segner El. An. fin. Sect. IX. §. 628–562

§. 116.

Si omnes aequationis termini præter primum et ultimum deficiunt, æquatio non amplius eſt affecta, ſed pura, ejusque radices reales omnes deteguntur ſecundum præcepta in Sect. IV. expoſita. Propoſita enim ejusmodi æquatione $ax^m - b = 0$, ex eadem concluditur $x = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$, ubi notum eſt, quod valor $\sqrt[m]{\frac{b}{a}}$ ſemper realis, isque unicus ſit, ſi m fuerit numerus impar, ſive $\frac{b}{a}$ ſit negativa, ſive poſitiva quantitas. Eſt vero $x = \pm \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$, ſi m fuerit par, atque tum uterque valor impoſſibilis eſſe poteſt, ſi nimirum $\frac{b}{a}$ ſit quantitas negativa. Cæterum hic quoque verum eſt, quod univerſaliter demonſtravimus §. 85. Omnis æquatio formæ $ax^m - b = 0$ tot habet radices, quot unitates continet numerus m, ſi nimirum radices impoſſibiles non excludantur. Aequatio formæ $ax^{m+1} - b = 0$ ſemper unam habet radicem realem et $2m$ radices impoſſibiles, omnis vero æquatio $ax^{2m} - b = 0$ vel duas habet radices reales atque $2m - 2$ impoſſibiles, ſi nimirum $\frac{b}{a}$ ſit poſitiva quantitas, vel omnes impoſſibiles, ſi $\frac{b}{a}$ fuerit negativa quantitas. Sic æquatio cubica $ax^3 - b = 0$ unam habet radicem realem et duas impoſſibiles, quae omnia ex §. 85. ſunt manifeſta.

Caete-

Cæterum ambæ radices æquationis $ax^3 - b = 0$ impoſſibiles ſic poſſunt inveniri. Radicem hujus æquationis realem exhibet æquatio ſimplex $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$. Proinde dividatur æquatio $x^3 - \frac{b}{a} = 0$ per hanc ſimplicem, et quotus fiet aequatio duas radices impoſſibiles reliquas exhibens. In compendium calculi ponatur $\frac{b}{a} = c^3$, atque æquatio dividenda erit $x^3 - c^3 = 0$, ſimplex vero diviſor $x - c = 0$. Inſtituta jam ipſa diviſione pro quoto prodit $xx + cx + cc = 0$, cujus æquationis radices ſunt $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}cc}$, vel reſtituto valore $c^3 = \frac{b}{a}$ et $c = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}\right)}$, quarum utraque impoſſibilis eſt. Simili modo operandum foret, ſi deſiderentur radices impoſſibiles aequationis cujusdam altioris ſub hac forma $ax^m - b = 0$ contentae.

§. 117.

Prouti ex aequationibus formae $ax^m - b = 0$ una vel utraque radix poſſibilis habetur methodo illi perſimili, qua ſimplices æquationes ſolvuntur, ita ex aequationibus omnibus ſub hac forma generali $x^{2m} - px^m + q = 0$ contentis radices reales inveniuntur ſecundum methodum, qua aequationes quadraticae in antecedentibus ſolutae ſunt. Poſito enim $x^m = z$, habetur $z^2 - pz + q = 0$, atque proinde $z = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$. Reſtituto jam valore x^m loco z habetur $x^m = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$ et proinde $x = \sqrt[m]{(\frac{1}{2}p \pm (\sqrt{q + \frac{1}{4}pp)})}$, qui valor vel poſitivus ſumendus erit, vel negativus, vel affirmativus et negativus ſimul, prout m vel numerum

rum

rum imparem denotat, vel parem. Plures quam quatuor radices reales aequatio ſub hac forma comprehenſa habere non poteſt, quod ex principiis §. 94. ſq. demonſtrari poteſt, atque plures haec quoque formula non ſuppeditare poteſt. Reliquae impoſſibiles, ſi deſiderentur, poſſunt per diviſionem inveniri eodem modo, quo §. *praec.* radices impoſſibiles aequationis $ax^m - b = 0$ fuerunt inventæ.

* * * * * * * * * * * * * * *

SECTIO IX.

DE FVNCTIONVM, QVAE VNAM VEL PLVRES INVOLVVNT VARIABILES, PALMARIIS QVIBVSDAM PROPRIETATIBVS.

§. 118.

Functionis y quantitatis variabilis x valor determinatur, ſi ipſi variabili x determinatus tribuitur valor. Dicitur vero *y functio uniformis* ipſius x, ſi unicum valorem determinatum obtinet, quando variabilis x determinatum habet valorem. Contra ſi pro unoquoque valore determinato in locum variabilis x ſubſtituto functio y plures valores determinatos aſſumit; eadem dicitur *functio* ipſius *x multiformis*. Praeterea functio ipſius y ſpeciatim dicitur *biformis*, *triformis*, *quadriformis*, *etc*, ſi pro quovis valore variabilis x determinato duos, vel tres, vel quatuor, etc. valores determinatos exhibet. Sic omnes radices quadraticae, quarum expreſſioni ingreditur variabilis x, ut $\sqrt{(ax + xx)}$ ſunt functiones ipſius x biformes. Quicunque enim valor

pro

pro x ſtatuatur expreſſio $\sqrt{(ax+xx)}$ duplicem habet valorem, alterum poſitivum, alterum negativum. Generatim vero erit y functio biformis ipſius x, ſi determinetur per aequationem quadraticam $y^2+Py+Q=0$ ſiquidem P et Q fuerint functiones uniformes ipſius x. Erit enim $y=-\frac{1}{2}P\pm\sqrt{(\frac{1}{4}P^2-Q)}$; ex quo patet, cuique valori determinato ipſius x duplicem valorem determinatum ipſius y reſpondere, quorum uterque aut realis aut imaginarius erit. Functiones triformes ex reſolutione aequationum cubicarum originem trahunt. Si enim fuerint P, Q, R, functiones ipſius x uniformes, ſitque $y^3+Py^2+Qy+R=0$, erit y functio triformis ipſius x, quia pro quolibet valore determinato ipſius x, triplicem valorem obtinet, quorum vel ſinguli reales erunt, vel unicus realis et duo imaginarii. Generaliter erit y functio multiformis ipſius x, quae pro quovis valore ipſius x tot exhibet valores, quot numerus n continet unitates; ſi y definiatur per hanc aequationem generalem $y^n+Py^{n-1}+Qy^{n-2}+Ry^{n-3}$ $Sy^{n-4}+$ etc. $=0$. Ubi quidem notandum eſt, n eſſe oportere numerum integrum, atque perpetuo, ut dijudicari poſſit, quam multiformis ſit functio y ipſius x, aequatio, per quam y definitur, reduci debere ad rationalitatem; quo facto exponens maximae poteſtatis ipſius y indicabit quaeſitum valorum numerum, cuique ipſius x valori reſpondentium. Deinde quoque tenendum eſt, litteras P, Q, R, S, etc. denotare debere functiones uniformes ipſius x, ſi enim aliqua earum jam eſſet functio multiformis, tum functio y multo plures praebitura eſſet valores unicuique valori ipſius x reſpondentes, quam quidem numerus dimenſionum ipſius y indicaret. Semper autem ſi qui valores ipſius y fuerint imaginarii, eorum numerus erit par; unde intelligitur, ſi fuerit n numerus impar, perpetuo unum ad minimum valorem ipſius y fore realem: contra autem fieri poſſe, ſi numerus n ſit par, ut nullus prorſus valor ipſius y ſit realis.

§. 119.

§. 119.

Omnis functio rationalis integra ipſius x formae $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Px + Q$ reſolvi poteſt in tot factores ſimplices formæ $ax + b$, $cx + e$ etc. quot unitates continet numerus m. Quia enim hæc functio eſt quantitas variabilis; poni etiam poteſt $Ax^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Px + Q = 0$. Tum vero valores ipſius x reſpondentes erunt radices hujus aequationis, quae ſi fuerint $-\frac{b}{a}, -\frac{e}{c} \dots -\frac{g}{f}$ earum totidem erunt, quot ſunt unitates in numero m, et quælibet earundem ſuppeditat diviſorem formae $ax + b$, $cx + e$ etc. ita ut ſit $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Px + Q = (ax + b)(cx + e) \dots (fx + g)$. Factores itaque ſimplices functionem rationalem integram componentes erunt vel reales, vel imaginarii; atque ſi functio habeat factores imaginarios, eorum numerus ſemper erit par. Praeterea vero binorum factorum imaginariorum productum ſemper eſt reale; atque quævis functio rationalis integra ordinis $2n$ reſolvi poteſt in n factores duplices reales formæ $x^2 + px + q$. Functio denique variabilis x integra rationalis $2n + 1$ dimenſionum ad minimum habet unicum factorem ſimplicem realem (§. 83. ſqq.).

§. 120.

De functionibus plurium variabilium.

Cum omnis quantitas variabilis z ab alia variabili x ita pendens, ut mutationem patiatur, ſimulac z mutatur, vocetur functio variabilis x; poterit z dici functio duarum variabilium x et y, ſi ejus magnitudo ſimul pendeat a valore ipſius x et y ſimul, functio trium variabilium x, y, u, ſi ejus magnitudo ~~ipſius~~ a tribus hiſce variabilius pendeat, ſicque porro. Hinc omnis expreſſio analytica definiens valorem ipſius z per variabiles x, y, u, s, etc, et conſtantes dicitur functio harum variabilium. Ita erit $x^3 + xuy + auu$ functio trium variabilium

bilium x, y, u, atque ejuſmodi functio, ſi una determinetur variabilis, puta u, hoc eſt, ſi ejus loco conſtans numerus ſubſtituatur, manebit adhuc quantitas variabilis, ſcilicet functio ipſarum x et y, atque ſi praeter u quoque y determinetur, tum erit adhuc functio ipſius x. Ideo hujusmodi functio plurium variabilium ante non habet valorem determinatum, quam ſingulae quantitates variabiles ſunt determinatæ. Dividi poſſunt hæ functiones plurium variabilium pariter ac unius variabilis in algebraicas et tranſcendentes, quarum illae ſunt, in quibus ratio compoſitionis in ſolis Algebræ operationibus eſt poſita; hae vero in quarum formationem operationes tranſcendentes ingrediuntur. Deinde quoque dividi poſſunt in rationales et irrationales, integras et fractas. Functio ſcilicet rationalis omnino libera eſt ab omni irrationalitate quantitates variabiles, quarum functio dicitur, afficiente. Integra eſt hæc in functio, ſi variabiles neque habent exponentes negativos, neque expreſſiones continent fractiones, in quarum denominatores variabiles ingrediantur. Sic functionum integrarum duarum rariabilium y et z hæc erit forma generalis $\alpha + \beta y + \gamma z + \delta y^2 + \epsilon yz + \zeta z^2 + \eta y^3 + \vartheta y^2 z + \iota yz^2 + \kappa z^3$ + etc. Quodſi ergo P et Q denotent hujusmodi functiones integras plurium variabilium erit $\frac{P}{Q}$ forma generalis functionum fractarum. Functio denique irrationalis eſt vel explicita vel implicita; illa per ſigna radicalia jam penitus eſt evoluta, hæc autem per aequationem irreſolubilem exhibetur. Sic V erit functio implicita irrationalis ipſarum y et z, ſi fuerit $V^5 = (ayz + z^3) V^2 + (y^4 + z^4) V + y^5 + 2ayx^3 + z^5$. Multiformitas deinde in his functionibus aeque notari debet, atque in iis, qui unicam involvunt variabilem. Sic functiones rationales erunt uniformes, quia ſingulis quantitatibus variabilibus determinatis, unicum valorem determinatum

tum exhibent. Denotent P, Q, R, S, etc, functiones rationales ſeu uniformes variabilium x, y, z, eritque V functio biformis earundem variabilium, ſi fuerit $V^2 - PV + Q = 0$. Quicunque enim valores determinati quantitatibus x, y et z tribuantur, functio V non unum ſed duplicem perpetuo habebit valorem determinatum. Simili modo erit V functio triformis, ſi fuerit $V^3 - PV^2 + QV - R = 0$: atque functio quadriformis, ſi fuerit $V^4 - PV^3 + QV^2 - RV + S = 0$, atque ſic ratio reliquarum functionum multiformium erit comparata.

§. 121.

Praeter has diviſiones functionum duarum et plurium variabilium eaedem porro diſpeſcuntur in homogeneas et heterogeneas. Functio homogenea eſt, in qua ubique deprehenditur idem variabilium numerus dimenſionum: functio autem heterogenea eſt, in qua diverſi occurrunt dimenſionum numeri. Cenſetur vero unaquaeque variabilis unam dimenſionem conſtituere; quadratum uniuscujuscunque atque productum ex duabus duas, productum ex tribus variabilibus ſive iidem ſint, ſive diverſi, tres, et ita porro. Quantitates autem conſtantes in determinando numero dimenſionum non veniunt in cenſum. Ita in his formulis αy, βz, unica dimenſio ineſſe dicitur; in his vero αy^2, βyz, γz^2, duæ ſunt dimenſiones, in his αy^3, $\beta y^2 z$, $\gamma y z^2$, δz^3 ſunt tres, in ſequentibus αy^4, $\beta y^3 z$, $\gamma y^2 z^2$, $\delta y z^3$, εz^4 ſunt quatuor, et ita porro. Functio igitur integra erit homogenea, in cujus ſingulis terminis idem exiſtit dimenſionum numerus. Subdividentur itaque ejusmodi functiones ſecundum numerum dimenſionum, quem variabiles in ipſis ubique conſtituunt. Sic ſi hæc ad functiones duarum variabilium applicemus, erit $\alpha y + \beta z$ forma generalis functionum integrarum unius dimenſionis: haec vero expreſſio $\alpha y^2 + \beta yz + \gamma z^2$ erit forma generalis functionum duarum dimenſionum, atque tum forma

forma generalis trium dimenſionum erit $\alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3$, quatuor vero dimenſionum hæc, $\alpha y^4 + \beta y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta y z^3 + \epsilon z^4$, et ita porro. Ad analogiam igitur erit quantitas conſtans ſola functio nullius dimenſionis. Praeterea functio fracta erit homogenea, ſi ejus numerator ac denominator fuerint functiones homogeneae. Ita haec fractio $\frac{ayy + bzz}{\alpha y + \beta z}$ erit functio homogenea ipſarum y et z, numerus dimenſionum autem habetur, ſi a numero dimenſionum numeratoris ſubtrahatur numerus dimenſionum denominatoris: atque ob hanc rationem fractio $\frac{ayy + bzz}{\alpha y + \beta z}$ erit functio unius dimenſionis. Haec vero fractio $\frac{y^5 + z^5}{yy + zz}$ erit functio homogenea trium dimenſionum. Quando igitur in numeratore ac denominatore idem dimenſionum numerus ineſt, tum fractio erit functio nullius dimenſionis, ut eae quae ſequuntur, $\frac{y^3 + z^3}{yyz}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{azz}{yy}$, $\frac{\beta y^3}{z^3}$. Quodſi igitur in denominatore plures ſint dimenſiones quam in numeratore, numerus dimenſionum fractionis erit negativus. Sic $\frac{y}{zz}$ erit functio -1 dimenſionis, $\frac{y + z}{y^4 + z^4}$ erit functio -3 dimenſionum, $\frac{1}{y^5 + ayz^4}$ erit functio -5 dimenſionum, quia in numeratore nulla eſt dimenſio. Ceterum ſi plures functiones homogeneae, in quibus ſingulis idem deprehenditur dimenſionum numerus, ſive addantur ſibi, ſive a ſe invicem ſubtrahantur, quod prodit, erit functio homogenea ejusdem numeri dimenſionum. Ita haec

expreſſio $\alpha y + \frac{\beta zz}{y} + \frac{\gamma y^4 - \delta z^4}{yyz + yzz}$ erit functio unius dimenſionis: haec autem $\alpha + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma zz}{yy} + \frac{yy + zz}{yy - zz}$, erit functio nullius dimenſionis.

§. 122.

Ea quae de functionum homogenearum ab heterogeneis differentia ſunt expoſita ſimul ad functiones irrationales poſſunt extendi. Si enim fuerit P functio quaecunque homogenea n dimenſionum, erit $\sqrt{P}$ functio $\frac{1}{2}n$ dimenſionum, $\sqrt[3]{P}$ erit functio $\frac{1}{3}n$ dimenſionum, et generaliter $P^{\frac{\mu}{\nu}}$ erit functio $\frac{\mu}{\nu}n$ dimenſionum. Sic $\sqrt{(yy+zz)}$ erit functio unius dimenſionis, $\sqrt[3]{(y^9+z^9)}$ erit functio trium dimenſionum: $(yz+zz)^{\frac{3}{4}}$ erit functio $\frac{3}{2}$ dimenſionum, atque $\frac{yy+zz}{\sqrt{(y^4+z^4)}}$ erit functio nullius dimenſionis. Erit ideo hæc expreſſio $\frac{1}{y} + \frac{y\sqrt{(yy+zz)}}{z^3} + \frac{y}{\sqrt[3]{(y^6 - z^6)}} + \frac{z\sqrt{z}}{zz\sqrt{y}+\sqrt{(y^5+z^5)}}$ functio homogenea -1 dimenſionis. Ex his ſimul colligi poteſt, utrum functio irrationalis implicita ſit homogenea, nec ne. Sit nimirum V ejusmodi functio implicita, ut ſit $V^3 + PV^2 + QV + R = 0$, exiſtentibus P, Q et R functionibus variabilium y et z. Primum enim patet, V functionem homogeneam eſſe non poſſe, niſi P, Q et R ſint functiones homogeneae. Praeterea vero ſi ponamus V eſſe functionem n dimenſionum, erit V^2 functio $2n$ et V^3 functio $3n$ dimenſionum

num. Cum igitur ubique idem debeat eſſe numerus dimenſionum, oportet, ut P ſit functio n dimenſionum, Q functio $2n$ dimenſionum, et R functio $3n$ dimenſionum. Si ergo viciſſim litterae P, Q et R exprimant functiones homogeneas n, $2n$, $3n$ dimenſionum, exinde concludetur fore V functionem n dimenſionum variabilium y et z. Quemadmodum ſi functio unius variabilis z nihilo aequalis ponitur, quantitas variabilis z valorem obtinet determinatum vel ſimplicem vel multiplicem, ita ſi functio duarum variabilium y et z nihilo aequalis ponitur, tum altera variabilis per alteram definitur, ejusque functio evadit, cum ante a ſe mutuo non penderent. Simili modo ſi functio trium variabilium x, y, z, nihilo aequalis ſtatuatur, tum una variabilis per duas reliquas definitur, earumque functio exiſtit. Idem evenit, ſi functio non nihilo ſed quantitati conſtanti vel etiam alii functioni earundem variabilium aequalis ponatur. Ex omni enim aequatione, quotcunque variabiles involvat, ſemper una variabilis per reliquas definitur earumque fit functio. Duae autem aequationes diverſae inter easdem variabiles ortae binas per reliquas definient, atque ita porro.

§. 123.

Quodſi V fuerit functio homogenea n *dimenſionum variabilium* y *et* z, *atque in eadem ubique ponatur* $y = uz$; *functio V abibit in productum ex poteſtate* z^n *in functionem quandam variabilis* u. Hac enim ſubſtitutione facta in ſingulos terminos tantae inducuntur poteſtates ipſius z, quantae ipſius y ante inerant. Cum igitur in ſingulis terminis dimenſiones variabilium y et z conjunctim efficiunt numerum n, jam ſola variabilis z ubique habebit n dimenſiones, atque quilibet terminus per z^n erit multiplicatus. Per hanc itaque poteſtatem functio V fiet diviſibilis et quotus erit functio variabilem u ſolam involvens. Hinc patet, *functionem homogeneam V variabilium* y *et* z *nullius dimenſionis poſito* $y = uz$ *transmutari in functionem unius variabilis* u. Facta enim hac

 ſub-

ſubſtitutione invenitur functio ipſius u per z^0 id eſt per 1 multiplicata, atque proinde variabilis z prorſus ex computo egreditur. Ita ſi fuerit $V = \frac{y + z}{y - z}$, poſito $y = uz$, fiet $V = \frac{u + 1}{u - 1}$, atque ſi fuerit $V = \frac{y - \sqrt{(yy - zz)}}{z}$ poſito $y = uz$, habetur $V = u - \sqrt{(uu - 1)}$.

§. 124.

Functio itaque integra homogenea duarum variabilium y *et* z *dimenſionum* n *reſolvi poteſt in* n *factores ſimplices formae* $fy + gz$. Ejusmodi enim functio poſito $y = uz$ tranſit in productum ex z^n in functionem ipſius u integram n dimenſionum, quæ itaque functio in n factores ſimplices formæ $fu + g$ reſolvitur (§. 119.). Item alter factor z^n reſolvitur in n factores, quorum quilibet eſt z. Singulis itaque factoribus $fu + g$ per z multiplicatis erit uniuscujusque forma $fuz + gz = fy + gz$, quia $uz = y$. Iſti vero factores reales eſſe poſſint vel imaginarii. Ex his proinde ſequitur, functionem duarum dimenſionum $ayy + byz + cz^2$ duos habere factores ſimplices formæ $fy + gz$. Functio $ay^3 + byyz + cyzz + ez^3$ tres habet factores ſimplices formæ $fy + gz$; atque ſic natura reliquarum functionum homogenearum integrarum erit comparata. Ipſi vero hi factores invenientur, ſi functio propoſita ponatur $= 0$, atque tum omnes hujus æquationis quærantur radices, eodem modo, uti §. 104. Ceterum hæc proprietas functionum homogenearum duarum vrriabilium ad functiones homogeneas trium vel plurium variabilium non extenditur. Cf. Euleri Introd. in Analysin Infin. T. I. C. I. et C. II. et C. V.

§. 125.

r. 229. Cum quantitas variabilis ſit magnitudo indeterminata omnes quantitates determinatas in ſe complectens,

geo

geometrice ejusmodi quantitas repræſentari poterit per lineam rectam indefinitam BC. Quia enim in linea indefinita magnitudinem quamcunque determinatam abſcindere licet, ea pariter ac quantitas variabilis eandem quantitatis ideam menti offert. Primum igitur in linea indefinita BC punctum aſſumi debet A, unde magnitudines determinatæ abſcindendæ initium ſumere cenſeantur; ſicque portio determinata AP repræſentabit valorem determinatum in quantitate variabili comprehenſum. Sit igitur x quantitas variabilis, quae per rectam indefinitam BC repræſentatur, atque manifeſtum eſt, omnes valores determinatos ipſius x, qui quidem ſint reales per portiones AP in recta BC abſcindendas repræſentari poſſe. Scilicet ſi punctum P in ipſo puncto A capiatur, intervallum AP evaneſcens exhibebit valorem $x = 0$. Quo magis autem punctum P a puncto A removetur, eo major valor determinatus ipſius x intervallo AP repræſentabitur. Vocantur hæc intervalla *Abſciſſae* et punctum A *Initium abſciſſarum*. Abſciſſæ igitur exhibent valores determinatos variabilis x. Quia vero recta BC utrinque ab A in infinitum excurrit, utrinque etiam omnes ipſius x valores abſcindi poterunt. Quodſi autem valores affirmativos ipſius x ab A dextrorſum progrediendo abſcindamus, intervalla Ap ſiniſtrorſum abſciſſa valores ipſius x negativos exhibebunt, et vice verſa.

§. 126.

Cum functio quæcunque variabilis x pariter ſit quantitas variabilis, quæramus modum, ejusmodi quoque functionem ipſius x geometrice exprimendi. Sit y functio quæcunque ipſius x; quæ igitur valorem determinatum induat, ſi pro x valor determinatus ſubſtituatur. Sumatur recta quæcunque indefinita BC ad va- F. 230.
lores ipſius x denotandos, et cuilibet valori ipſius x determinato AP ad punctum extremum P adplicetur recta PM, valori ipſius y reſpondenti æqualis, ſub angulo

 quo-

quocunque, qui plerumque ſumitur rectus, niſi rationes aliud ſuadentes adſint. Nimirum ſi valor ipſius y prodeat poſitivus, is ſupra rectam BC conſtituatur, ſin autem valor ipſius y negativus oriatur, is infra rectam BC ſub eodem angulo adplicetur. Sumtis enim valoribus ipſius y affirmativis ſupra rectam BC, evaneſcentes in ipſam BC, et negativi infra eandem cadent. Figura ejusmodi functionem ipſius x pro y exhibet, quae poſito $x = 0$ induat valorem affirmativum $=$ AD, ſin capiatur $x =$ AP, fit $y =$ PM, ſi $x =$ AF, fit $y = 0$. Si AP ſumatur major quam AF, adplicata PM quae functionem y repraeſentat, fit negativa. Simili modo valores ipſius y, qui valoribus negativis ipſius x reſpondent, repraeſentantur per adplicatas ſupra BC poſitas, ſi ſint affirmativi, contra autem infra rectam BC conſtitui debent, ut pm, ſi ſint negativi. Sin autem pro quopiam ipſius x valore, ut $-x =$ AE, fiat $y = 0$, tum ibi longitudo adplicatae evaneſcit. Quodſi igitur a puncta A fluere ponatur punctum P verſus B et punctum p perſus C, ita ut variabilis x a valore Ap vel AP $= \pm 0$ creſcere incipiat continuo tam poſitive quam negative, atque tum recta ad punctum P vel p ſub angulo conſtante adplicata ſimul, in eodem quidem plano, quod hic ſit planum tabulae, moveri atque continuo creſcere vel decreſcere intelligatur, prout natura functionis y id poſcit; punctum adplicatae extremum fluendo deſcribet lineam mDM vel rectam vel curvam, quae tota in idem planum cadit, et per functionem y variabilis x determinatur. Proinde quaelibet ipſius x functio hoc modo ad Geometriam translata certam determinabit lineam ſive rectam, ſive curvam, cujus natura a functionis y natura pendebit. Recta indefinita BC vocatur *Axis* hujus lineae, rectae vero PM, pm, quae ob angulum quem cum axe efficiunt conſtantem omnes inter ſe parallelae ſunt, *ordinatim Adplicatae* ſive *ordinatae* dicuntur, et quidem *normales* ſeu *orthogonales*, ſi angulus, quem cum axe comprehendunt

fi

ſit rectus, *obliquangulae* vero, ſi angulus iſte obliquus ſumatur.

§. 127.

Ad lineam vero, quam functio quaecunque variabilis x ita repraeſentare poteſt, perfecte cognoſcendam, natura functionis, an ſit uniformis, an multiformis probe eſt adtendenda. Ponamus primo y eſſe functionem uniformem ipſius x, ſeu eſſe $y = P$, denotante P functionem quamcunque uniformem ipſius x, et quia ipſi x valorem quemvis determinatum tribuendo, adplicata y unum quoque valorem determinatum recipit, unicuique abſciſſae una reſpondebit adplicata, et hanc ob rem linea ita erit comparata, ut, ſi in quovis axis BC puncto P ducatur ad ipſam adplicata PM, ea ſemper lineam hanc ſecet, idque in unico puncto M. Singulis ergo axis punctis ſingula reſpondebunt hujus lineae puncta, et cum axis utrinque in infinitum excurrat, etiam linea per functionem y repraeſentata utrinque in infinitum excurret. Poteſt igitur haec linea recta eſſe, quia recta aliam rectam in unico puncto ſecare poteſt. Sit y functio biformis ipſius x, ſeu denotantibus litteris P et Q functiones ipſius x uniformes ſit $yy + Py + Q = 0$, ideoque $y = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$, et patet, unicuique abſciſſae x reſpondere duplicem adplicatam y, utraque exiſtente vel reali, vel imaginaria: prius ſi $\frac{1}{4}PP > Q$, poſterius ſi $\frac{1}{4}PP < Q$. Quamdiu ergo uterque valor ipſius y erit realis, abſciſſae AP duplex conveniet adplicata PM, PM, ſeu recta ad axem in P adplicata, lineam per y repraeſentatam in duobus punctis M et M ſecabit, quae igitur linea non erit recta, quia recta aliam rectam non niſi in unico puncto ſecare poteſt. Ubi autem ſit $\frac{1}{4}PP < Q$, ibi abſciſſae nulla convenit adplicata, ſeu recta ad axem in puncto P adplicata eidem lineae his in locis nuſquam occurret. Hujusmodi igitur linea eam habet proprietatem, ut ſi ad ſingula abſciſſarum puncta extrema P adplicatae rectae MM producantur

 eadem

eaedem huic lineae vel nuſquam vel in duobus punctis occurrant, niſi forte evadat $y = -\frac{1}{2}P \pm 0$, quando $\frac{1}{4}PP = Q$, tum enim duo interſectionis puncta in unum coaleſcunt. Ex his jam generaliter concludi poteſt indoles linearum, quorum natura exprimitur ex functione multiformi quacunque. Si ſcilicet linea determinetur per aequationem, in qua n ſit exponens maximae poteſtatis ipſius y; tum numerus valorum realium ipſius y erit vel n, vel $n-2$, vel $n-4$, vel $n-6$, etc, in totidem ergo punctis quælibet applicata eandem lineam ſecabit.

§. 128.

Prouti vero quælibet aequatio inter variabiles x et y, quarum illa abſciſſam, et haec adplicatam denotat, repræſentare poteſt lineam quandam ad axem BC in eaque initium abſciſſarum A pro lubitu aſſumtum rectam; ita viciſſim, ſi jam in plano deſcripta fuerit linea quædam ſive recta, ſive curva, ejus natura exprimi poteſt per aequationem inter duas coordinatas. Ducta enim recta quacunque indefinita ut BC in plano curvæ poſitione arbitraria eaque pro axe aſſumta, ſi punctum A in eodem iterum pro lubitu ſumatur pro abſciſſarum initio, ex ſingulis punctis lineæ datæ, ſive curva ſive recta ſit, ad illum axem duci poſſunt rectae vel normaliter vel oblique ſub angulo conſtante adplicatae, ſicque obtinentur intervalla AP, quæ valores variabilis x exhibent, et longitudines adplicatarum PM, quae valores functionis y repræſentant. Si jam proprietates quaedam lineæ relatæ ad illum axem et initium abſciſſarum palmariæ vel ex lege deſcriptionis, vel alias ſint cognitæ, ex iisdem concludi poteſt æquatio relationes variabilium x et y in quocunque curvæ puncto exprimens. Quod ut exemplis quibusdam iisque facillimis illuſtretur, quæramus ejusmodi æquationes pro linea recta et pro circulo, quippe quarum linearum proprietates in Geometria Elementari ex inſtituto jam ſunt expoſitæ.

§. 129.

§. 129.

Sit primo linea recta LM data ejusque natura per functionem y variabilis x exprimenda. Ac primo quidem ſumatur alia recta BC in eodem cum LM plano exiſtens poſitione quidem arbitraria pro axe, in eaque punctum A quodcunque pro abſciſſarum initio. Quia poſitio axis BC arbitraria eſt, eadem cum recta LM aut parallela, aut non parallela erit. Ponatur poſterius, atque tum recta LM producta cum axe concurret in puncto quodam E. Ex recta LM puncto quocunque M ad axem ducatur MP perpendicularis, erit AP abſciſſa $= x$ et PM adplicata orthogonalis $= y$. Deinde quoque ex A erigatur AD ad axem perpendicularis et rectæ LM occurrens in puncto D, quae igitur adplicatæ PM erit parallela. Vocetur EA $= a$, et AD $= b$, quia hæ rectæ ſunt conſtantes: atque ex ſimilitudine triangulorum EAD et EPM concluditur proportio EA (a): AD (b) = EP $(a+x)$: PM (y), et inde deducitur æquatio $ay = b(a+x)$ $= ba + bx$, ſive $y = \frac{b}{a}x + b$, quæ naturam lineae rectæ LM quousque continuatae ad axem BC et abſciſſarum initium A relatæ perfecte exprimit. Quamdiu enim abſciſſæ AP $= x$ capiantur poſitivæ, etiam applicata y eſt poſitiva $= \frac{b}{a}x + b$, et creſcit, quando applicata x creſcere ponitur. Decreſcente vero ipſa x etiam y decreſcit, donec puncto P cum A coincidente, ubi eſt AP $= 0$, fiat $\frac{b}{a}x = 0$, hincque $y = b =$ AD. Quodſi jam capiatur applicata x negativa, ut A$p = -x$, erit $pm = y = -\frac{b}{a}x + b$, quae æquatio indicat, applicatam y manere poſitivam, quamdiu $\frac{b}{a}x < b$. F. 231.

 Idem

Idem etiam figura indicat. Ducatur enim per punctum m recta mF axi parallela ſecans ipſam AD in F, erit figura pF parallelogramma, ideoque $pm = AF$ et $mF = Ap = x$ abſolutae. Praeterea EAD ∽ mFD, ideoque EA (a) : AD $(b) = mF$ (x) : FD $\left(\frac{b}{a}x\right)$. Quare cum ſit $pm = AF = AD - FD$, erit utique $pm = y = b - \frac{b}{a}x$. Creſcente igitur abſciſſa $Ap = -x$ applicata pm decreſcit, donec punctum p coincidat cum E, ubi eſt $pm = 0$. Idem et aequatio exprimit. Poſito enim in eadem a loco x, fiet $y = -\frac{b}{a}a + b = -b + b = 0$. Quodſi jam abſciſſa $Ap = -x$ ulterius creſcat applicata pm fit negativa, quod quidem intuitus figurae docet, et aequatio $y = -\frac{b}{a}x + b$ indicat. Eſt enim jam $x > a$, ideo $\frac{b}{a}x > b$, quare $-\frac{b}{a}x + b$ non poteſt non eſſe quantitas negativa. Ponit aequatio haec rectam LM ad axem inclinare eique non eſſe parallelam. Revolvi intelligatur ipſa LM circa punctum D ita ut angulus ADL evadat major, atque hoc facto recta EA $= a$, quae ante conſtans erat, variatur ipſa AD $= b$ manente conſtante. Creſcit vero recta AE creſcente angulo ADL donec ADL angulus rectus fiat. Simulac enim hoc accidit, recta LM axi eſt parallela et AE infinita. In aequatione igitur $y = \frac{b}{a}x + b$, poſito $a = \infty$ fit $y = \frac{b}{\infty}x + b = b$. Proinde $y = b$ eſt aequatio pro linea recta axi parallela. Idem et ex figura perſpicitur. PM enim nunc eſt diſtantia rectae LM

axe BC ipſi parallela, quae igitur ubique eſt eadem, quicunque et ipſi x tribuatur valor. Non tantum poſitio axis in hoc negotio arbitraria eſt, ſed et in ipſo axe initium abſciſſarum pro arbitrio ſumi poteſt. Mutato vero initio abſciſſarum, licet poſitio axeos maneat eadem, etiam aequationem, naturam lineae ad illud relatae exprimentem, aliam induere formam, palam eſt. Idem accidet aequationi pro linea recta LM, ſi loco puncti A jam punctum E, in quo cum axe concurrit, ſumatur pro abſciſſarum initio. Manente AE $= a$, et AD $= b$, nunc erit EP $= x$, ideoque EA (a) : AD (b) = EP (x) : PM (y), ex qua analogia deducitur aequatio $ay = bx$, vel $y = \frac{b}{a} x$, quae iterum in eo caſu, quo LM cum axe eſt parallela, fit $y = b$. Tum enim fit AE $= a = \infty$, et EP $= x = \infty +$ AP, ideoque $y = \frac{b}{\infty} \times \infty + \frac{b \times AP}{\infty} = b$. Pro eadem igitur linea mutata vel axis poſitione, vel initio abſciſſarum aſſumto alio atque alio, vel denique utroque mutato, admodum multae inveniri poſſunt aequationes diverſae, atque ideo a diverſitate aequationum non ſemper ad diverſitatem linearum, quas exprimunt, concludere licet, quamvis diverſae lineae diverſis etiam aequationibus perpetuo exprimantur.

§. 130.

Quaerenda jam ſit aequatio pro circulo AMD. Ac F. 233. primo in plano hujus circuli ducenda eſt recta indefinita BC pro axe ſumenda, cujus poſitio cum arbitraria ſit, ea per centrum circuli E ducatur, eritque pars ipſius AD intra circulum cadens hujus diameter. Sit primo initium abſciſſarum in puncto diametri extremo A, atque AP abſciſſa quaecunque, cujus adplicata orthogonalis PM. Sed vero in omni circulo eſt PM^2 = rectangulo ſub AP et PD (§. 212. *Geom. Elem.*) ideo ſi radius circuli, quippe qui eſt conſtans quantitas, ponatur $= a$, erit diameter

meter AD $= 2a$, hincque porro ponendo AP $= x$ et PM $= y$, erit PD $= 2a - x$. Ex his denique deducitur aequatio $yy = x(2a - x)$, vel $yy = 2ax - xx$, et $y = \pm \sqrt{(2ax - xx)}$. Indicat igitur aequatio, unicuique abſciſſae duplicem reſpondere adplicatam, quarum altera poſitiva, altera negativa eſt, et quarum una alteri abſolute ſpectatæ æqualis eſt. Ex eadem æquatione et aliae deducuntur hujus curvæ proprietates, quales ſunt quæ ſequuntur.

Curva interſecat axem in abſciſſarum initio. Ponendo enim $x = 0$, fit $y = \pm \sqrt{0 - 0} = 0$, quod indicio eſt, curvæ punctum M abſciſſae $x = 0$ reſpondens cum puncto A eſſe coincidens.

Curva interſecat axem denuo, abſciſſa x exiſtente $= 2a$. Tum enim fit $y = \pm \sqrt{(4aa - 4aa)} = 0$.

Cuilibet abſciſſae poſitivæ et minore conſtante $2a$ duplex reſpondet applicata realis $= \pm \sqrt{(2ax - xx)}$. Sub hac enim hypotheſi eſt $2ax > xx$, ideoque $2ax - xx$ quantitas poſitiva.

Creſcente abſciſſa $+ x$ ultra valorem $2a$, utraque adplicata fit imaginaria, quia tum $xx > 2ax$, atque ideo $2ax - xx$ eſt quantitas negativa. Curva igitur verſus D clauſa eſt, nec ullum habet ramum verſus hanc axeos partem cum eodem in infinitum excurrentem.

Tribuendo abſciſſae x valorem negativum quemcunque, fit $y = \pm \sqrt{(-2ax - xx)}$, proinde utraque applicata ſemper imaginaria eſt, quicunque valor negativus abſciſſæ tribuatur. Hinc curva etiam verſus A clauſa eſt, nec ramum habet verſus hanc axeos partem, qui cum eodem in infinitum excurrat. Quare cum cuilibet ipſius x valori poſitivo intra terminos $+ 0$ et $+ 2a$ cadente duplex applicata realis altera poſitiva altera negativa reſpondeat, curva intra hos terminos quoque tam ſupra quam infra axem clauſa eſt, undique igitur

ſuper

ſuperficiem quandam planam terminat, quae ab axe in duas partes ſimiles et æquales dividitur, quod ex eo patet, quia hæ partes inter ſe congruere poſſunt, ob adplicatas oppoſitas æquales.

Eadem vero hæc æquatio alias atque alias ſubire debet formas, mutata vel axis poſitione, vel initio abſciſſarum a priori diverſo aſſumto, vel utraque mutatione admiſſa. Quodſi centrum E loco puncti A ſumatur pro initio abſciſſarum, erit jam $AP = a + x$, et $PD = a - x$, hinc $yy = (a + x)(a - x) = aa - xx$, cujus æquationis veritas etiam perſpicitur ex eo, quod ducta recta EM in triangulo rectangulo EPM ſit $PMq = EMq - EPq$ (§. 120. *Cor. Geom. Elem.*). Deducuntur ex hac aequatione eædem hujus curvæ proprietates, quas ante ex priori æquatione elicuimus. Ponendo nimirum $x = + a$, vel $x = - a$, utraque adplicata evaneſcit. Cuilibet vero valori ipſius x, qui continetur intra hos terminos $+ a$ et $- a$, duplex reſpondet applicata realis. Creſcente vero abſciſſa ultra terminos $+ a$ vel $- a$, utraque adplicata fit imaginaria.

§. 131.

Ex deſcripta hac methodo lineas curvas in plano deſcriptas æquationibus analyticis exprimendi ſequitur earum diviſio in *continuas* et *diſcontinuas* ſeu *mixtas*. Linea enim curva, quæ ita eſt comparata, ut ejus natura per unam ipſius x functionem determinatam exprimi queat, vocatur *curva continua* ſeu *regularis*: curva autem, cujus variæ partes per varias ipſius x functiones exprimi debent; vocari ſolet *curva diſcontinua*, *mixta*, ſeu *irregularis*. De curvis continuis tantum in poſterum ſermo erit. Eaedem vero ulterius dividuntur in curvas *algebraicas* ſeu *geometricas* et *tranſcendentes*, prout applicata y vel functio ipſius x algebraica vel tranſcendens erit. Curva igitur erit algebraica ſeu geometrica, ſi ad quamvis abſciſſam x reperiri poteſt reſpondens applicata y per conſtructiones, quæ tandem in po-

ſtulata

ſtulata Geometriae Elementaris reſolvuntur: curva vero tranſcendens ſi conſtruenda ſit, ad operationes confugiendum eſt, quæ non ſunt in poteſtate Geometriæ Elementaris, quales ſunt diviſio indefinita arcus aut anguli, et aliæ hujusmodi. Omnis curva continua ſive algebraica ſive tranſcendens, quæ tota in idem planum cadit, vocatur *Curva ſimplicis curvaturæ*, reliquae omnes *curvæ duplicis curvaturæ* vocari ſunt ſolitæ. De curvis ſimplicis curvaturæ in poſterum ſermo erit, donec indicabitur contrarium. Cf. Euleri Introd. in Analyſin Infinitorum T. II. C. I. de lineis curvis in genere.

SECTIO X.

DE SOLVTIONE PROBLEMATVM INDETERMINATORVM ARITHMETICA ET DOCTRINAE SERIERVM PRINCIPIIS.

§. 132.

Quando problema quoddam plures incognitas proponit inveniendas; ex ejus conditionibus eliciendæ ſunt tot æquationes fundamentales, quot ſunt incognitæ inveniendæ et quarum quaelibet unius incognitæ exhibet valorem. Id quodſi fieri nequeat, *problema* dicitur *indeterminatum*; quia tum certus aliquis quæſiti valor, vel pauci aliqui determinati valores, per problema non ſuggeruntur. Sic ſi problema aliquod propoſitum fuerit, in quo duae quæruntur incognitae x et y, una ad eam rem æquatio non ſufficit, utpote per quam unum tantum quæſitorum ut y determinatur ex altero x tanquam dato, ita ut y tum ſit functio ipſius x tanquam quantitatis variabilis, quia in ejusmodi caſu mente per-

cur

curendi ſunt omnes valores, qui litterae x tribui poſſunt, atque tum ex theorematibus de aequationum natura traditis concludendum eſt, quot et quanti ſint valores ipſius y, ſi ipſi x alius atque alius tribuatur valor determinatus. Tale eſt problema arithmeticum, quod ſequitur.

§. 133.

Invenire duos numeros, quorum quadrati in ſummam collecti dent cubum alterutrius eorum numerorum.

SOL. Sint numeri quaeſiti x et y, erit $x^2+y^2 = x^3$, in qua aequatione, cum duae ſint litterae incognitae, neque praeter eam alia aequatio in problemate contineatur, non poterit id ita ſolvi, ut numeri determinati producantur. Quod praeſtari poteſt, id ſolum eſt, ut aequationi ea forma inducatur; quae clariſſime oſtendit, quomodo unus numerorum quaeſitorum pendeat ab altero, quo ſcilicet, uno numerorum pro arbitrio ſumto alterius inventio, quantum poteſt, facilitetur. Aequatio autem $x^2+y^2=x^3$ tranſpoſitis terminis fit $y^2 = x^3-x^2=x^2(x-1)$ ideoque $y=\pm x\sqrt{x-1}$. Unde patet, ſi aſſumatur numerus x, cujus cubo ſumma quadratorum aequalis eſt reddenda, duos ſemper y quaeſtioni ſatisfacere, poſitivum alterum, alterum negativum, ſed ejusdem magnitudinis abſolutae. Si x ſumatur integer atque poſitivus, numerus y ſemper realis, atque tanto major erit, quo major ſumitur x. Sed ſi x negativus ſumatur, vel fractus verus, y erit impoſſibilis. Tandem y erit rationalis, ſi x quadratum aliquem numerum unitate excedit, integer vero erit, ſi x ſumatur integer. Minimus igitur numerorum integrorum, qui pro x ſubſtitutus numerum y integrum atque rationalem reddit, eſt 2. Deinde 5, 10, 17 etc. aeque utiles ſunt ad numerum y integrum rationalem reddendum. Hic eſt modus numerum y eliciendi ex numero x tanquam dato, qui igitur in quovis problemate hujus gene-

generis eſt quantitas variabilis, omnes omnino valores determinatos in ſe complectens, et numerus y hujus variabilis functio. Segneri Clem. An. fin. Sect. X. §574.

§. 134.

Invenire duos numeros, quorum alter pendet ab altero eo modo, quem aequatio $x^3 - xxy = 43x - 9x - 42$ *definit.*

SOL. Tranſpoſitis aequationis terminis fit $x^3 - 43x + 42 = xxy - 9y$, ideoque $y = \frac{x^3 - 43x + 42}{xx - 9}$ unde y colligi ſatis promte poteſt, ſi aſſumatur x. Ut autem problema cum aliqua univerſalitate ſolvatur, percurrendi ſunt praecipui numeri, qui per x denotari poſſunt; eritque ad

$x = +\infty$ - - - -	$y = +x$
$+10$ - - - - - -	$+6, 7$
$+9$ - - - - - -	$+5, 3$
$+8$ - - - - - -	$+3, 8$
$+7$ - - - - - -	$+2, 1$
$+6$ - - - - - -	0
$+5$ - - - - - -	-3
$+4$ - - - - - -	$-9, 4$
$+3$ - - - - - -	∞
$+2$ - - - - - -	$+7, 2$
$+1$ - - - - - -	0
0 - - - - - -	$-4, 6$
-1 - - - - - -	$-10, 5$
-2 - - - - - -	-24
-3 - - - - - -	$-\infty$
-4 - - - - - -	$+21, 4$
-5 - - - - - -	$+8, 2$
-6 - - - - - -	$+3, 1$
-7 - - - - - -	0
-8 - - - - - -	$-2, 1$
-9 - - - - - -	$-4, 1$
-10 - - - - - -	$-5, 8$
$-\infty$ - - - - - -	$-x$

Atque

Atque hoc modo, ſi y detur per quamcunque ipſius x functionem, ſubſtitutis in hac formula loco x numeris, qui a termino 0 excurrunt verſus utramque partem, ſeries oritur numerorum, quorum quilibet per eandem functionem generatim exprimitur: quare alia atque alia functione ipſius x aſſumta innumerabiles produci poſſunt ejusmodi ſeries. Sequen. El. An. fin. Sect. X. §. 197.

§. 135.

Series enim generatim eſt numerorum communi quadam formationis lege utcunque ſeſe conſequentium congeries, quæ producta ſupponitur per terminos omnes, qui in formationis determinatione continentur. *Series* dicitur *primitiva*, ſi ſpectatur ut talis, cujus lex formationis ab alia quadam ſerie non dependet: *ſeries* autem, quæ in formatione dependet ab alia quadam ſerie, *derivativa* vocatur. Ad ejusmodi ſeries pertinet *progreſſio geometrica*, quæ conſtat terminis continuo geometrice proportionalibus, et *progreſſio arithmetica*, quæ terminis æque differentibus conſtat. *Series differentiales* ſunt, quæ prodeunt, ſi capiantur differentiæ inter proximos quosvis terminos cujuscunque ſeriei, quæ ut primitiva ſpectatur, et denuo differentiarum differentiæ, donec ultimato inveniantur differentiæ æquales, quarum differentiæ, ſi denuo capiantur, evadunt = 0. *Series differentialis ordinis primi* eſt, cujus termini ſunt differentiæ terminorum ſeriei primitivæ, *ordinis ſecundi*, cujus termini ſunt differentiæ terminorum ſeriei differentialis ordinis primi, et ſic porro. *Series ſummatrices* ſunt, quæ prodeunt capiendo ſummas terminorum ſeriei cujuscunque, quae ut primitiva ſumitur, et ſummas harum ſummarum, ſicque porro; eſtque *ſummatrix ordinis primi*, quae conſtat ſummis terminorum primitivae; *ordinis ſecundi* et ſequentium, cujus termini ſunt ſummae terminorum ſummatricis ordinis primi et ſequentium. Ipſa *ſeries primitiva* dicitur *primi ordinis*, ſi ejusdem differentiae primae omnes ſunt conſtantes, quare omnes

progreſſiones arithmeticae ſunt ſeries primi ordinis. *Series ſecundi ordinis* ſunt, quarum differentiae tertiae conſtantes ſunt; ad *quartum ordinem* et ſequentes referentur ſeries, quarum differentiae quartae et ulteriores demum ſunt conſtantes.

§. 136.

In hac diviſione permulta ſerierum genera continentur, neque tamen omnes ſeries ad haec genera revocare licet, quia innumerabiles ſeries occurrunt, quae differentiis ſumendis nunquam ad terminos conſtantes deducunt, cujusmodi praeter innumeras alias ſunt progreſſiones geometricae, quae nunquam praebent differentias conſtantes. Sit enim ſeries A

(A) L, M, N, O, P, Q, etc.

(B) M — L, N — M, O — N, P — O, Q — P, etc.

progreſſio geometrica quaecunque, cujus differentialis prima eſt ſeries B, erit quoque ſeries B progreſſio geometrica; et termini ejus contigui erunt in eadem ratione, in qua continuantur termini primitivae. Eſt enim $M : L = N : M$, et ideo $M - L : L = N - M : M$, vel $M - L : N - M = L : M = M : N$. Deinde eſt $N : M = O : N$, proinde $N - M : M = O - N : N$, vel $N - M : O - N = M : N$, et ideo $M - L : N - M = N - M : O - N = M : N = L : M$, quae argumentatio per totam ſeriem continuari poteſt, ex eaque ſimul patet, quia ſeries differentialis prima eſt geometrica, etiam differentialem ſecundam, tertiam, et ſequentes omnes eſſe ſeries geometricas, quare nunquam ad differentias conſtantes perveniri poteſt. Plures igitur ſerierum claſſes conſtitui debebunt, quarum una tantum in hos ordines, qui tandem ad differentias conſtantes revocantur, ſubdividitur.

§. 137.

Duae autem res ad naturam ſerierum cognoſcendam inprimis requiri ſolent. Terminus generalis, atque ſumma ſeu Terminus ſummatorius. *Terminus generali*

neralis eſt expreſſio indefinita, quemcunque ſeriei terminum complectitur, atque ideo eſt ejusmodi functio variabilis x, quæ poſito $x = 1$, terminum ſeriei primum exhibet, ſecundum vero, poſito $x = 2$; tertium poſito $x = 3$; quartum poſito $x = 4$, et ita porro. *Indices* ſeu *Exponentes terminorum* in qualibet ſerie vocantur numeri, qui indicant, quotus quisque terminus ſit in ordine. Sic termini primi index erit 1, ſecundi 2, tertii 3 et ita porro. Hinc indices ſingulis cujusque ſeriei terminis inſcribi ſolent, hoc modo:

Indices.

1	2	3	4	5	6	7	etc.

Termini.

A	B	C	D	E	F	G	etc.

unde ſtatim patet, G eſſe ſeriei propoſitae terminum ſeptimum, cum ejus index ſit 7. Hinc terminus generalis nihil aliud erit, niſi terminus ſeriei, cujus index vel exponens eſt numerus indefinitus ſive variabilis x. Quodſi progreſſionis arithmeticæ ſeu ſeriei primi ordinis terminus primus ſit a et b differentia terminorum, ſeries arithmetica ſequentem habebit formam generalem:

Indices.

1	2	3	4	5	6	etc.

Termini.

a,	$a+b$,	$a+2b$,	$a+3b$,	$a+4b$,	$a+5b$,	etc,

Series differentialis prima.

b	b	b	b	b	etc.

ex qua ſtatim patet, terminum, cujus index ſit $= x$, fore $a + (x-1)b$. Erit igitur progreſſionis arithmeticæ terminus generalis $a + (x-1)b = bx + a - b$, qui ex termino primo ſeriei primitivæ et termino primo ſeriei differentialis componitur. Quodſi autem terminus ſecundus ſeriei, qui eſt $a+b$, vocetur a^1, erit $b = a^1 - a$, et terminus generalis $= (a^1 - a)x + 2a - a^1 = a^1(x-1) - a(x-2)$; unde ex

 cogni-

cognitis termino primo et ſecundo progreſſionis arithmeticæ ejus terminus generalis formabitur. Quodſi geometricæ progreſſionis terminus primus ſit a, et exponens rationis termini primi ad ſecundum $= e$, erit forma generalis progreſſionis geometricæ ea, quae ſequitur.

Indices.

$$1,\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad \text{etc.}$$

Termini.

$$a\quad ae\quad ae^2\quad ae^3\quad ae^4\quad ae^5\quad ae^6,\quad \text{etc,}$$

ex quo patet, ſi index termini ſit x, eſſe ipſum terminum $= ae^{x-1}$, quæ eſt expreſſio termini generalis ſeriei geometricae.

§. 138.

Terminus ſummatorius ſeriei cujuscunque propoſitæ eſt functio variabilis x, quæ æqualis eſt ſummæ tot terminorum ſeriei, quot unitates continet numerus x. Ita igitur terminus ſummatorius erit comparatus, ut poſito $x = 1$ prodeat terminus primus ſeriei; ſi autem ponatur $x = 2$, ſumma primi et ſecundi; facto autem $x = 3$, ſumma termini primi, ſecundi et tertii ſicque deinceps. Proinde ſi ex ſerie propoſita nova ſeries formetur, cujus primus terminus æqualis ſit primo illius, ſecundus æqualis ſummae duorum, tertius æqualis ſummæ trium, atque ita porro, orietur ſeriei propoſitæ ſummatrix prima, hujusque ſeriei ſummatricis terminus generalis, erit terminus ſummatorius ſeriei propoſitae. Sit ſeries propoſita hæc

$$a\quad a^{\mathrm{I}}\quad a^{\mathrm{II}}\quad a^{\mathrm{III}}\quad a^{\mathrm{IV}}\quad a^{\mathrm{V}}\quad a^{\mathrm{VI}}\quad \text{etc,}$$

hujusque ſeriei ſummatrix ſit

$$A\quad A^{\mathrm{I}}\quad A^{\mathrm{II}}\quad A^{\mathrm{III}}\quad A^{\mathrm{IV}}\quad A^{\mathrm{V}}\quad A^{\mathrm{VI}}\quad \text{etc,}$$

erit ex natura ſeriei ſummatricis

$A = a$

$$A = a$$
$$A^{I} = a + a^{I}$$
$$A^{II} = a + a^{I} + a^{II}$$
$$A^{III} = a + a^{I} + a^{II} + a^{III}.$$
$$A^{IV} = a + a^{I} + a^{II} + a^{III} + a^{IV}$$
etc.

Hinc ſerierum ſummatricis differentiæ erunt $A^{I} - A = a^{I}$; $A^{II} - A^{I} = a^{II}$; $A^{III} - A^{II} = a^{III}$; etc, unde ſeries propoſita termino primo minuta erit ſeries differentiarum primarum ſeriei ſummatricis. Quodſi igitur ſeriei ſummatrici præfigatur terminus $= 0$, ut habeatur $0, A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^{V}$, etc. erit ſeries differentialis prima hujus ſeriei ipſa ſeries propoſita:

$$a \quad a^{I} \quad a^{II} \quad a^{III} \quad a^{IV} \quad a^{V} \quad \text{etc.}$$

Erunt igitur ſeriei propoſitæ differentiae primæ differentiæ ſecundæ ſummatricis, atque differentiæ ſecundae illius erunt differentiae tertiae hujus, tertiae autem illius quartæ hujus, atque ſic porro. Quare ſi ſeries propoſita tandem habeat differentias conſtantes, tunc etiam ejus ſummatrix ad differentias conſtantes deducetur, eritque ſeries ejusdem naturæ, ſed uno ordine ſuperior.

§. 139.

Series numerorum polygonorum ſunt ſummatrices primæ progreſſionis arithmeticæ ab unitate incipientis. Vocantur *triangulares*, ſi differentia terminorum $= 1$, *quadrangulares*, *pentagoni*, *hexagoni*, etc. ſi differentia terminorum $= 2, 3, 4$, etc. *Series numerorum pyramidalium* ſunt ſummatrices omnium ordinum ſeriei numerorum polygonorum, et termini talis ſeriei vocantur *numeri pyramidales trigoni*, *tetragoni*, etc. prouti ſeries primitiva, ex qua formantur, fuerit ſeries numerorum triangularium, vel quadrangularium, vel pentagonorum etc. *Series numerorum figuratorum* ſunt ſeries ſumma-

 trices

trices omnium ordinum ejusmodi ſeriei primativae, cujus omnes termini inter ſe æquales ſunt, qui termini dicuntur *generatores* ſerierum numerorum figuratorum. Generatores iſti poſſunt cuilibet numero aſſumto aequales eſſe. Si ſtatuantur unitati æquales, ſummatrix prima fit progreſſio arithmetica ab unitate incipiens, in qua differentia terminorum $= 1$, proinde ſummatrix ſecunda fit ſeries numerorum triangularium et ſummatrices reliquorum ordinum ſunt ſeries numerorum pyramidalium trigonorum.

§. 140.

Si ſeriei cujusdam primitivæ quærantur ſummatrices vel differentiales omnium ordinum, numerus exprimens, quota ſit ſeries in ordine ſummatricium vel differentialium ſerie primitiva connumerata, vocatur *index ſeriei*, qui igitur ab *indice termini* eſt diſtingendus. Quodſi ſeries figuratæ ordinentur, uti in ſequente ſchemate, erit *ut index ordinis ſeriei ad unitatem, ſic multiplum termini cujusvis indicis* x *in indicem ſuum ad ſummam* x *terminorum.*

Indices Serierum.

Indices Terminorum.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	&c.
I	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
II	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
III	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
IV	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
V	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	
VI	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	
VII	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	
VIII	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	
IX	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	
X	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	
XI	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	
XII	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
&c.													

Sit

conf. de hac Doctrina Hausen in Elementis Matheseos. p. 61.

Sit y index ordinis ſeriei, V terminus quivis, x ejus index, S vero ſumma x terminorum, atque demonſtrandum eſt, fore $y : 1 = xV : S$. In ſeriei I veritas propoſitionis per ſe manifeſta eſt. Quodſi autem in una ſerie hoc verum ſit, idem quoque verum eſſe in ſerie proxime conſequente ita demonſtratur. Sint duæ proxime conſequentes ſeries P et Q, index ipſius P ſit y, quare index ſequentis Q erit $y+1$; numerus terminorum in P ſit x, unde in Q erit $x+1$. Jam per hypotheſin in ſerie P eſt $y : 1 = xf : a+b+c+d+e+f$, atque per geneſin ſeriei Q eſt $a+b+c+d+e+f = q$, ideo eſt $y : 1 = xf : q$, et $q = \frac{xf}{y}$. Eodem argumento oſtenditur, eſſe

	y	$y+1$
	P	Q
$x-5$	a	o
$x-4$	b	g
$x-3$	c	h
$x-2$	d	k
$x-1$	e	l
x	f	p
$x+1$		q

$$p = \frac{(x-1)e}{y}$$

$$l = \frac{(x-2)d}{y}$$

$$k = \frac{(x-3)c}{y}$$

$$h = \frac{(x-4)b}{y}$$

$$g = \frac{(x-5)a}{y}$$

Ergo $q+p+l+k+h+g = \frac{xf}{y} + \frac{(x-1)e}{y} + \frac{(x-2)d}{y} + \frac{(x-3)c}{y} + \frac{(x-4)b}{y} + \frac{(x-5)a}{y} =$

 (xf+

$$(xf+(x-1)e+(x-2)d+(x-3)c+(x-4)b+(x-5)a)\times\frac{1}{y}$$

$$=(xf+xe-e+xd-2d+xc-3c+xb-4b+xa-5a)\times\frac{1}{y}$$

$$=(x(f+e+d+c+b+a)-e-2d-3c-4b-5a)\times\frac{1}{y}.$$

Sed $g=a$
$h=a+b$
$k=a+b+c$
$l=a+b+c+d$
$p=a+b+c+d+e$

ideo $g+h+k+l+p=5a+4b+3c+2d+e$.
Præterea $a+b+c+d+e+f=q$ (*gen. ſeriei*)

Facta igitur ſubſtitutione erit

$$q+p+l+k+h+g=(xq-p-l-k-h-g)\times\frac{1}{y}$$

ergo $yq+y(p+l+k+h+g)=(xq-p-l-k-h-g)$, et $y(p+l+k+h+g)+1\times(p+l+k+h+g)=xq-yq$, id eſt $(y+1)(p+l+k+h+g)=(x-y)q$, proinde $p+l+k+h+g=\frac{x-y}{y+1}q$. Addatur utrinque q, et fiet $q+p+l+k+h+g=\frac{x-y}{y+1}q+q=\frac{(x-y)q+(y+1)q}{y+1}$ $=\frac{xq-yq+yq+q}{y+1}=\frac{(x+1)q}{y+1}$. Ergo in ſerie Q eſt $y+1:1=(x+1)q:q+p+l+k+h+g$. Valet vero analogia iſta in ſerie prima, ergo valet in ſecunda, proinde et in tertia, quarta, quinta, et pro quavis alia.

§. 141.

Ex his deducitur formula pro termino ſummatorio ſeriei figuratæ cujuscunque, ſi generatores ſunt unitati æqua-

æquales. In prima ſerie P indicis $y = 1$ terminus ſummatorius eſt $\frac{x}{1} = q$. In ſecunda Q eſt $o + g + h + k + l + p = \frac{x - y}{y + 1} q = \frac{x - 1}{2} q$; ſed $q = \frac{x}{1}$, quare $o + g + h + k + l + p = \frac{x \cdot x - 1}{1 \cdot 2}$. Quodſi ſeries P ſit ſecunda, Q ſit tertia, eritque index ſeriei $P = y = 2$, atque $o + g + h + k + l + p = \frac{x - y}{y + 1} q = \frac{x - 2}{3} q$, ſed $q = \frac{x \cdot x - 1}{1 \cdot 2}$, ideo $o + g + h + k + l + p = \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Eodem modo pergendo invenitur terminus ſumatorius pro ſerie

$$\text{IV.}\quad \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\text{V.}\quad \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3 \cdot x - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

et generaliter pro ſerie ordinis y erit terminus ſummatorius connumeratis cyphris

$$\frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3 \cdots\cdots x - y + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots\cdots y}.$$

Eadem formula mutari poteſt in aliam, ubi x denotat indicem terminorum incipiendo ab unitate, adtendendo ad ſequentia. Si y eſt index ſeriei, erit $y - 1$ numerus cyphrarum ab unitate uſque ad initium ſeriei regrediendo, unde ſi jam x dicatur numerus terminorum incipiendo quamlibet ſeriem ab unitate, quod ante erat x, jam fiet $x + y - 1$. Proinde hoc valore in locum illius

ſubſtituto, terminus ſummatorius pro quavis ſerie ordinis y hanc habet formam,

$$\frac{x+y-1 \,.\, x+y-2 \,.\, x+y-3 \,..\, (x+y-1-y+1=x)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.......\, y}$$

vel $$\frac{x \,.\, x+1 \,.\, x+2 \,.\, x+3 \,...\, x+y-1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,...\, y}.$$

§. 142.

Si quantitates quotcunque numero x *inter ſe combinandæ ſunt exponente combinationis* y; *jam inveniri poteſt formula generalis, quae exprimit numerum combinationum.*

Sit enim numerus combinationum $= \nu$, exponens combinationis 1, et

1) numerus quantitatum 1, erit $\nu = 1$,

2) numerus quantitatum 2, erit $\nu = 2$,

3) numerus quantitatum 3, erit $\nu = 3$,

Ideo generaliter, ſi x quantitates ſunt combinandæ exponente combinationis 1, erit $\nu = \frac{x}{1}$, et numeri combinationum progrediuntur ut numeri 1, 2, 3, 4. 5, etc. quae eſt ſeries figurata indicis II, ita ut exponente combinationis $= 1$ ſit numerus combinationum termino ſummatorio ſeriei figuratæ indicis 1 æqualis, ſi hic pro indice termini ſeriei figuratæ ſcribatur numerus quantitatum.

Deinde ſit exponens combinationis 2, et

1) numerus quantitatum 1, erit $\nu = 0$

2) ſi $x = 2$, eſt $\nu = 0 + 1 = 1$

3) ſi $x = 3$, eſt $\nu = 3$, ſi enim tres iſtæ quantitates ſint a, b, c, patet, quod tertia c quæ accedit, cum qualibet priorum a et b poſſit combinari, ideoque 2 combinationes accedunt ad priorem unicam, eſt igitur $\nu = 1 + 2 = 3$.

4) ſi quarta d accedat, hæc iterum cum qualibet priorum

orum combinari poteſt; ad tres igitur priores combinationes tres accedunt, fietque $\nu = 1 + 2 + 3 = 6$.

5) ſi quinta ϵ accedat, eodem modo patet, quatuor combinationes accedere, ita ut ſit $\nu = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

6) ſi ſexta accedat, eſt $\nu = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Ideo numeri combinationum progrediuntur, ut numeri figurati in ſerie indicis III, et generaliter numerus combinationum eſt terminus ſummatorius ſeriei figuratæ indicis II, ut ſit $\nu = \frac{x \cdot x - 1}{1 \cdot 2}$, ſi numerus quantitatum fuerit $= x$.

Porro ſi exponens combinationis ſit 3, et

1) $x = 1$, eſt $\nu = 0$

2) $x = 2$, eſt $\nu = 0 + 0$

3) $x = 3$, eſt $\nu = 0 + 0 + 1$

4) $x = 4$, ad tres priores quantitates, quæ ſint α, β, γ, quarta δ accedit, quæ cum quibusvis binis priorum combinari poteſt, ideo tres combinationes accedunt, fitque $\nu = 0 + 0 + 1 + 3$.

5) Si quinta ϵ accedat hæc iterum cum quibuslibet binis ex quatuor iſtis α, β, γ, δ, poteſt eſſe in combinatione. Proinde cum binarum ex his combinationes 6 ſint poſſibiles, fit $\nu = 0 + 0 + 1 + 3 + 6$.

6) Sexta ζ accedente præter priores combinationes accedunt iſtæ in quibus ζ cum ſingulis binis ex his prioribus α, β, γ, δ, ϵ, combinatur. Quare cum harum combinationum ſint 10 poſſibiles, fit $\nu = 0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 10$.

Numeri igitur combinationum exponente $= 3$ progrediuntur ut numeri figurati in ſerie indices IV, eſtque generaliter numerus combinationum termino ſummatorio ſeriei figuratae indicis III aequalis. Proinde ad x quantitatus eſt $\nu = \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

For-

Formetur jam ſeries numerorum, qui exprimunt ſummas combinationum, ſi x quantitates combinandae ſint, exponente combinationis exiſtente 1, 2, 3, 4, 5, etc.

Indices.

$$1 \quad 2 \quad 3 \ldots\ldots y$$

Termini.

$$\frac{x}{1},\ \frac{x\,.\,x-1}{1\,.\,2};\ \frac{x\,.\,x-1\,.\,x-2}{1\,.\,2\,.\,3\,.};\ \frac{x\,.\,x-1\,.\,x-2\ldots x-y+1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots 4\,.\,y}.$$

erit index cujuslibet termini exponenti combinationum aequalis. Dico vero, ſi haec formula vera ſit, numero quantitarum combinandarum exiſtente $= x$, eaque valeat pro termino $r$to, eandem ſimul valere pro termino $(r+1)$to. Per geneſin enim ſeriei eſt terminus $r$tus $=$

$$\frac{x\,.\,x-1\,.\,x-2\ldots x-r+1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots r}$$

ex eoque formatur terminus $(r+1)$tus, ſi numerator per $x-r$ et denominator per $r+1$ multiplicetur, ut fiat terminus

$$(r+1)\text{tus} = \frac{x\,.\,x-1\,.\,x-2\ldots x-r+1\,.\,x-r}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots r\,.\,r+1}$$

$$\text{vel } \frac{x\,.\,x-1\,.\,x-2\ldots\ldots x-r}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots r+1}$$

Sed vero in termino $r$to ubique ſubſtituto $r+1$ loco r, is eandem obtinet formam. Cum igitur haec formula valeat pro termino 1 et 2, quicunque ſit numerus quantitatum combinandarum, eadem valere debet pro omnibus.

§. 143.

Quod ſi functionis rationalis integrae variabilis x hujus formae

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Px + Q$$

factores ſimplices omnes ſint inter ſe aequales et quivis eorum ſit $x-b$ erit $(x-b)^m = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Px + Q$. Poſito jam $x = b$, ut ſit

ſit $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Px + Q = 0$, erunt hujus aequationis radices omnes inter ſe aequales. Praeterea eſt A ſumma factorum ex ſingulis 1 radicibus cum ſignis contrariis, B ſumma factorum ex ſingulis 2 radicibus cum ſignis propriis, et ita porro, (§. 100.). Sed hoc loco eſt factum ex 2 radicibus $= b^2$, factum ex tribus $= b^3$, factum ex quatuor $= b^4$, etc. numerus omnium radicum $= m$, Proinde eſt $A = -\frac{m}{1}b$, $B = +\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}b^2$, $C = -\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^3$, $D = +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}b^4$ etc; ex quo fit $(x-b)^m = x^m - \frac{m}{1}x^{m-1}b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}x^{m-2}b^2 - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{m-3}b^3 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^{m-4}b^4 \ldots, \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \ldots m-m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots m}x^{m-m}b^m$, in quo termino ſeries perpetuo abrumpitur, quia ſequentes omnes multiplicati ſunt per factorem $m-m=0$, et proinde evaneſcunt. Littera enim m hic denotat numerum integrum eumque poſitivum, quia æquatio $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Q = 0$ eſt aequatio rationalis. Sic loco $-b$ ſcribatur ubique $+b$, fiet $(x+b)^m = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}x^{m-2}b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{m-3}b^3 +$ etc. Series haec inſervit binomio quocunque $a+b$ ad quamlibet potentiam exponentis integri poſitivi elevando. Eſt enim, ſi m denotet numerum integrum poſitivum, $(a \pm b)^m = a^m \pm \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}a^{m-2}b^2 \pm \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-3}b^3 +$ etc,

etc, quia inventa formula vera eſt, quicunque valor determinatus pro x ſubſtituatur. Eſt igitur $(1+b)^m =$

$$1 + \frac{m}{1}b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot} b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot} b^3 +$$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^4 + \text{etc.}$$ in qua ſerie, ſi coefficiens termini $r$ti non connumerato primo eſt P, erit coefficiens termini $(r+1)$ti $= \frac{m-r}{r+1}$ P. Atque hoc eſt ſpecimen ſeriei, cujus termini ſecundum poteſtates ipſius b ſunt ordinati, et quorum terminorum cujuslibet coefficiens formatur ex antecedente ſecundum legem quandam conſtantem. Ejusmodi ſeries, in quibes cujuslibet termini coefficiens formatur ex coefficiente unius vel coefficientibus aliquot praecedentium vocantur *ſeries recurrentes*

§. 144.

Quaedam progreſſio arithmetica inter ſeries figuratas occurrit. Sed poterunt formulae generales, problematum has progreſſiones concernentium ſolutiones defimientes etiam univerſaliter ex notione aequalitatis differentiarum erui. Ponatur enim terminus primus $=a$, et differentia quorumvis terminorum contiguorum $= d$; quo facto, ſi n ſit index termini ultimi, omnis progreſſio arithmetica ita poterit exprimi:

INDICES.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . . . . n

TERMINI.

a; $a+d$; $a+2d$; $a+3d$; $a+4d$; $a+5d$ . . $a+(n-1)d$.

Summa termini primi et ultimi erit $2a+(n-1)d$. Jam demonſtrare poſſumus, quamlibet ſummam duorum terminorum ab extremis aequaliter diſtantium eidem huic expreſſioni et ideo ſummae termini primi et ultimi aequalem eſſe. Ponatur diſtantia duorum terminorum ab extremis

tremis aequaliter diſtantium ab initio et fine $= r$, et terminus $r$tus ab initio erit $= a + (r - 1) d$. Diſtantia termini $r$ti a fine a termino primo ſeu ejus index ſit $= y$, quo facto erit $y + r - 1 = n$; $y - 1 = n - r$, et $y = n - r + 1$. Hinc terminus $r$tus a fine $= a + (n - r) d = a + nd - rd$. Dicatur terminus ultimus $= V$ et erit $a + V = a + nd - rd + a + rd - d = 2a + nd - d = 2a + (n - 1) d$.

Sit progreſſio arithmetica A et eadem B

A a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	. .	$a+(n-1)d$
B $a+(n-1)d$	$a+4d$	$a+3d$	$a+2d$	$a+d$		a
$2a+(n-1)d$	$2a+5d$	$2a+5d$	$2a+5d$	$2a+5d$		$2a+(n-1)d$

priori A ordine inverſo ſubſcripta. Jam non tantum terminus primus et ultimus ſed generatim omnes termini ab extremis aequaliter diſtantes ſibi invicem ſubſcripti erunt. Poſterior progreſſio priori addatur, et ſumma totalis erit duplum progreſſionis A, omnes autem ſummae partiales ſibi erunt aequales. Si igitur ſumma progreſſionis dicatur $= S$, erit per modo dicta $2S =$ ſummae termini primi et ultimi $2a + (n - 1) d$ toties ſumtae, quoties in n eſt unitas, ſeu $2S = (2a + (n - 1) d) n$. Hinc erit $S = (2a + (n - 1) d) \times \frac{n}{2}$. Ex hac aequatione tanquam fundamentali cum altera $U = a + (n - 1) d$ combinata praecipuorum problematum arithmeticas progreſſiones concernentium ſolutiones ſatis facile eliciuntur. Generatim autem, ſi ex hiſce quinque quantis, a, U, n, d, S, tria ſint data, ex iis inveniri poterunt duo reliqua.

I. Eſt $U = a + (n - 1) d = a + nd - d$
ideo $U - a = nd - d$

$$\frac{U - a}{n - 1} = d$$

$$\frac{U - a}{d}$$

$$\frac{U-a}{d}+1=n$$

$$a=U-nd+d$$

II. $$\frac{(2a+nd-d)n}{2}=S$$

$$2an+nnd-nd=2S$$

$$a=\frac{2S-nnd+nd}{2n}$$

$$d=\frac{2S-2an}{nn-n}$$

$$nnd+(2a-d)n=2S$$

$$nn+\frac{2a-d}{d}n=\frac{2S}{d}$$

$$n=-\frac{2a-d}{2d}\pm r\left(\frac{2S}{d}+\frac{(2a-d)^2}{4dd}\right)$$

III. Subſtituatur valor $2a+nd-d=a+U$, q
erit $an+Un=2S$

$$a=\frac{2S-Un}{n}$$

$$n=\frac{2S}{a+U}$$

$$U=\frac{2S-an}{n}$$

$$\frac{an+Un}{2}=S$$

IV. In $an+Un=2S$ ſubſtituatur $a=U-nd+d$
ut fiat $2Un-nnd+nd=2S$

$$U=\frac{2S+n^2d-nd}{2n}$$

$$d=\frac{2Un-2S}{nn-n}$$

nnd-

$md - nd - 2Un = 2S$

$$m - \frac{nd - 2Un}{d} = \frac{2S}{d};\ mn - \frac{d + 2U}{d}\, n = \frac{2S}{d};$$

$$n = + \frac{d + 2U}{2d} \pm r\left(\frac{2S}{d} + \frac{(d + 2U)^2}{4dd}\right)$$

V. In formula $an + Un = 2S$ ſubſtituatur valor

$$\frac{U - a}{d} + 1 = n, \text{ ut fiat } (a + U)\left(\frac{U - a}{d} + 1\right) = 2S =$$

$$= U + a + \frac{UU - aa}{d} = 2S$$

$$a = 2S - \frac{UU - aa}{d} - U$$

$$(U + a)d + UU - aa = 2Sd$$

$$UU - aa = 2Sd - Ud + ad$$

$$\frac{UU - aa}{2S - U + a} = d$$

$$Ud + ad + UU - aa = 2Sd$$

$$UU + Ud = 2Sd + aa - ad$$

$$U = - \tfrac{1}{2}d \pm r(2Sd + aa - ad + \tfrac{1}{4}d^2)$$

§. 145.

Si detur terminus primus a progreſſionis geometricae et exponens rationis m termini primi ad ſecundum; datur ipſa progreſſio quousque lubet continuanda. Erit enim generaliter

INDICES.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . . . . n

TERMINI SERIEI.

a . am . am^2 am^3 am^4 am^5 am^6 am^7 am^8 . . am^{n-1}

ex quo patet, ſi index termini $= n$, eſſe ipſum terminum $= am^{n-1}$. Eſt igitur et terminus ultimus generaliter $= am^{n-1}$, qui ſi multiplicetur per primum a, erit factum $= a^2m^{n-1}$. Hoc factum terminorum ex-

tremorum ſemper æquale eſt facto duorum mediorum quorumcunque ab extremis æque diſtantium. Sic ſi terminus ultimus ſit am^8, erit $a \times am^8 = am \times am^7 = am^2 \times am^6$ etc. Sit generaliter diſtantia terminorum ab extremis æque diſtantium a fine et ab initio $= r$, et index r termini $r$ti ab initio erit $= r$. Terminus igitur $r$tus ab initio eſt $= am^{r-1}$. Ut pari ratione generaliter inveniatur terminus $r$tus a fine, quæri debet ejus index ſeu diſtantia ab initio. Sit termini $r$ti a fine diſtantia ab initio ſ. ejus index $= y$ et index termini ultimi $= n$; et erit $y + r - 1 = n$, hinc $y + r = n + 1$, et $y = n - r + 1$, ideo generaliter eſt terminus $r$tus a fine $= a^{n-r}$, qui multiplicatus per $r$tum ab initio am^{r-1} dat factum $= a^2 m^{n-1}$.

§. 146.

Palmaria progreſſionis geometricæ proprietas eſt, quod ratio differentiae ſummæ omnium terminorum et ultimi ad differentiam ſummae omnium terminorum et primi æqualis ſit rationi termini primi ad ſecundum. Eſt enim

$$\begin{array}{llll} a : am & = & a & : am \\ a : am & = & am & : am^2 \\ a : am & = & am^2 & : am^3 \\ a : am & = & am^3 & : am^4 \\ a : am & = & am^4 & : am^5 \\ a : am & = & am^5 & : am^{n-2} \\ a : am & = & am^{n-2} & : am^{n-1} \end{array}$$

Ergo $a : am = a + am + am^2 + am^3 + am^4 + am^5 + am^{n-2} : am + am^2 + am^3 + am^4 + am^5 + am^{n-2} + am^{n-1}$.

Sit ſumma omnium terminorum $= S$, et $am^{n-1} = U$ et fiet $a : am = S - U : S - a$.

Ex hac autem analogia deduci poteſt alia notatu digna. Quia enim $a : am = S - U : S - a$, et $a : am = 1 : m$ erit $1 : m = S - U : S - a$

$m : 1 = S - a : S - U$

$m - 1 : 1 = S - a - S + U : S - U$

$m - 1 : 1 = U - a : S - U$.

i. e. Exponens unitate mulctatus eſt ad unitatem, uti differentia termini *primi* et ultimi ad ſummam omnium terminorum excepto ultimo. Fluit ex hac analogia aequatio $\frac{1}{m-1} = \frac{S-U}{U-a}$ ſummam omnium terminorum definiens, mutabitur enim in ſequentem $\frac{U-a}{m-1} + U = S$. Prior vero analogia $a : am = S - U : S - a$ dat aequationem fundamentalem ſequentem $aS - a^2 = amS - amU$, ex qua praecipuorum, quae geometricas progreſſiones concernunt, problematum ſolutiones facillime eruuntur, cujusmodi ſunt ſequentia.

§. 147.

PROBL. I. Ex dato termino primo ultimo et exponente invenire ſummam progreſſionis geometricae.

SOL. Ex aequatione fundamentali

$$aS - a^2 = amS - amU$$
$$amU + aS - a^2 = amS$$
$$amU - a^2 = amS - aS$$
$$mU - a = mS - S = (m-1)\,S$$

deducitur: $\frac{mU - a}{m-1} = S.$

Dato termino primo exponente et indice termini ultimi datur $U = am^{n-1}$. Ideo ex aequatione $\frac{mU - a}{m-1} = S$ invenietur ſumma terminorum determinatae cujusdam progreſſionis, ſi tantum terminus primus, exponens et index termini ultimi fuerint dati. Quaerendus nimirum primo erit $U = am^{n-1}$ in numeris, quod commode fieri poteſt ope logarithmorum, quia erit $la + (n-1)\,lm = l.U$. Si valor $U = am^{n-1}$ ſubſtituatur in aequatione $S = \frac{mU - a}{m-1}$ ea ita mutabitur

 S =

$$S = \frac{m \times am^{n-1} - a}{m-1} = \frac{am^n - a}{m-1},$$ ex qua valor ſummæ progreſſionis adhuc brevius in numeris elicitur, quia non opus eſt, ut primo quaeratur terminus ultimus. Notetur tantum, valorem am^n absque ulla difficultate inveniri logarithmorum ope, quia $l.am^n = l.a + n\,l.m$.

PROBL. II. Quemlibet progreſſionis terminum invenire, ſi detur exponens, index termini ultimi et ſumma progreſſionis.

$$S = \frac{am^n - a}{m-1}$$

$$(m-1)S = am^n - a = (m^n - 1)a$$

$$\frac{(m-1)S}{m^n - 1} = a$$

Haec formula dat terminum primum, ex quo invenitur quilibet alius dato ejus indice $= r$, erit enim $= \left(\frac{(m-1)S}{m^n - 1}\right) m^{r-1}$.

Ex aequatione $U = am^{n-1}$ ſimiles problematum ſolutiones eliciuntur, quales ſunt ſequentes.

PROBL. III. Datis in Progreſſione geometrica termino primo et ultimo atque terminorum numero, invenire denominatorem rationis.

SOL. $U = am^{n-1}$, E. $\frac{U}{a} = m^{n-1}$ et $\sqrt[n-1]{\frac{U}{a}} = m$, hæc vero expreſſio in numeris commode invenitur ope logarithmorum, quia $\frac{l.\frac{U}{a}}{n-1} = lm$.

PROBL. IV. Datis in progreſſione geometrica termino primo et ultimo una cum denominatore rationis invenire numerum terminorum.

SOL.

SOL. $U = am^{n-1}$. Ideo $lU = la + nlm - lm$,
Hinc $lU - la + lm = nlm$ et $\frac{lU - la}{lm} + 1 = n$.

§. 148.

Series *interpolari* dicitur, ſi ejus termini aſſignentur, qui reſpondent indicibus fractis vel etiam irrationalibus: Quodſi igitur ſeriei terminus generalis fuerit cognitus, interpolatio nullam habet difficultatem, cum, quicunque numerus loco indicis x ſubſtituatur, iſta expreſſio præbeat terminum reſpondentem. Quare interpolatio ſerierum generatim ab inventione termini generalis pendet. Sic progreſſio arithmetica nullo negotio interpolabitur, ſeu inter duos quoslibet ejus terminorum alii locabuntur, e quibus cum prioribus nova fiat progreſſio arithmetica, quia ejus terminus generalis ex dato termino primo a et differentia terminorum d ſic exprimitur $a + (x - 1) d$. Quare indici $x = \frac{3}{2}$ reſpondet terminus $a + \frac{1}{2} d$, indici $x = \frac{5}{2}$ terminus $a + \frac{3}{2} d$, et ſic porro. Eodem modo ex termino generali cognito ſeries retro continuari poteſt, ſcriptis pro x numeris unitate minoribus ut et numeris negativis. Sic indici $x = \frac{1}{2}$ in progreſſione arithmetica reſpondet terminus $a - \frac{1}{2} d$, indici $x = 0$, terminus $a - d$, ſicque porro. Pari ratione interpolari vel retro continuari poteſt progreſſio geometrica ex termino generali am^{x-1}, ſi loco x numeri fracti vel negativi quicunque ſubſtituantur.

§. 149.

Ejusmodi problemata indederminata arithmetica, in quibus non datæ magnitudinis numeri quærendi proponuntur, ſed datæ alicujus formæ, ut quadrati, cubi, biquadrati, vel ex dignitatibus atque ipſis numeris hoc vel illo modo compoſiti, *problemata Diophantea* ſolent appellari, quia *Diophantus* ejus generis quamplurima dedit ſoluta. In talibus quæſtionibus ſolvendis exemplo-

 rum

rum copia inprimis eſt utilis, quia univerſalis harum ſolutionum via nulla eſt, atque ſpeciales ab Analyſtae pendent ingenio. Nonnunquam unus numerorum immediate elicitur ex altero aſſumto, tanquam datus eſſet aliquando tertius quidam ſumitur, ex quo quæſitorum uterque haberi poteſt per formulam vel æquationem commodam. Atque ſic quoque proceditur, quando duobus plures numeri inveſtigandi ſunt. Difficile non eſt, tales formulas excogitare; ſed prævidere, quænam id, quod per eas quæritur, quam ſimplicisſime exhibeant difficile eſt. Cæterum tanto promtius quis quamlibet quæſtionem expediet, quo plura rei, circa quam ea quæſtio verſatur, attributa prænoverit. Multa hujus rei exempla hic adponere nobis non licet. Cum tamen ejusmodi problemata prorſus negligenda non ſint, quia maximus eorum ſæpe uſus eſt in reſolvendis quæſtionibus Analyſis Sublimioris; ſpeciminis loco adnexa ſunt ſequentia problemata.

§. 150.

PROBL. I. *Datum numerum quadratum in duos quadratos dividere.*

SOL. Si duo quadrati ponantur xx et yy, æquatio $aa = xx + yy$ oſtendit, rem perſici poſſe multis modis ſi numeri irrationales non excludantur. Transpoſitis æquationis terminis, ut fiat $aa - xx = yy$ pariter perſpicitur, quomodo quæſitorum unus ab altero, atque a numero dato pendeat. Sed quadrati proprie dicuntur quorum radices numeri rationales ſunt, atque hæ plerumque integræ deſiderantur, non fractæ. Atque ſi problema ad hos reſtringetur, tum demum alicujus momenti fit. Ad aequationem vero accedere debet alia, quæ numerorum quæſitorum quemvis rationalem reddat, ſi alter rationalis ſumatur. Rationalis autem eſt numerus quicunque ex aliis rationalibus producitur per quascunque operationes arithmeticas, ſi radicum extractio excludatur. Si nimirum x, n et a rationales ſint, et integ-

tegri, erit $nx + a$ vel $nx - a$ neceſſario rationalis et integer. Cum ergo numerus rationalis integer ex alio exprimi poſſit multis modis, ea hic eligetur formula, quae ad aequationem ducat, ex qua facillime perſpicitur, qualis ſumendus ſit numerorum unus, ut alterius forma, fiat ea, quae quaeritur. Sit primus numerorum quaeſitorum x, alter vero, qui dictus fuit y, ſit $nx - a$, notante n numerum pro lubitu ſumendum; erit $aa = xx + nnxx - 2nax + aa$. Ergo $0 = (1+nn)\,xx - 2nax$, vel $(1+nn)\,x = 2na$, et $x = \frac{2na}{1+nn}$. Si jam n rationalis ſumatur, et x rationalis erit, et ideo quoque y. Quis autem n aſſumendus ſit, ut x integer prodeat, ſi quidem aa datus ſit, non ita facile adparet, atque proinde tentaminibus relinquendum erit.

PROBL. II. *Invenire duos numeros quadratos, quorum differentia ſit itidem numerus quadratus*

SOL. Sit ſemiſumma numerorum x, ſemidifferentia y, erunt numeri $x + y$ et $x - y$, quorum quadrati ſunt $xx + 2xy + yy$ et $xx - 2xy + yy$. Horum itaque differentia $4xy$ debet eſſe numerus quadratus, cujus radix non poteſt eſſe numerus impar. Sit itaque $2n$ iſta radix, ut fiat $4xy = 4nn$, erit $xy = nn$; ergo quoque xy quadratus erit. Si itaque quadratus quicunque nn aſſumatur, isque in duos factores reſolvatur, qui ſumendi ſunt pro x et y, poteſt quaeſtioni ſatisfieri.

PROBL. III. *Summam duorum quadratorum in alios duos quadratos ſolvere.*

SOL. Quadrati dati ſunt aa et bb, radices autem quadratorum quaeſitorum $x - a$ et $nx - b$, erunt quadrati quaeſiti $(x - a)^2$ et $(nx - b^2$, atque $xx - 2ax + aa + nnxx - 2nbx + bb = aa + bb$. Ergo $xx - 2ax + nnxx - 2nbx = 0$, vel $x - 2a + nnx - 2nb = 0$, atque $x + nnx = 2nb + 2a$. Ergo $x = \frac{2nb + 2a}{nn + 1}$. Poterit ergo quaeſtioni ſatisfieri quo-

quocunque numero pro n ſumto, modo is non ſit unitas. Poſito enim $n = 1$, fit $x = b + a$. Ideo numerorum quæſitorum is, quis dictus eſt $x - a$ fit b, atque non ſolvitur ſumma quadratorum in quadrata a datis diverſa.

SECTIO XI.

DE SOLVTIONE PROBLEMATVM INDETERMINATORVM GEOMETRICA.

§. 151.

Quodſi problema aliquod indeterminatum propoſitum fuerit geometricum; atque ipſa x repræſentet lineam rectam, etiam functio y repræſentabit lineam rectam, cujus magnitudo pendet ab ipſius x quantitate. v. 230. Quare ſi iſta variabilis x modo ſupra expoſito repræſentetur per lineam rectam indefinitam BC, in qua abſciſſæ AP valores poſitivos et oppoſitae Ap valores negativos ipſius x exprimunt; quodſi præterea per ſingula puncta P vel p ducantur applicatae PM, pm, normales valori functionis y ad ſingulas AP vel Ap aequales, nimirum ſupra rectam BC ſi prodeat y poſitiva, infra rectam BC autem, ſi y inveniatur poſitiva; locus omnium punctorum Mm erit linea quaedam vel recta vel curva in plano anguli APM deſcripta, cujus natura ex functione y ipſius x perfecte cognoſcitur. Quodſi igitur in problemate quodam geometrico locus puncti cujusdam ut M quaerendus proponatur, atque aequatio problematis fundamentalis ſit tantum unica præter y involvens aliam incognitam x, ex qua tanquam data determinanda eſt $y = $ PM; ipſum problema eſt indeterminatum

tum et locus puncti M indeterminatus. Eſt enim is locus integra linea, cujus naturam functio y ipſius x exprimit. Generatim igitur problema indeterminatum geometrice conſtruitur aſſignato communi loco, in quem cadit punctum quæſitum, et qui datur per functionem y variabilis x, ſi huic variabili valor quicunque determinatus tribuatur. Sed is locus non ſemper linea eſt in plano deſcripta et raro recta. Locus ſcilicet puncti plane determinatus punctum eſt, quod ſemper reperitur, ſi problema ſit determinatum. Si indeterminatum ſit problema, locus plerumque eſt linea in dato plano deſcripta, recta vel curva, quia problemata pleraque ad figuras in plano deſcribendas reſtricta ſunt. Poteſt autem locus et ſuperficies eſſe, vel linea duplicis curvaturae, quae in plano deſcribi non poteſt, quales ſunt omnes, quae in ſuperficie ſphaerae deſcribi poſſunt præter circuli, et infinitae aliae. Superficies autem erit locus, ſi verbi gratia quaeratur punctum, quod a dato plano dato intervallo diſtat. Ea enim diſtantia competit cuilibet puncto plani, dato plano ad datum intervallum paralleli. Sic locus puncti, cujus a puncto dato diſtantia datur, eſt ſuperficies ſphaerica, ſiquidem diſtantia illa non ſumenda ſit in plano aliquo dato. Si enim in dato plano ſumenda ſit, locus eſt peripheria circuli.

§. 152.

Quodſi locus puncti aſſignetur in aliqua ſuperficie et præterea in alia, quæ priorem illam ſecat, locus ſit linea, quia ſuperficiei cum ſuperficie nihil commune eſt præter lineam. Si vero locus puncti in duabus lineis detur, quarum una ſecat alteram, locus plane determinatur, punctis linearum infinitis ad unum vel pauca aliquod reductis, in quibus una earum linearum ſecat alteram. Sic *ſi conſtruendum ſit triangulum rectangulum ſuper data linea recta AB, ſic ut angulus rectus lateri illi dato opponatur, atque locus in quem anguli recti apex cadit, ſit quaerendus;* F. 234.

rendus; erit is locus ſemicirculus AMB ſuper datam AB tanquam diametrum deſcriptus. Puncto in peripheria hujus ſemicirculi quocunque aſſumto, ſi ab eo rectae ducantur ad A et B, angulus lateri AB oppoſitus rectus eſt (§.146. *Cor.* 3. *Geom. Elem.*). Problema igitur indeterminatum eſt, et locus puncti quaeſiti indeterminatus, nimirum peripheria AMB, extra quam tamen cadere non poteſt. *Quodſi ſuper data AB conſtruendum ſit triangulum dato quadrato Q aequale, et quaerendus locus, in quem apex anguli baſi AB oppoſiti cadit*; ſola trianguli altitudine opus eſt. Ea autem altitudo ſic reperitur. Si AB bifariam diviſa ſit apud D; erit rectangulum ſub AD et altitudine quaeſita triangulo, quod conſtruendum eſt, hinc et quadrato Q æquale (§. 116. *Geom. Elem.*). Ergo AD ad latus quadrati Q, ut idem hoc latus ad altitudinem quæſitam (§.214. *Cor. Geom. Elem.*). Quodſi hæc altitudo ſit = E, atque ad datam rectam AB ducatur parallela indefinita FG, ab eadem AB intervallo = E diſtans, erit quodlibet triangulum ſuper AB deſcriptum, cujus apex cadit in FG, quadrato Q æquale, atque adeo recta FG locus, qui quaerebatur. *Conſtruendum jam ſit triangulum ſuper AB, de quo duæ iſtæ conditiones ſimul valent*, nimirum primo, ut angulus lateri AB oppoſitus rectus ſit, et ſecundo, ut triangulum æquale ſit quadrato Q, et locus apicis anguli, lateri AB oppoſiti quærendus; atque is locus erit determinatus et problema determinatum. Prima conditio exigit, ut apex trianguli cadat in peripheriam AMB, altera eidem locum aſſignat in recta indefinita FG. Cadet ergo vel in M vel in K, quæ puncta ſola peripheriæ cum recta ſunt communia, et quodlibet triangulorum AMB et AKB et rectangulum erit, et æquale quadrato Q.

§. 153.

Problemata iſta naturam problematis indeterminati ejusque a problemate determinato differentiam ſatis clare oſtendunt, licet ipſæ ſolutiones pure geometricæ ſint,

atque

atque ab algebra ipſa ſubſidii nihil acceperint. Ultimum problema, quod erat determinatum ſolvi poterat reſolutione quæſtionis propoſitæ in alias ſimpliciores, quarum quævis erat quidem indeterminata, ſed tamen ſeorſim ſolvi poterat, et harum ſolutionum conjunctione. Eadem via et algebra incedit, ut ex problematibus paſſim jam propoſitis adparere debuit. Sed loco linearum, quibus geometria ſimpliciores illas quaeſtiones, in quas problema reſolutum eſt, ſeorſim ſolvit, algebra æquationibus utitur, quarum quævis uni vel quibusdam problematis conditionibus; conjunctæ vero omnibus ſatisfaciunt, atque ita quæſitum plane determinant. Id quomodo fiat exemplis iisdem allatis optime declari poteſt. Ultimi problematis erant duæ conditiones atque earum prima hæc erat, Trianguli ſuper AB conſtruendi angulus latero AB oppoſitus debet eſſe rectus. Conſtructum ſit ejusmodi triangulum ſuper AB atque ex apice M ad baſin AB demiſſa perpendicularis MP, erit ex §.205. *Cor. I. Geom. Elem.* AP : PM = PM : PB. Quo igitur huic problematis conditioni ſatisfiat, inveniendus eſt locus puncti M talis, ut demiſſo ex eodem ad datam AB perpendiculari MP eadem ſit media proportionalis inter duo ſegmenta AP et BP rectæ AB. Proinde ſi AP dicatur x, PM $= y$, AB $= a$ atque adeo PB $= a - x$, erit $x : y = y : a - x$, et æquatio uni problematis conditioni ſatisfaciens iſta $yy = ax - xx$, æquatio pro circulo, cujus axis eſt diameter $= a$, et initium abſciſſarum punctum A diametri extremum. Altera problematis ultimi conditio erat iſta: triangulum ſuper AB conſtruendum debet quadrato Q æquale eſſe. Quodſi igitur hujus quadrati latus ponatur $= b$, erit $\frac{1}{2}ay = bb$, vel $y = \frac{2bb}{a}$ æquatio pro linea recta axi ad diſtantiam $\frac{2bb}{a}$ parallela, quae alteri problematis conditioni ſatisfacit. Duæ igitur æquationes $yy = ax - xx$, et $y = \frac{2bb}{a}$ con-

conjunctim ſumtæ problematis illius completam praebent ſolutionem. Si enim ad eandem axem AB et idem initium abſciſſarum A conſtruatur locus puncti M, quem indicat æquatio $yy = ax - xx$, et ſimul locus puncti M per æquationem $y = \frac{2bb}{a}$ expreſſus; interſectionum puncta ſunt illa, quæ quæruntur.

§. 154.

Intelligitur ex his VETERVM theoria de locis geometricis. Etſi enim ex ſupra expoſitis jam pateat, quod locus puncti indeterminatus poſſit eſſe non tantum linea in plano deſcripta, ſed et curva duplicis curvaturæ, quin et ſuperficies, eaque vel plana vel curva; tamen VETERES præcipue tantum lineam in plano deſcriptam et quidem talem, cujus quodlibet punctum æque aptum eſt ad reſolvendum problema geometricum indeterminatum, vocabant *locum geometricum*. Lineam rectam et circulum *locos planos* vocabant. Praeter circulum præcipue curvas interſectione plani cum ſuperficie conica determinatas, ſi planum ſecans baſi coni non parallelum ſit, conſiderare et ipſas has curvas *locos ſolidos* appellare ſolebant. Generatur ſuperficies conica, recta circa punctum
§.235. aliquod extra planum circuli poſitum ita converſa, ut
236. ſemper per peripheriam ejus circuli tranſeat. Recta
237. illa ponitur indefinita, ideo duorum conorum apud verticem oppoſitorum ſuperficies ita ſimul oriuntur, quorum communis eſt axis. Planum autem vel alterutrum horum conorum tantum ſecat, vel utrumque. Si per verticem tranſeat planum ſecans, ſectionem fore angulum aliquem planum rectilineum, ultro patet; circulum autem fore ſectionem, quæcunque fit per planum baſi coni, vel circulo illi, circa quem ſuperficies conica primum deſcriptae eſt, parallelum, demonſtratum eſt §.343. *Geom. Elem.* Iſtæ igitur ſectiones præcipue ſunt conſiderandae, quarum plana neque per verticem tranſeunt,

ne-

neque baſi parallela ſunt. Sit APM planum ſectionis, et HMG planum circuli baſi coni paralleli, quod a plano APM in recta PM ſecatur. Erit PM ſi producatur, una ex chordis circuli HMG. Sit hæc chorda bifariam in puncto P diviſa, atque conus etiam per axem ſuum atque per punctum P ſectus plano CDE, quod planum circuli GMH ſecet in GH. Erit GH circuli diameter chordæ PM perpendicularis (§. [illegible] *Geom. Elem.*). Idem planum CDE etiam planum ſectionis APM ſecabit in AP, quæ vel parallela erit lateri CD *Fig.* [illegible] et curva AM dicetur *Parabola*; vel ſecabit illud verſus coni verticem C productum in I, *Fig.* [illegible] quo caſu curva AM, quæ producitur, *Hyperbola* dicta eſt; vel occurret eidem in oppoſitam partem D producto apud I *Fig.* [illegible] et curva AM, in qua planum APM ſecat conicam ſuperficiem, *Ellipſis* vocabitur. Plures tribus iſtis caſibus eſſe non poſſunt. Recta igitur AP parabolæ in unico tantum puncto A occurrit, Hyperbolae vero et Ellipſi in duobus punctis A et I. Puncta illa, in quibus recta AP producta Sectionem conicam ſecat, dicuntur *vertices* ſectionis, quorum igitur duo ſunt in Hyperbola et Ellipſi, unicum tantum in Parabola. Ipſa recta AP producta, intra vertices Hyperbolæ et Ellipſeos cadens et per unicum parabolæ verticem tranſiens, harum Sectionum *Latus transverſum* vocatur.

§. 155.

Quodcunque planum, ut GMH ſumatur baſi coni parallelum, erit ſemper GMH ſemicirculus et recta MP diametro GH perpendicularis (§. 234. *Cor. I. Geom. Elem.*) quia omnes GH ita productae ut et omnes PM parallelæ ſunt (§. 243. *Geom. Elem.*). Eſt igitur in ſemicirculo $PMq = GP \times PH$. Ponatur $PM = y$, $AP = x$, ſintque AF et IK diametro GH parallelae. Erit in figura [illegible]

$$CF : FA = AP : PH; \text{ ideoque } PH = \frac{FA}{CF} x. \text{ Sed } GP$$

$= FA$,

$= FA$, ergo $PH = \frac{GP}{CF} x$. Hoc valore in $PMq = GP \times PH$ ſubſtituto, erit $yy = \frac{GP^2}{CF} x$. Ideo quadratum ſemiordinatae in Parabola æquale eſt rectangulo ſub abſciſſa et recta conſtante ad CF et GP tertia proportionali, quæ Parabolæ *latus rectum* ſive *parameter* vocatur. Idem igitur parameter eſt tertia proportionalis ad abſciſ- f. 238 ſam x et adplicatam y, quare illud geometrice in parabola invenitur, ducta adplicata quacunque PM, abſciſſa AQ huic adplicatæ PM æquali facta, et per Q ducta recta QN adplicatæ PM parallela. Cum enim, ducta recta AM eaque producta, donec ipſi QN occurrat in N, fiat $AP(x) : PM(y) = AQ(y) : QN$, erit $QN = \frac{yy}{x}$. Ponatur $QN = p$, erit $p = \frac{yy}{x}$, vel $yy = px$ æquatio exprimens naturam parabolæ abſciſſis ſuper latus transverſum et vertice A tanquam initio computatis.

§. 156.

formulae pro hyperbola et ellipsi.

In Hyperbola et Ellipſi *Fig.* 236 et 237. eſt $AI : AP = IK : PH$, et $AI : PI = AF : PG$. Quare eſt $PH = \frac{IK \times AP}{AI}$ et $PG = \frac{AF \times PI}{AI}$. Quodſi igitur ponatur $AP = x$, $PM = y$, $AI = a$, fiat in Hyperbola $PI = a + x$ et in Ellipſi $PI = a - x$. His valoribus ſubſtitutis in $PMq = PG \times PH$ fiet $yy = \frac{IK \times AF}{a} \times \frac{ax + xx}{a} = \frac{IK \times AF}{a} x + \frac{IK \times AF}{a} \cdot \frac{xx}{a}$ et quidem in hyperbola; in ellipſi vero eſt $yy = \frac{IK \times AF}{a} \times \frac{ax - xx}{a} = \frac{IK \times AF}{a}$

x —

$x - \frac{IK \times AF}{a} \cdot \frac{xx}{a}$. Proinde in hyperbola eſt quadratum adplicatæ y æquale rectangulo ex recta quadam conſtante, quæ ad rectas AI, IK et AF eſt quarta proportionalis, in abſciſſam, una cum alio rectangulo ex eadem abſciſſam in quartam proportionalem ad latus transverſum AI, conſtantem $\frac{IK \times AF}{a}$ et abſciſſam. In Ellipſi vero quadratum ſemiordinatæ y eſt æquale differentiæ eorundem rectangulorum. Quodſi ideo conſtans illa $\frac{IK \times AF}{a}$, quæ harum ſectionum *parameter* ſeu *latus rectum* dicitur, ponatur $= p$, erit $yy = px \pm \frac{pxx}{a}$ aequatio generalis pro ellipſi et hyperbola, abſciſſis ſuper latus transverſum a vertice tanquam initio computatis et angulo coordinatarum recto, in qua æquatione ſigni ambigui $\pm$ ſuperius pro hyperbola et inferius pro ellipſi valet. Terminis illius æquationis legitime transpoſitis fit $p = \frac{ayy}{x(a \pm x)}$. Ideo latus rectum in hyperbola et ellipſi data geometrice inveniri poteſt ſequentem in modum. Ducatur ſemiordinata rectangula quæcunque MP ad latus transverſum, et capiatur AQ = PM, quo facto, ſi per Q ducatur QN ipſi PM parallela, occurrens rectae AM in N, erit AP(x) : PM(y) = AQ(y) : QN $= \frac{yy}{x}$. Prolongetur PM in R ita, ut ſit PR = QN $= \frac{yy}{x}$. Per puncta I et R ducatur recta occurrens rectae AS per verticem applicatæ PM parallelam ductæ in puncto S, eritque IP($a \pm x$) : PR F. 238. 239.

: PR $\left(\frac{yy}{x}\right)$ = IA (a) : AS. Quare eſt AS $= \frac{ayy}{x(a \pm x)}$ parameter ſectionis quæſitus.

§. 157.

Tres iſtæ æquationes pro ſectionibus conicis.

convenientia et differentia iſtarum æquationum.

$$yy = px$$

$$yy = px + \frac{pxx}{a}$$

$$yy = px - \frac{pxx}{a}$$

non differunt niſi poſitione et magnitudine lateris transverſi $a =$ AI. Si enim in ellipſi hoc latus transverſum poſitum fuerit affirmativum, in hyperbola illud negativum evadit, quia cadit ad partem oppoſitam. Scripto autem in aequatione $yy = px - \frac{pxx}{a}$ loco $+ a$ jam $- a$ fit $yy = px + \frac{pxx}{a}$, quæ eſt aequatio pro hyperbola. Poterat vero $+ a$ poſitiva in ſtatum oppoſitum $- a$ non pervenire, niſi angulo GPI inclinationis plani ſectionis AMI ad planum circuli GMH baſi paralleli ſenſim creſcente, in caſu quo GPI fit angulus rectus, latus transverſum AI cum coni latere CD parallelum adeoque infinitum evadat. Tum vero ellipſis degenerat in parabolam, et ſimul æquatio $yy = px - \frac{pxx}{a}$, ſi $a = \infty$ fit $yy = px$. Quin et expreſſio parametri $\frac{ayy}{x(a+x)}$ quia jam $a = \infty$, mutatur in ſequentem $\frac{yy}{x}$.

§. 158

§. 158.

Conſiderabimus nunc planum ſectionis conicæ ſolitarium et veluti cono exemptum, atque ex æquatione pro qualibet harum ſectionum deducemus palmarias quasdam harum curvarum proprietates. Ac primo quidem æquatio pro hyperbolis et ellipſi $ayy = pax \pm pxx$ ſequentem dat analogiam $yy : ax + xx = p : a$. Sed eſt $ax \pm xx = x(a \pm x) =$ rectangulo ſub abſciſſis AP et IP, proinde in hyperbolis et ellipſi eſt *quadratum ſemiordinatæ ad rectangulum ſub abſciſſis reſpondentibus, ut parameter ad latus transverſum.* Quodſi latus ellipſeos transverſum AB biſſectum intelligatur apud C, atque per C ducatur ordinatim applicata orthogonalis DE, dicitur punctum C ellipſeos *centrum*, atque ED *latus conjugatum*, ſive *axis conjugatus*. Loco parametri in æquationem ellipſeos introduci poteſt hæc conſtans DE, quo facto eadem aliam recipit formam, quae commodiorem nonnunquam reddit calculum. Eum in finem ponamus nunc $AC = CB = a$ et $CD = CE = b$, ut jam ſit $AB = 2a$, et æquatio ellipſis nunc erit $yy = px - \frac{pxx}{2a}$, atque cum poſito $x = AC = a$, fiat $y = \sqrt{\tfrac{1}{2}pa} = CE$, ponatur $CE = b$, et fiet $bb = \tfrac{1}{2}pa$, hincque $p = \frac{2bb}{a}$. Subſtituto hoc valore pro p, habemus pro ellipſi æquationem ſequentem $yy = \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx$. F. 238. 239. F. 240.

formulae pro ellipſi abſciſſis a centro computatis axe conjugato introducto

Aequatio $bb = pa - \frac{paa}{2a}$, vel $2abb = 2paa - paa$ ſequentem præbet analogiam $p : 2a = bb : aa$, id eſt, *parameter ellipſeos eſt ad latus transverſum, ut quadratum ſemiaxis conjugati ad quadratum ſemilateris transverſi.* Ipſa haec analogia cum præcedente §156 comparata dat tertiam: quadratum ſemiordinatæ yy eſt ad rectangu-

 lum

i.e. $p : 2a = b^2 : a^2$

$p = \frac{2ay^2}{x(2a-x)}$ §156.

Hinc $\frac{2ay^2}{x(2a-x)} : 2a = b^2 : a^2$. i.e. $y^2 : x(2a-x) = b^2 : a^2$

lum ſub abſciſſis reſpondentibus $x(2a-x)$ ut quadratum ſemiaxis conjugati bb ad quadratum ſemiaxis transverſi aa. Multiplicatis mediis et extremis habebitur ipſa illa æquatio $aayy = (2ax - xx)bb$, vel $yy = \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx$. Denique ex æquatione $p = \frac{2bb}{a} = \frac{4bb}{2a}$ deducitur $2a : 2b = 2b : p$, proinde *parameter ellipſeos eſt tertia proportionalis ad axem transverſum et conjugatum; et axis conjugatus inter transverſum axem et parametrum proportione media.*

§. 159.

F. 239. Latus hyperbolarum transverſum AI inſtar lateris transverſi ellipſeos biſſectum quidem intelligi poteſt in puncto C, quod et hic *centrum hyperbolarum* dicitur; ſed vero ſi per hoc punctum duci intelligatur ordinata rectangula, haec nusquam hyperbolis occurrere poteſt, ideo hyperbolae non iſtar ellipſeos habebunt axem conjugatum. Idem et ex æquatione $yy = px + \frac{pxx}{2a}$ pro hyperbolis eruitur. Ponendo enim $x = -a$, habemus $y = \sqrt{-\frac{1}{2}pa}$, quae eſt quantitas imaginaria. Sit haec quantitas $\sqrt{-\frac{1}{2}pa} = b\sqrt{-1}$, atque exinde concludetur $-\frac{1}{2}pa = -bb$, vel $\frac{1}{2}pa = bb$, unde in hyperbola quoque eſt $p = \frac{2bb}{a}$, et ſubſtituto hoc valore fit æquatio pro hyperbolis $yy = \frac{2bb}{a}x + \frac{bb}{aa}xx$, quæ quidem ex aequatione pro ellipſi $yy\ \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx$ poterat elici loco $+bb$ ſcribendo $-bb$, atque ideo erit $yy = \frac{2bb}{a}x \pm \frac{bb}{aa}xx$ aequatio generalis pro ellipſi et hyper-

bolis

bolis, in qua ſigni dubii $\pm$ ſuperius pro hyperbolis inferius vero pro ellipſi valet. Quodſi abſciſſæ a centro C tanquam initio computentur in ellipſi et hyperbolis, ita ut non amplius AP ſit abſciſſa, ſed CP, in ellipſi ſit $AP = a - x$, et in hyperbolis $AP = x - a$, quare ſi in æquatione $yy = \frac{2bb}{a}x + \frac{bb}{aa}xx$ loco x ſcribatur $x - a$, erit $yy = \frac{2bb}{a}(x-a) + \frac{bb}{aa}(x-a)^2 = \frac{2bb}{a}x - 2bb + \frac{bb}{aa}xx - \frac{2bb}{a}x + bb = -bb + \frac{bb}{aa}xx$, æquatio pro hyperbolis: ſi vero in æquatione $yy = \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx$ ſcribatur $a - x$ loco x, fiet $yy = \frac{2bb}{a}(a-x) - \frac{bb}{aa}(a-x)^2 = 2bb - \frac{2bb}{a}x - bb + \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx = bb - \frac{bb}{aa}xx$, æquatio pro ellipſi abſciſſis in axe transverſo a centro computatis. Aequatio pro hyperbola introducendo parametrum ſit $yy = -\frac{1}{2}ap + \frac{p}{2a}xx$; atque aequatio pro ellipſi facta hac ſubſtitutione ſic mutatur $yy = \frac{1}{2}ap - \frac{p}{2a}xx$.

formulae pro hyperbola et ellipſi abſciſſis ex centro computatis ſuper axe transverso.

introducendo parametrum.

§. 160.

Si abſciſſae a centro in axe conjugato computentur, atque ponatur $CG = x$ et $GM = y$, ex æquatione pro ellipſi ſit $aaxx = aabb - bbyy$, vel $bbyy = aabb - aaxx$, et $yy = aa - \frac{aa}{bb}xx = \frac{aa}{bb}(bb - xx)$. Eadem permutatione coordinatarum facta ex æquatione pro hyper-

Si abſciſſae ex centro in axe coniugato computentur.

bola fit $yy = \frac{aa}{bb}(-bb + xx)$. Tertia proportionalis ad latus conjugatum et latus transverſum hic quoque vocatur *parameter lateris* ſive *axis conjugati*. Fit vero ex analogia $2b : 2a = 2a : \frac{2aa}{b}$, iſte parameter $= \frac{2aa}{b}$, qui ſi dicatur q, erit $q = \frac{2aa}{b}$ et $\frac{q}{2b} = \frac{aa}{bb}$. Introducendo itaque parametrum axis conjugati, aequationes inventae pro ellipſi et hyperbola ſic mutantur $yy = \frac{q}{2b}(bb - xx)$ atque $yy = \frac{q}{2b}(-bb + xx)$, vel $yy = \frac{qb}{2} - \frac{q}{2b}xx$, atque $yy = -\frac{qb}{2} + \frac{q}{2b}xx$, unde fluunt proprietates ſemiordinatarum, ſuper axe conjugato ſumtis abſciſſis, prorſus ſimiles iis, quae de ſemiordinatis lateris transverſi ſunt demonſtratae.

§. 161.

De inveniendis focis in tribus sectionibus conicis. 1) in Ellipsi.

Focus ſectionis conicae eſt punctum axis, in quo ſemiordinata aequalis eſt ſemilateri recto. Ad hoc punctum primo in Ellipſi inveniendum, ponatur $y = \frac{1}{2}p$, ut ſit $\frac{1}{4}pp = px - \frac{pxx}{2a}$, et ex hac aequatione concluditur, eſſe $\frac{1}{2}app = 2apx - pxx$, ſive $xx - 2ax = -\frac{1}{2}ap$, hincque $xx - 2ax + aa = aa - \frac{1}{2}ap$, $x - a = \pm \sqrt{(aa - \frac{1}{2}ap)}$, et $x = a \pm \sqrt{(aa - \frac{1}{2}ap)}$. Ellipſis igitur duplicem habet focum, unum in diſtantia $a - \sqrt{(aa - \frac{1}{2}ap)}$ et alterum in diſtantia $a + \sqrt{(aa - \frac{1}{2}ap)}$ a vertice. Eadem formula ſimul indicat diſtantiam utriusque foci a centro. Quilibet enim focus a centro diſtantia $\sqrt{(aa - \frac{1}{2}ap)}$, ſeu ponendo $\frac{2bb}{a}$ loco p, diſtantia

tia

tia $\surd(aa-bb)$ removetur. Data igitur ellipſi cum latere transverſo inveniri poſſunt foci, ſi per centrum C ducatur axis conjungatus DE, atque ex uno ipſius puncto extremo radio $a = AC$ deſcribatur circulus, qui ſecabit latus transverſum AB in F et f, atque haec puncta erunt foci. Quia enim jam eſt $CF = Cf = \surd(aa-bb)$, fit $AF = a-\surd(aa-bb)$ et $Af = a+\surd(aa-bb)$. Quodſi in hyperbola ponamus $y = \frac{1}{2}p$ habemus $\frac{1}{4}pp = px + \frac{pxx}{2a}$, et proinde $xx + 2ax + aa = aa + \frac{1}{2}ap$, ex qua aequatione deducitur $x = -a \pm \surd(aa + \frac{1}{2}ap) = -a \pm \surd(aa+bb)$. Hinc et hyperbolae duplicem habent focum, qui invenitur ducta CD per centrum C ad axem hyperbolae transverſum normali, et capiendo $CD = CE = \surd + \frac{1}{2}pa$ quae erit ad $\frac{1}{2}p$ et AC tertia proportionalis. His ita praeparatis erit $AD = \surd(aa+bb)$. Quodſi igitur ex C tanquam centro radio $= AD$ deſcribatur circulus latus hyperbolarum transverſum ſecans in F et f, erunt F et f foci quaeſiti, quia jam $AF = AC + CF = -a + \surd(aa+bb)$ et $Af = -AC - Cf = -a - \surd(aa+bb)$. Quod denique attinet ad parabolam, ſi in aequatione $yy = px$ loco y ponatur $\frac{1}{2}p$, invenitur $\frac{1}{4}pp = px$, adeoque $x = \frac{1}{4}p$. Parabola igitur unicum tantum habet focum a vertice intervallo $\frac{1}{4}p$ diſtantem. F.240.

§. 162.

Ex quolibet ellipſis foco F et f ad idem curvae punctum M ducantur rectae FM et fM: eritque $FM^2 = (CF-CP)^2 + PM^2$, atque $fM^2 = (fC+CP)^2 + PM^2$. Abſciſſis igitur a centro in axe transverſo computatis, poſitis $CP = x$, $PM = y$ et $CF = Cf = f$; erit $FM^2 = ff - 2fx + xx + yy$, atque $fM^2 = ff + 2fx + xx + yy$, id eſt, valore ipſius yy ſubſtituto $FM^2 = ff - 2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$ et $fM^2 = ff + 2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$. Eſt vero

ro $xx - \frac{bbxx}{aa} = \frac{aaxx}{aa} - \frac{bbxx}{aa} = \frac{(aa-bb)xx}{aa}$; proinde $FM^2 = ff - 2fx + bb + \frac{(aa-bb)xx}{aa}$ et $fM^2 = ff + 2fx + bb + \frac{(aa-bb)xx}{aa}$. Denique eſt $f = \sqrt{(aa-bb)}$; ideo $FM^2 = aa - 2x\sqrt{(aa-bb)} + \frac{(aa-bb)xx}{aa}$ et $fM^2 = aa + 2x\sqrt{(aa-bb)} + \frac{(aa-bb)xx}{aa}$. Unde concluditur $FM = a - \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$ atque $fM = a + \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$. Summa itaque harum rectarum $FM + fM$ eſt $= 2a =$ axi tranſverſo. Ex qua focorum inſigni proprietate modus facilis ellipſin mechanice deſcribendi colligitur. Pro hyperbola (fig. 239.) eſt $CF = Cf = \sqrt{(aa+bb)}$ et $yy = -bb + \frac{bbxx}{aa}$. Hinc ſimili calculo invenitur $FM = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} - a$, et $fM = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} + a$. Ideo in hyperbola eſt $fM - FM = 2a =$ axi tranſverſo.

§. 163.

Praeter conicas ſectiones nonnullae aliae quidem curvae conſideratae fuerunt ab *Antiquis Geometriae Doctoribus* ab ipſis *loca linearia* vocatae. Recentiores vero Geometrae, poſtquam Analyſis Mathematica adeo felici ſucceſſu ad Geometriam fuit applicata, non tantum ipſa Veterum in Geometria curvarum inventa demonſtrarunt facilius, ſed et novis iisque admiratione maxima dignis eandem locupletati ſunt

ſunt inventis. Supra jam vidimus, quod omnis aequatio algebraica inter variabiles x et y repraeſentet curvam aliquam continuam, ſeu cum *Antiquis* loquendo, locum aliquem geometricum, problemati cuidam geometrico indeterminato conſtruendo inſervientem. Algebraicae autem aequationes diſtribuuntur in ordines ſecundum numerum dimenſionum maximae poteſtatis incognitae. Ideo loco diviſionis locorum geometricorum in planos ſolidos et lineares Recentiores Geometrae locos geometricos ſeu curvas continuas in plano deſcriptas diſtribuunt in diverſos ordines ſecundum ordinem aequationis curvae naturam exprimentis. In ordinibus vero aequationum, quibus lineae algebraicae exprimuntur, conſtituendis unaquaeque variabilis cenſetur unam dimenſionem conſtituere. Sic quadratum uniuscujusque atque productum ex duabus duas, productum ex tribus variabilibus ſive iisdem ſive diverſis habet tres dimenſiones, et ſic porro. (§. 121.) Proinde aequatio dicitur *primi ordinis*, quae ſi pro y ubique ſcribatur x, vel y pro x fit aequatio determinata primi ordinis; aequatio ſecundi ordinis vocatur, quae ſimili ſubſtitutione fit aequatio determinata ſecundi ordinis, et ita porro. Linea vero per aequationem primi ordinis definita et ipſa *linea primi ordinis*, ſeu *locus geometricus primi ordinis*; linea per aequationem ſecundi ordinis definita *linea* vel *locus ſecundi ordinis* dicitur, et reliquae eodem modo diſtribuuntur.

§. 164.

Aequatio igitur indeterminata primi ordinis erit, in qua praeter terminum conſtantem α inſunt βx et γy vel conjunctim, vel ſeorſim. Secundi ordinis aequatio praeter conſtantem α et βx, γy, continebit δx^2, εxy, ζy^2 vel conjunctim, vel aliquem horum terminorum aut aliquos ſeorſim. Tertii ordinis aequatio eadem continere poterit, quae admittit aequatio ordinis ſecundi, habebit autem praeterea horum terminorum ηx^3, $\vartheta x^2 y$,

ιxy^2, κy^3, vel unum, vel aliquos, vel omnes. Proinde ſi quantitates iſtae ordine ſequente ſcribantur:

I. α
II. βx, γy
III δx^2, εxy, ζy^2
IV. ηx^3, $\vartheta x^2 y$, ιxy^2, κy^3
V. λx^4, $\mu x^3 y$, $\nu x^2 y^2$, ρxy^3, σy^4

aequatio indeterminata primi ordinis neceſſario continebit aliquas quantitates ſeriei II, aequatio ſecundi ordinis aliquam vel aliquas quantitates ſeriei III habebit, aequatio ordinis tertii aliquam vel aliquas quantitates vel omnes ex ſerie IV, et ita porro. Quaelibet etiam ex antecedentibus ſeriebus quantitates quaſcunque adſciſcere poterit, ſed nullam ex conſequentibus. Poſſunt itaque termini aequationis duarum variabilium indeterminatae ordinari modo ſequenti

$$\alpha$$
$$\beta x \mid \gamma y$$
$$\delta x^2 \mid \varepsilon xy \mid \zeta y^2$$
$$\eta x^3 \mid \vartheta x^2 y \mid \iota xy^2 \mid \kappa y^3$$
$$\lambda x^4 \mid \mu x^3 y \mid \nu x^2 y^2 \mid \rho xy^3 \mid \sigma x^4$$

etc. etc.

per modum *trianguli*, quod *analyticum* vocatur, ubi omnes termini in ſerie horizontali habent easdem dimenſiones. Poſſunt quoque cum Neutono ordinari per modum *parallelogrammi*,

α	βx	δx^2	ηx^3	λx^4	etc.
γy	εxy	$\vartheta x^2 y$	$\beta x^3 y$	$\tau x^4 y$	etc.
ζy^2	ιxy^2	$\nu x^2 y^2$	$\varphi x^3 y^2$	$\chi x^4 y^2$	etc.
κy^3	ρxy^3	$\psi x^2 y^3$	$\omega x^3 y^3$	$\xi x^4 y^3$	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	ete.	etc.

quod

quod pariter *analyticum* dici ſolet, ubi in quavis ſerie verticali collocati ſunt termini, in quibus x eandem habet dimenſionem. Trianguli figura præſtat fere præ parallelogrammi figura. Optime enim dividitur æquatio in ſeries, prouti in triangulo analytico horizontales ſeinvicem excipiunt, quarum quælibet *membrum* æquationis vocari poteſt, atque tum ipſa hæc membra, quia ſunt functiones homogeneae duarum variabilium x et y ſecundum numerum dimenſionum a ſe invicem diſtingui poſſunt. Cæterum in omni linea algebraica per aequationem expreſſa data ſupponuntur 1. abſciſſarum initium, 2. poſitio axis, 3. angulus coordinatarum; ſi manente eadem linea aliquod horum vel duo, vel omnia mutentur, alias atque alias pro eadem linea æquationes prodire neceſſe eſt, cujus rei ſpecimina eaque faciliora ſupra jam vidimus. Easdem vero mutationes, quas ſubit æquatio pro linea algebraica, ſi referatur ad alias coordinatas diſtinctius jam conſiderare juvabit. Pro linea in poſterum ſæpe curva nominabitur, quamvis rectam quoque intelligere liceat, quia curvarum numerus multo potior eſt, rectæ autem et absque iis, quae curvarum declarationi inſerviunt, facile intelliguntur.

§. 165.

Quodſi igitur data ſit æquatio quæcunque inter x et y, per quam, ſumta recta BC pro axe et puncto A pro initio abſciſſarum, ita ut x denotet abſciſſam AP et y applicatam orthogonalem PM, exprimitur natura curvæ DM; retineamus primo eundem axem BC, at aliud punctum D in eodem aſſumamus pro initio abſciſſarum; ita ut nunc puncto curvæ M reſpondeat abſciſſa DP, quæ ponatur $= t$, et applicata manebit eadem PM, quæ ante. Ponatur intervallum AD $= f$, quod ab A ſiniſtrorſum in regionem abſciſſarum negativarum cadat, eritque DP $= x + f = t$, ideoque $x = t - f$. Quare ſi in æquatione inter x et y data ubique loco x ſubſtituatur

F.242. Aequationum Algebr. indeterminatarum expressio per lineas coordinatas 1) rectangulas

tur $t-f$, prodibit aequatio inter variabiles t et y, quae eandem lineam curvam exhibebit. Quodſi novum initium abſciſſarum dextrorſum ab A fuerit remotum uti in d, atque nunc etiam ponatur $Pd = t$, et $Ad = f$, erit $Pd = t = x - f$, hincque $x = t + f$, qui eſt valor pro x in curvae aequatione ſubſtituendus, ut prodeat aequatio inter variabiles t et y eandem curvam definiens. Initium ergo abſciſſarum retento axe mutabitur, ſi abſciſſa x determinata quantitate augeatur vel minuatur, adeoque x ponatur $= t \pm f$, ubi f erit quantitas affirmativa, ſi novum abſciſſarum initium ſiniſtrorſum ab A fuerit remotum; quantitas vero negativa, ſi novum initium abſciſſarum ad dextram ipſius A fuerit ſitum.

§. 166.

F.242. Aſſumamus jam alium axem bc priori parallelum, in eoque punctum quodcunque D pro abſciſſarum initio. Cadat iſte axis in regionem applicatarum negativarum, ſitque ejus a priori diſtantia $AF = g$, atque ponatur intervallum $FD = AG = f$. Quodſi igitur in hoc novo axe ſit abſciſſa curvae puncto M reſpondens $DQ = t$, et applicata $QM = u$; erit $DQ = t = DF + FQ = x + f$, et $QM = u = PQ + PM = g + y$. Unde concluditur $x = t - f$ et $y = u - g$. Quare ſi in aequatione data inter x et y ſubſtituatur ubique $t - f$ loco x et $u - g$ loco y, orietur aequatio inter variabiles t et u ejusdem curvae naturam exprimens. Quando punctum D dextrorſum ab F fuerit remotum, erit $DQ = t = x - f$, adeoque $x = t + f$. Quando vero novus axis bc in regionem applicatarum poſitivarum caderet, haberemus $QM = y - g = u$, hincque $y = u + g$. Innuberabiles igitur jam formari poſſunt aequationes diverſae, quae tamen omnes ejusdem lineae curvae naturam exprimunt.

§. 167.

F.243. Quodſi novus axis bc priorem BC ſecet in ipſo initio abſciſſarum A et quidem ad angulus rectos, ita ut pro

utro-

utroque idem punctum. A ſit initium abſciſſarum; ex curvæ puncto M in novum axem bc ducatur perpendicularis MQ, et vocetur nova abſciſſa $AQ = t$, applicata nova $QM = u$, eritque $t = y$, et $u = x$, quia APMQ eſt parallelogrammum rectangulum. Hinc ex æquatione inter AP (x) et PM (y) data formabitur æquatio inter AQ (t) et QM (u) ponendo u loco x, et t loco y. Prior ergo abſciſſa x abit in applicatam u, et prior applicata y nunc fit abſciſſa t. Pro iſto itaque novo axe nulla alia æquationi variatio inducitur, niſi quod coordinatæ x et y inter ſe commutentur. Perinde eſt, utrum novi axis portio Ac abſciſſas affirmativas et ideo portio Ab abſciſſas negativas exhibere ponatur, an vero contrarium ſtatuatur. Perinde quoque eſt, ad quam partem axis bc ſtatuatur regio adplicatarum poſitivarum. Si axis portio Ac abſciſſis poſitivis deſtinetur, erit $AQ = -t$, ſicque in aequatione inter x et y loco y poni debet $-t$. Deinde ſi ſupra axem bc regio applicatarum negativarum ſtatuatur, fiet $QM = -u$, atque pro x ſcribendum erit $-u$.

§. 163.

Sit angulus, ſub quo novus axis bc priorem BC F. 244.
ſecat, obliquus quicunque, atque interſectio fiat in puncto A, quod in utroque axe ſit abſciſſarum initium. Præterea data ſit æquatio quæcunque pro curva LM relata ad axem BC inter abſciſſam $AP = x$ et applicatam $PM = y$, ex qua reperiri debeat æquatio pro eadem curva ad axem bc relata, ſeu ex curvæ puncto M ad novum axem demiſſo perpendiculo MQ, inter abſciſſam novam $AQ = t$ et applicatam $MQ = u$. Sit angulus $CAc = q$, et ex P ducantur normales Pp et Pq in novas coordinatas, eritque ob $AP = x$, $Pp = x \sin q$, $Ap = x \cos. q$, poſito radio $= 1$, quod ſemper fieri ſolet (§. 38.). Deinde in triangulis PMR et AQR eſt angulus $MPR = AQR$, $ARQ = PRM$, ideoque $PMR = RAQ$ vel $CAc = q$, proinde $Pq = Qp = y \sin q$, et $Mq = y \cos. q$. Ex his concluditur AQ

$= t$

$= t = Ap - Qp = x\,coſ.\,q - y\,ſin.\,q$, et $QM = Mq + Pp = x\,ſin.\,q + y\,coſ.\,q$. Ponatur $ſin.\,q = m$ et $coſ.\,q = n$, erit $t = nx - my$; et $u = mx + ny$, et ex his concluditur $nt + mu = nnx + mmx = x$ et $nu - mt = nny + mmy = y$ (§. 39.). Reperitur igitur æquatio quæſita inter t et u, ſi in æquatione inter x et y propoſita ubique loco x ſcribatur $mu + nt$, et $nu - mt$ loco y, ſi nimirum axis portio Ac abſciſſas affirmativas contineat, et applicatae affirmativæ in regionem QM cadant. Angulus CAc in figura noſtra cadit in regionem applicatarum negativarum. Quodſi is caderet ſupra AC ipſe angulus q negativus ac propterea ejus ſinus m negative accipi deberet.

§. 169.

F. 245. Quodſi denique novus axis bc habeat poſitionem quamcunque, in eoque ſumtum ſit punctum D quodcunque pro initio abſciſſarum; demittatur ex quovis curvæ puncto M in novum axem bc perpendiculum MQ, et vocetur abſciſſa $DQ = t$, applicata $QM = u$. Præterea ex novo abſciſſarum initio D in axem priorem BC ducatur perpendicularis DG, ac ponatur $AG = f$ et $DG = g$, tum vero per D ducatur Dc axi priori Bc parallela, cui prior applicata MP producta occurrat in O; et erit $MO = y + g$, $DO = GP = x + f$. Denique ponatur angulus $ODQ = q$, ejus ſinus $= m$ et coſinus $= n$ poſito radio $= 1$, atque ex puncto O ducantur tam in novum axem bc, quam in applicatam MQ normales Op et Oq; erit angulus $OMQ = ODQ = q$, $Op = Qq = (x + f)\,ſin.\,q = mx + mf$ et $Dp = (x + f)\,coſ.\,q = nx + nf$, præterea $Oq = Qp = (y + g)\,ſin.\,q = my + mg$ et $Mq = (y + g)\,coſ.\,q = ny + ng$. Ex his colligitur $DQ = t = nx + nf - my - mg$ et $QM = u = mx + mf + ny + ng$, et ex his porro $x = mu + nt - f$ et $y = nu - mt - g$. Si igitur hi valores in æquatione inter x et y data ſubſtituantur, prodibit æquatio inter t et u eandem curvam LM exprimens. Quoniam nullus excogitari

poteſt

poteſt axis bc, qui non in hac poſtrema determinatione continetur; pro eadem quoque curva LM nulla exiſtet æquatio inter coordinatas orthogonales, quæ non in hac æquatione inter t et u inventa comprehendatur. Hæc eſt ratio, cur iſta æquatio inter t et u vocari ſolet æquatio generalis pro curva LM, quoniam ea in ſe complectitur omnes omnino æquationes, quæ ad eandem lineam curvam pertinent.

§. 170.

Aſſumſimus huc uſque, coordinatas, quibus natura curvæ definitur inter ſe eſſe normales. Data vero ſit pro curva LM æquatio inter coordinatas rectangulas $AP = x$ et $PM = y$, et quæri poterit, retento axe BC et abſciſſarum initio A eodem, æquatio inter coordinatas obliquangulas quaſcunque. Ex puncto enim M ad axem BC ducatur recta MQ ſub angulo quocunque MQA, qui ſit $= \varphi$, ejus ſinus $= \mu$ et coſinus $= \nu$. Jam erit AQ nova abſciſſa et QM nova adplicata. Poſito igitur $AQ = t$ et $QM = u$ erit in triangulo rectangulo PMQ $\frac{y}{u} = \mu$ et $\frac{PQ}{u} = \nu = \frac{t - x}{u}$. Proinde fiet $u = \frac{y}{\mu}$ et $t = \nu u + x = \frac{\nu y}{\mu} + x$, et viciſſim $y = \mu u$ et $x = t - \nu u$. Quare ſi in æquatione inter x et y propoſita ponatur $x = t - \nu u$ et $y = \mu u$ prodibit æquatio inter coordinatas obliquangulas t et u, quæ inter ſe datum angulum φ conſtituunt. Quodſi autem data fuerit pro curva LM æquatio inter coordinatas obliquangulas AQ et QM, ex ea viciſſim reperietur æquatio pro eadem curva inter coordinatas orthogonales AP et PM. Si enim φ ſit angulus, quem applicatæ MQ cum abſciſſis AQ conſtituunt, cujus ſinus $= \mu$ et coſinus $= \nu$, dataque ſit aequatio inter $AQ = t$ et $QM = u$; ex M ducatur ad axem applicata normalis MP, et poſita abſciſſa F.246. 2) obliquangulas.

AP

AP $= x$, et applicata PM $= y$, erit $u = \frac{y}{\mu}$ et $t = \frac{\nu y}{\mu} + x$. Quare ſi valores iſti in æquatione inter t et u propoſita ſubſtituantur, prodibit æquatio inter x et y, quam quærebamus.

§. 171.

F. 247. Ex his omnibus conjunctim ſumtis perſpicitur, quod data aequatione inter coordinatas orthogonales AP $= x$ et PM $= y$ pro curva LM, ex illa *æquatio generaliſſima* pro eadem linea curva ad quamcunque axem et abſciſſarum initium ſub angulo coordinatarum quocunque relata poſſit inveniri. Sumatur enim recta quæcunque *bc* pro axe et in eo punctum D pro initio abſciſſarum; adplicata vero MT ad hunc axem ductae cum axe comprehendant angulum quemcunque DTM $= \varphi$, cujus ſinus ſit $= \mu$ et coſinus $= \nu$, ita ut ſit DT nova abſciſſa $= r$ et TM nova applicata $= s$. Ex D in axem priorem BC ducatur perpendicularis DG et ponatur AG $= f$, DG $= g$. Ducatur DO axi BC parallela, ſitque anguli OD*c* ſinus $= m$ et coſinus $= n$. Ex M ad axem novum *bc* ducatur normalis MQ, et ponatur DQ $= t$, QM $= u$. Erit igitur primo $t = r - \nu s$ et $u = \mu s$. Deinde vero eſt $x = mu + nt - f$ et $y = nu - mt - g$. Hinc fiet $x = nr - (n\nu - m\mu)s - f$ et $y = -mr + (\mu n + \nu m)s - g$. Proinde ſi in æquatione inter x et y ſubſtituantur valores inventi, reperietur æquatio inter coordinatas obliquangulas r et s, quæ erit æquatio generaliſſima pro curva LM. cf. Euleri Introductio. T.I. C.II. De coordinatarum permutatione.

§. 172.

Patet igitur generaliter, quod duæ æquationes propoſitæ, una inter variabiles x et y, et altera inter variabiles t et u vel r et s, diverſas curvas non definiant, ſi una earum mutari poſſit in alteram, ſubſtitutis pro x et y valoribus, quos huc uſque elicuimus. Conſideranti

ti autem has mutationum formulas ſtatim innoteſcit, *Diſtributio linearum in ordines.*
per nullam illarum mutari poſſe ordinem æquationis, per quam linea exprimitur, vel ipſius lineæ ordinem. In nulla enim formularum novæ variabiles t et u vel r et s ultra primam dignitatem aſcendunt, quare non tantum æquatio generalis ſed et aequatio generaliſſima pro eadem linea ejusdem eſt ordinis, cujus erat æquatio propoſita inter x et y. Quomodocunque igitur aequatio ad eandem curvam transformetur, mutatis utcunque tam axe, et abſciſſarum initio, quam angulo coordinatarum, tamen perpetuo aequatio ejusdem erit ordinis. Licet igitur aequatio inter coordinatas ſive orthogonales ſive obliquangulas innumerabilibus modis variari poſſit, ita ut ad eandem perpetuo curvam pertineat; tamen neque ad ordinem altiorem evehi, neque ad inferiorem deprimi poterit. Hinc concluditur, quod duae aequationes diverſorum ordinum etiam diverſas exprimant curvas, licet innumerabiles ejusdem ordinis aequationes excogitari poſſint unius ejusdemque curvae naturam exprimentes. Dubitatio igitur, utrum duae propoſitae aequationes diverſas exprimant curvas, an vero unam eandemque curvam, tum demum locum habere poteſt, ſi ambae aequationes ejusdem fuerint ordinis. Atque haec eſt ratio, cur character diſtinctionis linearum curvarum generalis omnium optime peti queat ab ordine aequationum. *Cf. Euleri Introd. T. II. C. II. De linearum curvarum in ordines diviſione.*

§. 173.

Quaerenda ſit aequatio generalis pro parabola AM, F. 248. 249.
cujus latus transverſum eſt AC latus rectum $= p$ et aequatio inter coordinatas orthogonales AP $= x$ et PM $= y$ ita $yy = px$; ſumatur recta bc quaecunque pro axe et punctum D quodcunque pro initio abſciſſarum. Ex quocunque puncto curvæ M ducatur MQ ad bc normalis, et vocatis DQ $= t$ et MQ $= u$, erit $x = mu + nt + f$, et $y = nu - mt - g$. Conſtanti f ſignum contrarium + præfixum eſt, quia punctum G in utraque figura verſus

ſus dextram ipſius A partem cadit. His ſubſtitutis fit $(nu - mt - g) = p(mu + nt + f)$; vel ſcripto x pro t et y pro u, erit $nnyy - 2mnxy + mmxx - 2ngy + 2mgx + gg = pmy + pnx + pf$, in qua aequatione eſt m ſinus anguli, ſub quo axis aſſumtus ad latus parabolæ transverſum inclinatus eſt, et n hujus anguli coſinus. Poſito igitur hoc angulo recto, fit $m = 1$ et $n = 0$, adeoque $xx + 2gx + gg = py \pm pf$, æquatio pro parabola relata ad axem bc, latus transverſum quoad opus eſt productum ſecantem in G. Signum conſtantis f in hac æquatione fit dubium, licet ſignum conſtantis g maneat idem. Creſcente enim angulo C$G$$c$ perpetuo creſcit DG et quidem verſus eandem partem, AG vero decreſcit et quidem in figura 248 AG non tantum evadit $= 0$, quando punctum G cum A coincidit, ſed etiam verſus oppoſitam partem creſcit, et ideo in caſu, quo angulus CGc eſt rectus, oppoſitum habet valorem, ut æquatio ſit iſta: $xx + 2gx + gg = py - pf$. In figura 249 punctum G non attingere poteſt A, et ideo AG etiam in caſu, quo angulus CGc eſt rectus idem retinet ſignum, ut habeatur $xx + 2gx + gg = py + pf$.

§. 174.

Quando linea quæcunque algebraica, æquatione indeterminata inter variabiles x et y, ubi x abſciſſam et y adplicatam denotat, expreſſa in axem incidit, adplicata y habet valorem $= 0$. Quodſi igitur data ſit aequatio inter abſciſſam x et applicatam y, in hac aequatione poni debet $y = 0$, atque æquatio reſultans, quæ tantum x continebit, exhibebit valores ipſius x, quibus adplicata $y = 0$ reſpondet, ideoque ſimul axis puncta, ubi curva ipſum ſecabit. Sic in æquatione pro circulo AMB, quæ ſumto diametro AB pro axe et puncto A pro abſciſſarum initio, eſt $yy = 2ax - xx$, poſito $y = 0$, fiet $0 = 2ax - xx$, unde duo valores ipſius x reſultant, $x = 0$ et $x = 2a$, qui indicant, axem primo in ipſo abſciſſarum initio A, tum vero in puncto B, exiſtente AB = $2a$,

$2a$, a circulo interſecari. Similique modo in aliis lineis curvis, poſito in æquatione $y = 0$, radices ipſius x indicabunt interſectiones curvæ cum axe. In æquatione generali pro quavis curva linea recta quæcunque vicem axis ſuſtinet. Quare ſi in æquatione generali ponatur adplicata $y = 0$, æquatio remanens indicabit, in quot punctis linea curva a recta quacunque interſecetur. Prodibit autem æquatio ſolam x tanquam incognitam complectens, cujus ſingulæ radices oſtendent interſectiones curvæ cum axe. Pendebit ergo interſectionum numerus a maxima ipſius x in æquatione poteſtate, hincque major eſſe non poterit, quam exponens ſummæ ipſius x dignitatis. Tot vero erunt interſectiones, quot exponens maximae dignitatis ipſius x continet unitates, ſi omnes radices æquationis fuerint reales, ſin autem aliquot radices fuerint imaginariæ, interſectionum numerus tanto erit minor. Generaliter itaque linea algebraica ordinis n a recta poterit in n punctis ſecari, non vero in pluribus. Neque vero hinc concludendum eſt omnem lineam ordinis n a quavis linea recta in n punctis ſecari, ſed utique fieri poteſt, ut interſectionum numeri ſit minor, quin ſæpius prorſus nullus. In hoc itaque propoſitionis vis tantum eſt poſita, quod interſectionum numerus major eſſe non poſſit, quam exponens ordinis, ad quem linea curva pertinet.

§. 175.

Aequatio generaliſſima pro locis geometricis primi ordinis erat $\alpha + \beta x + \gamma y = 0$, ex qua, poſito $y = 0$, fit $0 = \alpha + \beta x$, quae aequatio pluribus plures una radice habere nequit. Proinde locus primi ordinis eſt ejusmodi linea, quæ a linea recta in pluribus uno punctis non ſecari poteſt. Hinc omnis locus geometricus primi ordinis ſeu omnis linea æquatione $\alpha + \beta x + \gamma y = 0$ expreſſa eſt linea recta. Si enim curvam exprimere poſſet hæc æquatio, eadem in duobus ſaltem a linea recta interſecari poſſet punctis. Quando eſt β

Gg $= 0$

$= 0$, æquatio $0 = a$ impoſſibilis indicat, hoc caſu axem a linea recta nuſquam ſecari, erunt enim ambæ hæ lineæ rectae inter ſe parallelæ, quod ſimul patet ex æquatione $a + \gamma y = 0$, ſeu $y = -\frac{a}{\gamma}$, quam ſupra jam vidimus eſſe aequationem pro linea recta axi parallela. Ex his patet, quod omne problema indeterminatum primi ordinis linea quadam recta geometrice conſtruatur, cujus rei ſpecimen aliquod exhibet problema, quod ſequitur.

§. 176.

Datis poſitione duabus rectis AB, AC, invenire punctum D tale, ut rectae DE, DF ab eodem ſub datis angulis ad rectas AB et AC ductae ſint in data ratione.

F. 250. SOL. Quia datur poſitio rectarum AB et AC, datur angulus CAB. Producta autem DE, donec rectae AC occurrat, in triangulo AEC, cujus duo anguli A et E dantur, et tertius C erit datus. Punctum vero D habebitur, ſi inventæ fuerint AE et DE. Sit igitur AE $= x$ et ED $= y$, ſinus autem datorum angulorum CAB, E, C, F dicantur a, e, c, f, erit $e : a = x :$ CE $= \frac{ax}{c}$, ideoque CD $=$ CE $-$ ED $= \frac{ax}{c} - y$. Praeterea $f : c =$ CD : FD $= \frac{c \times CD}{f} = \frac{ax - cy}{f}$. Si igitur data ratio DE : DF ſit $= m : n$, erit $m : n = y : \frac{ax - cy}{f}$, et ideo $nfy = max - mcy$, vel $y = \frac{ma}{nf + mc} x$, quæ æquatio eſt indeterminata et primi ordinis, quod indicio eſt, non unum aliquod punctum quæſito ſatisfacere, ſed infinita, quae idem praeſtant, puncta poſſe reperiri, atque

que ad valorem quemcunque ipſius x determinatum quemcunque aſſumtum dari valorem ipſius y determinatum, et quidem talem ut y terminetur in puncto D, ſi ſub angulo E ad rectam AB ſic applicetur, ut pars hujus rectae inter illam et punctum A intercepta ſit $= x$. Locus autem omnium horum punctorum erit linea quaedam recta ſic invenienda. Sumatur in recta AB punctum quodcunque B, fiat angulus ABG = E, et BG fiat quarta proportionalis ad $nf + mc$, ma, ac AB; erit recta per puncta A et G ducta locus quaeſitus. Sumta enim in hac recta AG puncto H quocunque, ſi HK ducatur rectae BG parallela, erit AB : BG = AK : AH, ſi igitur ponatur AK $= x$, HK $= y$, erit $nf + mc : ma = x : y = \frac{ma}{nf + mc} x$.

§. 177.

Aequationes generales, quas pro curvis cujusque ordinis ſuppeditat Analyſis Mathematica, plures continent quantitates conſtantes arbitrarias. Quodſi hiſce conſtantibus valores determinati tribuantur, lineae curvae penitus determinabuntur, atque ad datum axem ita deſcribentur, ut reliquae lineae curvae omnes, quae quidem in eadem aequatione generali contentae ſunt, excludantur. Sic quamvis in aequatione primi ordinis $\alpha + \beta x + \gamma y = 0$ ſola linea recta contineatur; tamen ejus poſitio reſpectu axis innumerabilibus modis variari poteſt, pro diverſis valoribus quantitatum conſtantium α, β, γ. Quam primum autem his quantitatibus conſtantibus definiti valores tribuuntur, poſitio lineae rectae determinatur, ut praeter hanc nulla alia aequationi ſatisfacere queat. Poſſet quidem haec aequatio $\alpha + \beta x + \gamma y = 0$ tres determinationes admittere videri ob tres conſtantes arbitrarias α, β, γ. Verum ex natura aequationum intelligitur, aequationem jam determinari, ſi tantum ratio inter has conſtantes definiatur,

 ſci-

ſcilicet ratio binarum ad unam, ex quo iſta aequatio duas tantum admittet determinationes. Si enim β et γ dantur per α, ita ut ſit $\beta = m\alpha$ et $\gamma = n\alpha$, aequatio $\alpha + m\alpha x + n\alpha y$, quia α per diviſionem exit, jam prorſus erit determinata. Similem ob rationem aequatio generalis pro lineis ſecundi ordinis, quae ſex continet conſtantes arbitrarias, quinque tantum admittit determinationes; aequatio generalis pro lineis tertii ordinis novem; et generaliter aequatio generalis pro lineis n patietur $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ determinationes. cf. Kaeſtner Anal. finitorum. p. 249. §. 495.

§. 178.

F.251. Iſtae conſtantes arbitrariae autem ſemper ita definiri poſſunt, ut linea curva per datum punctum tranſeat, hocque modo una determinatio orietur. Sit enim propoſita aequatio generalis pro quovis ordine linearum, quae ita definiri debeat, ut linea curva per datum punctum B tranſeat. Sumatur pro lubitu recta quaedam pro axe, in eoque abſciſſarum initium A. Demittatur ex puncto B in axem perpendicularis Bb, atque manifeſtum eſt, ſi curva tranſeat per punctum B, poſito intervallo Ab pro x, perpendicularem Bb praebere valorem applicata y. Quare in aequatione generali propoſita loco x ſubſtituatur Ab et Bb loco y, ſicque orietur aequatio, ex qua una quantitatum conſtantium α, β, γ, δ etc. definiri poterit; quo facto omnes curvae, quae in aequatione generali hoc modo determinata continentur, per punctum datum B tranſibunt. Quod ſi linea curva inſuper per punctum C tranſire debeat, demittatur ab eodem perpendiculum Cc ad axem: Ponatur $x = Ac$ et $y = Cc$, atque nova habebitur aequatio, ex qua iterum una ex quantitatibus conſtantibus α, β, γ, δ, etc. definietur. Ex his patet, tres conſtantes definiri, ſi tria puncta B, C, D, praeſcribantur, quatuor vero, ſi quatuor data ſint puncta. Generaliter itaque, ſi tot

puncta

puncta proponantur, quot determinationes aequatio generalis admittit, linea curva penitus determinabitur.

§. 179.

Determinatio lineae cuiusq. ordinis per certum numerum punctorum.

Aequatio generalis pro linea primi ordinis duas tantum admittit determinationes. Ideo propoſitis duobus punctis, per quae linea primi ordinis tranſeat, eadem penitus determinatur. Ex quo patet, quod per duo puncta data plures quam una eademque rectae duci non poſſint, quod quidem ex elementis jam conſtat. Quodſi vero unum tantum proponeretur punctum, ob aequationem nondum determinatam adhuc innumerabiles lineae rectae per idem punctum duci poſſunt. Aequatio generalis pro lineis ſecundi ordinis quinque admittit determinationes. Quodſi igitur quinque proponantur puncta, per quae linea curva tranſire debeat, linea ſecundi ordinis penitus determinatur, et per quinque puncta data non niſi unica linea ſecundi ordinis duci poteſt. Aequatio autem nondum penitus determinatur, ſi quatuor tantum vel pauciora puncta proponantur; ideo innumerabiles lineae, quae omnes ſunt ſecundi ordinis, per ea duci poterunt. Quo vero aequatio data determinet curvam ſecundi ordinis, tria illorum punctorum in directum jacere nequeunt, quia linea ſecundi ordinis a recta in tribus punctis ſecari nequit, id quod ex aequatione generali ſecundi ordinis jam demonſtravimus. In genere igitur linea ordinis n determinabitur per tot puncta, quot haec formula $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ continet unitates ita, ut ſi numerus datorum punctorum fuerit minor, per ea puncta innumerabiles lineas ordinis n duci queant. Nunquam autem, utcunque haec puncta fuerint diſpoſita, ſolutio evadet impoſ-

impoſſibilis, quia determinatio coefficientium α, β, γ, δ, etc. nunquam reſolutionem æquationis quadraticæ vel altioris poteſtatis requirit, ſed tota per æquationes ſimplices abſolvetur. Proinde neque valores imaginarii, neque multiformes reperientur, atque hanc ob cauſſam ſemper linea realis per propoſita puncta tranſiens prodibit, atque unica, ſi tot puncta proponantur, quot aequatio generalis admittit determinationes.

§. 180.

Quia axis pro lubitu aſſumi poteſt, facilior fiet determinatio coefficientium, ſi axis per unum punctorum datorum ducatur atque initium abſciſſarum in ipſo hoc puncto A ſtatuatur. Sic enim poſito $x = 0$ fieri debebit $y = 0$, unde in aequatione generali ſtatim fiet terminus conſtans $\alpha = 0$. Deinde axis quoque per aliud datorum punctorum tranſire poterit, atque hoc facto iterum numerus quantitatum, quibus poſitio punctorum datorum definitur, minuetur. Poſſunt etiam loco applicatarum orthogonalium ejusmodi obliquangulæ eligi, ut applicata in initio abſciſſarum ducta pariter per punctum datum tranſeat. Curvæ enim cognitio et conſtructio æque facile deducitur, ſive applicatæ ſtatuantur rectangulae, ſive obliquangulæ. Si quæratur linea ſe-
232 [illegible] cundi ordinis, quæ per quinque data puncta A, B, C, D, E tranſeat, ducatur axis per duo puncta A, B, ſumaturque initium abſciſſarum in altero puncto A. Jungatur punctum A cum C, atque ſumatur angulus CAB pro angulo coordinatarum. Ducantur ex reliquis punctis D et E ad axem applicatae Dd et Ee illi AC parallelae. Ponatur $AB = a$, $AC = b$, $Ad = c$, $Dd = d$, $Ae = e$, et $eE = f$, atque

poſito	erit
$x = 0$	$y = 0$
$x = 0$	$y = b$
$x = a$	$y = 0$
$x = c$	$y = d$
$x = e$	$y = f$

Ideo

§164.

Ideo ex æquatione generali linearum ſecundi ordinis habentur ſequentes quinque aequationes.

$$o = \alpha$$
$$o = \alpha + \gamma b + \zeta b^2$$
$$o = \alpha + \beta a + \delta a^2$$
$$o = \alpha + \beta c + \gamma d + \delta c^2 + \varepsilon cd + \zeta d^2$$
$$o = \alpha + \beta e + \gamma f + \delta e^2 + \varepsilon ef + \zeta f^2$$

Proinde erit $\alpha = o$; $\gamma = -\zeta b$, $\beta = -\delta a$, qui valores in reliquis ſubſtituti præbent

$$o = -\delta ac - \zeta bd + \delta cc + \varepsilon cd + \zeta dd$$
$$o = -\delta ae - \zeta bf + \delta ee + \varepsilon ef + \zeta ff$$

Multiplicetur prior æquatio per ef et poſterior per cd, et altera ab altera ſubtrahatur, ut eliminetur ε, quo facto habetur $o = -\delta acef - \zeta bdef + \delta ccef + \zeta ddef + \delta acde + \zeta bcdf - \delta cdee - \zeta cdff$, ſeu $\frac{\delta}{\zeta} = \frac{bdef - bcdf - ddef + cdff}{acde - acef - cdee + ccef}$, unde fit $\delta = df\,(be - bc - de + cf)$, et $\zeta = ce\,(ad - af - de + cf)$, atque ſic omnes coefficientes determinati erunt. Determinatis hoc modo omnibus coefficientibus, ex æquatione invenientur plura puncta ſatis vicina, per quae curva tranſire debet, ex quibus curvae tractus facile perſpicietur. Cf. Euler Introductio in Anal. T. II, C. IV. De linearum cuiusqunque ordinis praecipuis proprietatibus.

§. 181.

De lineis complexis.

Quod jam adtinet ad curvas algebraicas primo ordine ſuperiores, notari adhuc meretur, neceſſe eſſe, ut aequatio in factores rationales reſolvi nequeat, ſi linea algebraica ad eum ordinem, quem æquatio indicat, proprie referenda ſit. Quodſi enim æquatio duos vel plures habeat factores rationales, ea duas vel plures involvit æquationes, quarum quælibet peculiarem exprimit lineam, quæ junctim ſumtæ æquationis propoſitae vim ex-

exhaurient, ita ut æquatio plures lineas ad eundem axem et idem initium abſciſſarum relatas ſimul exprimat. Sit v. g. hæc propoſita æquatio ordinis ſecundi $(\alpha + \beta x + \gamma y)(f + gx + hy) = 0$; atque patet, unicuique ipſius x valori duplicem reſpondere valorem ipſius y, quorum unus ex factore $\alpha + \beta x + \gamma y = 0$ alter vero ex factore $f + gx + hy = 0$ determinatur. Utraque vero harum æquationum eſt pro linea recta. Proinde æquatio $(\alpha + \beta x + \gamma y)(f + gx + hy) = 0$ duas rectas ad eundem axem et idem abſciſſarum initium relatas ſimul exprimit. Cum igitur ejusmodi æquationes in factores rationales reſolubiles non unam ſed plures lineas algebraicas continuas in ſe complectantur, quarum quaevis peculiari æquatione exprimi queat, et quæ aliter in ſe non ſunt connexae, niſi quod earum æquationes in ſe invicem ſint multiplicatæ, qui nexus ab arbitrio noſtro pendet; ejusmodi lineae unam lineam algebraicam continuam conſtituere cenſeri non poſſunt. Hujusmodi igitur aequationes, quas complexas vocare poſſumus, exprimunt lineas algebraicas non continuas attamen ex continuis compoſitas, quas ideo *lineas complexas*, vel *ſyſtema plurium* linearum algebraicarum vocare, conſultum erit. Sic aequatio $yy = ay + xy - ax$, quæ ad lineam ſecundi ordinis eſſe videtur, ita reducta $yy - ay - xy + ax = 0$ reſolubilis eſt in factores $y - x = 0$ et $y - a = 0$, quarum æquationum ſimplicium utraque eſt pro linea recta: illa ſcilicet cum axe in initio abſciſſarum angulum ſemirectum conſtituit, hæc vero axi ad diſtantiam $= a$ eſt parallela. Pari ratione æquatio $y^4 - xy^3 - aaxx - ay^3 + axxy = 0$ complexa eſt, atque coincidit cum iſta $(y - x)(y - a)(yy - ax) = 0$. Proinde tres exprimit lineas algebraicas continuas, duas ſcilicet rectas, atque parabolam.

§. 182.

Poſſunt igitur pro lubitu lineae complexae quæcunque formari, quae duas vel plures lineas complectantur alge-

algebraicas ad arbitrium deſcriptas. Quodſi enim unius cujusque lineæ natura exprimatur per aequationem ad eandem axem idemque abſciſſarum initium relatam, atque hae ſingulae æquationes, poſtquam ad cyphram fuerint reductae, in ſe multiplicentur, prodibit aequatio complexa, in qua omnes lineae aſſumtae ſimul continentur. Ita ſi propoſitus fuerit circulus centro C et radio F. 253.
CA $= a$ deſcriptus, ac praeterea linea recta LN per centrum C tranſiens, pro quovis axe exhiberi poterit æquatio, quae circulum et lineam rectam ſimul exprimat. Sumatur diameter AB, quae cum recta LN angulum ſemirectum conſtituat, pro axe, ac punctum A pro initio abſciſſarum. Sit abſciſſa AP $= x$, applicata PM $= y$, erit pro linea recta PM $=$ CP $= a - x$, et quia punctum rectae M in regionem adplicatarum negativarum cadit, erit $y = -a + x$, vel $y - x + a = 0$. Pro circulo autem erit $yy = 2ax - xx$ vel $yy + xx - 2ax = 0$. Multiplicatis duabus hiſce aequationibus in ſe invicem prodibit iſta aequatio tertii ordinis complexa $y^3 - yyx + yxx - x^3 + ayy - 2axy + 3axx - 2aax = 0$, quae tam circulum, quam lineam rectam ſimul complectitur. Abſciſſae AP $= x$ reſpondent tres adplicatae, binae circuli et una rectae. Si nimirum $x = \frac{1}{2}a$, fiet $y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{3}{4}aay - \frac{3}{8}a^3 = 0$, unde fit primo $y + \frac{1}{2}a = 0$, atque diviſione per hanc radicem inſtituta erit $yy - \frac{3}{4}aa = 0$, unde tres ipſius y valores erunt, $y = -\frac{1}{2}a$; $y = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ $y = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Hoc deſcrimine inter curvas complexas et incomplexas notato perſpicuum eſt, lineas ſecundi ordinis eſſe vel curvas continuas, vel ex duabus lineis rectis complexas. Lineae tertii ordinis erunt vel incomplexæ, vel ex una recta et una linea ſecundi ordinis, vel ex tribus lineis rectis complexae. Atque par ratio erit linearum quarti et ſuperiorum ordinum. Caeterum quia ſolae lineae incomplexae tantum cenſentur ejusdem ordinis eſſe, ad quem æquatio pertinet, in poſterum de lineis complexis nunquam ſermo erit, quando de lineis hujus

vel

vel illius ordinis erit agendum, ſed ſolae lineae incomplexae erunt intelligendæ. Euleri Introd. in Anal. T. II. c. III. De linearum curvarum in omnes ordines divisione.

§. 183.

Aequatio generalis linearum secundi ordinis ad axem quemcunque.

Aequationes, quas ſupra pro curvis ex ſectione coni ortis, nimirum pro ellipſi, circulo, parabola et hyperbola elicuimus, omnes, ideo et iſtae curvae, ſunt ordinis ſecundi. Ipſa vero aequatio generaliſſima $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy = 0$ non alias niſi has curvas in ſe complectitur, ita ut omnis curva ſecundi ordinis ſit ſectio conica. Demonſtratio hujus aſſerti praerequirit ſibi cognitionem de proprietatibus quibusdam curvarum ſecundi ordinis generalibus, quæ omnibus hisſce curvis communes ſunt, ex aequatione ſecundi ordinis generaliſſima deducendis. Tribuatur aequationi iſti generaliſſimae haec forma $yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$, cujus radices ſunt $y = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon x - \gamma}{\zeta} \pm \surd\left(\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} + \frac{1}{4} \frac{(\varepsilon x + \gamma)^2}{\zeta^2}\right)$ atque patet, aequationem exprimere ſyſtema duarum rectarum, ſi fuerit $\surd\left(\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} + \frac{(\varepsilon x + \gamma)^2}{4\zeta^2}\right)$ quantitas rationalis; qui caſus huc quidem non ſpectat (§. *prec.*) ſed tamen notandum eſt, ipſo hoc quoque caſu aequationem eſſe pro linea ex ſectione quadam coni orta. Cono enim plano quodam ſecto, quod tranſit per verticem, figura ſectionis eſt ſyſtema duarum linearum rectarum. Hoc caſu ſepoſito ſit MNF curva

F. 254. ſecundi ordinis quaecunque, atque ſumatur recta AEF pro axe, punctum A pro initio abſciſſarum, angulus APN pro eo, quo adplicatae axi inſiſtunt, et quoties ambo ipſius y valores fuerint reales, id quod evenit, ſi appli-

plicata curvam in duobus punctis M et N interſecat, erit PM una radix, PN altera radix aequationis. Summa harum radicum eſt $PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta}$, vel $\frac{-\varepsilon AP - \gamma}{\zeta}$, quia $x = AP$. Ducatur ſub eodem angulo quaevis applicata *npm*, erit et $-pm$ una radix, *pn* altera radix, ideo quoque $pn - pm = -\frac{\varepsilon x - \gamma}{\zeta} = \frac{-\varepsilon Ap - \gamma}{\zeta}$. Subtrahatur haec aequatio a priori, ut fiat $PM + pm + PN - pn = \frac{+\varepsilon Ap - \varepsilon AP}{\zeta} = \frac{\varepsilon(Ap - AP)}{\zeta} = \frac{\varepsilon . Pp}{\zeta}$, quia $Ap - AP = Pp$. Jam ducantur ex punctis *m* et *n* rectae *mμ* et *nν* axi parallelae, donec priori adplicatae occurrant in punctis *μ* et *ν*, eritque $M\mu = MP + pn$, $N\nu = PN - pn$, ergo eſt $M\mu + N\nu = MP + pm + PN - pn$, ex quo porro concluditur $M\mu + N\nu = \frac{\varepsilon . Pp}{\zeta}$, quae aequatio dat analogiam iſtam $\zeta : \varepsilon = Pp : M\mu + N\nu$. Ratio igitur $Pp : M\mu + N\nu$ perpetuo erit eadem, ubicunque in curva ducantur rectae MN et *mn*, dummodo cum axe datum faciant angulum, atque rectae *nν* et *mμ* axi parallelae ſtatuantur.

§. 184.

Si applicata PMN eo promoveatur, quo puncta M et N coincidunt, tum applicata tanget curvam. Sit KCI ejusmodi tangens, cui ducantur parallelae quotcunque rectae MN, *mn*, curvae utrinque occurrentes, quae *chordae* ſeu *ordinatae* vocari ſolent. Porro ex punctis M, N, *m*, *n*, ad tangentem ducantur rectae MI, MK, *mi*, *mk*,

mk, axi prius aſſumto parallelae. Quia nunc intervalla CK, C*k* ad contrariam puncti C partem cadunt, negative capi debebunt. Erit vero CI − CK : MI $= \iota : \zeta$ = C*i* − C*k* : *mi*, vel MI : *mi* = CI − CK : C*i* − C*k*. Quia poſitio axis reſpectu curvae eſt arbitraria, rectae MI, NK, *mi*, *nk*, pro lubitu duci poterunt, dummodo inter ſe fuerint parallelae, eritque ſemper MI : *mi* = CI − CK : C*i* − C*k*. Quodſi ergo rectae parallelae MI, NK, ita ducantur, ut fiat CI = CK, quod evenit ſi MI et NK ſtatuantur parallelae rectae CL, quae ex contactu C ducta ordinatam MN in L biſecat, fiet CI − CK = o, et hinc quoque $Ci - Ck = \frac{mi \,.\, (CI - CK)}{MI} = 0$, ex quo fit C*i* = C*k*. Producatur recta CL in *l*, et fiet *ml* = C*i*, *nl* = C*k*, proinde *ml* = *nl*. Recta igitur CL*l*, quae ex puncto contactus C ducta unam ordinatam MN tangenti parallelam biſecat, omnes ordinatas *mn* eidem tangenti parallelas bifariam ſecabit. Ejusmodi linea recta CL*l* omnes ordinatas tangenti ICK parallelas in duas partes aequales ſecans dicitur *Diameter* lineae ſecundi ordinis. Hinc innumerabiles in unaquaque linea ſecundi ordinis duci poſſunt diametri, quia in ſingulis punctis curvae datur tangens.

§. 185.

Sit igitur IG ejusmodi diameter biſecans ordinatam
F. 256. MN et omnes reliquas huic parallelas bifariam. Producatur eadem utcunque verſus P atque per punctum P ducatur recta indefinita AO ad PN normalis. Sumatur hæc AO pro axe, erit AP abſciſſa = *x*, cui duplex applicata *y*, nempe PM et PN reſpondet, atque ex æquatione $yy + \frac{\alpha x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta x + \beta x + \epsilon}{\zeta} = 0$ definiri poteſt poſitio diametri IG in reſpectu ad axem, quem producta in O interſecat. Cum enim punctum ordinatae MN medium L ſit in diametro, ponatur PL = *z*, et fiet

eius positio pro applicatis rectangulis

z =

$z = \frac{PM+PN}{2} = \frac{-\epsilon x-\gamma}{2\zeta}$ adeoque $\frac{-\epsilon x-\gamma}{2\zeta} - z = 0$, ex quo fit $2\zeta z+\epsilon x+\gamma=0$, quæ eſt æquatio poſitionem diametri IG præbens. Ducatur ex curvæ puncto M ad axem applicata obliquangula Mp, faciens cum axe angulum $MpP = \phi$ cujus ſinus ſit $=\mu$ et coſinus $=\nu$. Sit nova abſciſſa $Ap = t$ et applicata $pM = u$, erit $y=\mu u$, et $x = t+\nu u$. (§. 170.). Subſtituantur hi valores pro x et y in aequatione $\alpha+\beta x+\gamma y+\delta xx+\epsilon xy+\zeta yy=0$, et prodibit æquatio pro aſſumta applicatarum obliquitate $\alpha+\beta(t+\nu u)+\gamma\mu u+\delta(t+\nu u)^2+\epsilon(t+\nu u)\mu u+\zeta\mu\mu uu=0$, ex qua legitime ordinata fit

$$uu+\frac{(\mu\epsilon+2\nu\delta)t+(\mu\gamma+\nu\beta)}{\mu\mu\zeta+\mu\nu\epsilon+\nu\nu\delta}u+\frac{\delta tt+\beta t+\alpha}{\mu\mu\zeta+\mu\nu\epsilon+\nu\nu\delta}=0.$$

Hic ergo iterum quævis applicata duplicem habebit valorem, nempe pM et pn, quare poſitio diametri ordinatam Mn et huic parallelas bifariam ſecantis eodem modo ut ante definietur. Biſecta ſcilicet ordinata Mn in l, erit l punctum in diametro. Ponatur ergo $pl=v$, et erit $v=\frac{pM+pn}{2} = -\frac{(\mu\epsilon+2\nu\delta)t-\mu\gamma-\nu\beta}{2(\mu\mu\zeta+\mu\nu\epsilon+\nu\nu\delta)}$. Demittatur ex l in axem AO perpendicularis lq et ponatur $Aq=r$ et $ql=s$; eritque $v=\frac{s}{\mu}$ et $t=r-\frac{\nu s}{\mu}$. Subſtitutis his valoribus prodibit

$$\frac{s}{\mu} = -\frac{(\mu\epsilon+2\nu\delta)\left(r-\frac{\nu s}{\mu}\right)-\mu\gamma-\nu\beta}{2\mu\mu\zeta+2\mu\nu\epsilon+2\nu\nu\delta}$$

, ex qua reducta fit $(2\mu\zeta+\nu\epsilon)s+(\mu\epsilon+2\nu\delta)t+\mu\gamma+\nu\beta=0$, qua æquatione poſitio diametri ig definitur.

§. 186.

§. 186.

Datur centrum in lineis ſecundi ordinis ſeu centrum in quo omnes diametri ſe interſecant.

Ambæ diametri ſe mutuo interſecant in puncto quodam C, ex quo ad axem demittatur perpendiculum CD, ac vocetur AD $= g$, et CD $= h$, eritque primo, quia C in diametro IG extat, $2\zeta h + \varepsilon g + \gamma = 0$, ex qua fit $h = \frac{-\varepsilon g - \gamma}{2\zeta}$. Deinde quia C quoque in diametro *ig* reperitur, erit $(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)h + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)g + \mu\gamma + \nu\beta = 0$. Subtrahatur prior æquatio per μ multiplicata, ac remanebit $\nu\varepsilon h + 2\nu\delta g + \nu\beta = 0$, ſeu $\varepsilon h + 2\delta g + \beta = 0$, ex qua habemus $h = \frac{-2\delta g - \beta}{\varepsilon}$. Ideo eſt $\frac{-\varepsilon g - \gamma}{2\zeta} = \frac{-2\delta g - \beta}{\varepsilon}$, ex qua deducitur $g = \frac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ et porro $h = \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$. Cum in his æquationibus non inſint quantitates μ et ν, a quibus obliquitas applicatarum *pMn* pendet, manifeſtum eſt, C idem manere, utcunque obliquitas varietur. Omnes ergo diametri ſe mutuo in eodem puncto C interſecant. Quare ſi illud ſemel fuerit inventum, omnes diametri per illud tranſibunt; ac viciſſim omnes rectae per illud ductae erunt diametri, quæ omnes ordinatas ſub certo quodam angulo ductas biſecabunt. Cum igitur hoc punctum in quavis linea ſecundi ordinis ſit unicum, in eoque omnes diametri ſe mutuo ſecent, hoc punctum vocari ſolet *centrum lineae ſecundi ordinis*, quod ergo ex æquatione inter x et y propoſita $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy = 0$ ita invenitur; ut ſumto AD $= \frac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ capiatur CD $= \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$,

§. 187.

§. 187.

Ex æquatione $yy + \frac{\epsilon x+\gamma}{\zeta}y + \frac{\delta xx+\beta x+\alpha}{\zeta} = 0$, dantur PM + PN = $\frac{-\epsilon x-\gamma}{\zeta}$ et PM × PN = $\frac{\delta xx+\beta x+\alpha}{\zeta}$. Sed eſt (PM − PN)² = PM² − 2PM × PN + PN² = PM² + 2PM × PN + PN² − 4PM × PN = (PM + PN)² − 4PM × PN =

$$\frac{\epsilon\epsilon xx + 2\epsilon x\gamma\zeta + \gamma\gamma\zeta\zeta}{\zeta\zeta} - \frac{4\delta xx - 4\beta x - 4\alpha}{\zeta}$$

$$= \frac{\epsilon\epsilon xx + 2\epsilon x\gamma\zeta + \gamma\gamma\zeta\zeta}{\zeta^3}$$

$$- \frac{4\delta xx\zeta\zeta - 4\beta x\zeta\zeta - 4\alpha\zeta\zeta}{\zeta^3}$$

$$= \frac{\epsilon\epsilon xx + 2\epsilon x\gamma + \gamma\gamma - 4\delta xx\zeta - 4\beta x\zeta - 4\alpha\zeta}{\zeta\zeta}$$

$$= \frac{(\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta)xx + 2(\epsilon\gamma - 2\beta\zeta)x + \gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\zeta\zeta}$$

quae formula eſt = 0, quando ſit PM = PN, ſeu $xx - \frac{2(2\beta\zeta - \epsilon\gamma)}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta}x + \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta} = 0$. Fit vero PM = PN in punctis diametri IG extremis I et G. Proinde iſtius æquationis radices ſunt AK et AH, ita ut ſit AK + AH = $\frac{4\beta\zeta - 2\epsilon\gamma}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta} = \frac{2(2\beta\zeta - \epsilon\gamma)}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta}$, ex quo ſit $\frac{AK + AH}{2} = \frac{2\beta\zeta - \epsilon\gamma}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta}$. Erat vero

AD

$AD = \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$, ideo eſt $AD = \frac{AK + AH}{2}$ et proinde $KD = DH$. Sunt autem IK et GH perpendicula ex terminis diametri in axem demiſſa; ideo IK, CD, GH; ſunt parallelæ, hanc ob rem quoque $IC = CG$ (§. 200. *Geom. Elem.*). Centrum igitur C in medio diametri IG eſt poſitum, quod cum de quavis alia diametro æque valeat, conſequens eſt, non ſolum omnes diametros ſe mutuo in eodem puncto C interſecare, ſed etiam ſe invicem bifariam ſecare.

§. 188.

F. 257. Æquatio generalis pro linea secundi ordinis ad diametrum tanquam axem relata. Sumamus nunc quamcunque diametrum AI pro axe, ad quem ordinatae adplicatæ ſint ſub angulo $APM = q$, cujus ſinus ſit $= m$ et coſinus $= n$. Ponatur abſciſſa $AP = x$ et adplicata $PM = y$, cujus cum duo ſint valores inter ſe æquales, alter alterius negativus, eorumque adeo ſumma $= 0$; in æquatione generali pro lineis ſecundi ordinis $yy + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$ coefficiens termini ſecundi eſt $= 0$, ideoque $yy + \frac{\delta xx + \beta x - \alpha}{\zeta} = 0$, vel $yy = -\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{\beta}{\zeta}x - \frac{\delta}{\zeta}xx$. Quodſi igitur conſtantes $-\frac{\alpha}{\zeta}$, $-\frac{\beta}{\zeta}$, $-\frac{\delta}{\zeta}$, generaliter denotentur litteris α, β, γ, æquatio generalis pro lineis ſecundi ordinis ad diametrum tanquam axem relata habebit formam ſequentem $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$.

Speciales: 1) puncto diametri extremo pro initio abſciſſarum aſſumto. Aſſumamus punctum G diametri extremum pro abſciſſarum initio, et patet, quod poſito $x = 0$ fiat $y = 0$, adeoque evadat $\alpha = 0$. Proinde æquatio induet hanc formam $yy = \beta x + \gamma xx$.

Prae-

Præterea vero patet, quod poſito $y=0$, æquatio $0=\beta x+\gamma xx$ indicet puncta G et I in axe, ubi is a curva interſecatur. Aequationis vero $xx+\frac{\beta}{\gamma}x=0$ radices erunt $x=0$ et $x=GI$, proinde eſt $GI=-\frac{\beta}{\gamma}$. Biſecetur GI in C, et fiet $CG=CI=\frac{-\beta}{2\gamma}$. Sumamus nunc centrum C pro initio abſciſſarum, et ſtatuamus $CP=t$, PM vero manebit $=y$. Hoc facto fiet $x=CG-CP=\frac{-\beta}{2\gamma}-t$, et valore illo ſubſtituto habemus $yy=\frac{-\beta\beta}{4\gamma}+\gamma tt$. Poſito igitur x loco t et $-\frac{\beta\beta}{4\gamma}=\alpha$, erit $yy=\alpha+\gamma xx$. Conſtantis α ſignum in hac aequatione dependet a ſigno coefficientis ipſius xx, et quidem ita, ut α ſit quantitas negativa, quando γ ponitur affirmativa, et vice verſa α ſit poſitiva, ſi γ ponatur negativa. Signum vero ipſius α non mutatur, ſive pro β ſcribatur $+\beta$, ſive $-\beta$, quia quadratum $\beta\beta$ ſemper habet ſignum $+$. Duas igitur in univerſum habemus curvarum ſecundi ordinis ſpecies, quarum una æquatione $yy=\alpha-\gamma xx$, altera vero aequatione $yy=-\alpha+\gamma xx$ exprimitur, abſciſſis a centro in curvæ diametro computatis. Atque nunc omne negotium eo redit, ut conſtantes α et γ convenienter determinentur. Sit igitur $yy=\alpha-\gamma xx$, et poſito $y=0$ fiet $0=\alpha-\gamma xx$, atque $x=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}=CG=CI$,

CI, proinde tota diameter $IG = 2\sqrt{\frac{a}{\gamma}}$. Ponatur $x = 0$, ac reperietur applicata CE per centrum C tranſiens $y = \pm \sqrt{a}$, ideo tota ordinata $EF = 2\sqrt{a}$. Erit vero ipſa hæc ordinata EF diameter curvæ et quidem talis, quæ omnes ordinatas diametro IC parallelas bifariam ſecat. Per M enim ducatur ordinata MM^{I} diametro GI parallela ſecans diametrum EF in puncto S. Sumatur EF pro axe, ac vocetur $CS = t$, et $SM = u$, fiet $t = y$ et $u = x$, proinde $tt = a - \gamma uu$ vel $uu = \frac{a}{\gamma} - \frac{tt}{\gamma}$ et $u = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{\gamma} - \frac{tt}{\gamma}\right)}$, quod indicat, fore $SM = SM^{I}$, idque perpetuo, quia pro t ſcripto vel $+t$ vel $-t$ æquatio ſemper manet eadem. Quodſi coefficiens γ ſumatur poſitivus et adeo conſtans a negativa, ut fiat $yy = -a + \gamma xx$, manet quidem $GI = 2\sqrt{\frac{a}{\gamma}}$, ſed applicata per centrum CE fit imaginaria $= \sqrt{-a}$. Nihilo tamen ſecius, haec diameter imaginaria omnes ordinatas ipſi GI parallelas bifariam ſecat. Permutatis enim coordinatis fit $u = \pm\sqrt{\frac{a + tt}{\gamma}}$. Ambæ igitur diametri GI et EF ita ſunt comparatæ, ut altera biſecet omnes ordinatas alteri parallelas, quam ob reciprocam proprietatem, hæ duæ diametri inter ſe *conjugatæ* appellantur.

§. 189.

Ducatur nunc adplicata quævis obliquangula MQ, ſitque angulus $AQM = \varphi$, cujus ſinus $= \mu$ et coſinus $= \nu$. Angulus APM erat $= q$, ejus ſinus $= m$ et coſinus $= n$. Proinde eſt angulus $PMQ = \varphi - q$, ejus ſinus $= \mu n - \nu m$ (§. 40.). Ponatur abſciſſa $CQ = t$ et

et applicata QM $= u$, erit $m : u = \mu : y$, hinc $y = \frac{u\mu}{m}$. Deinde $m : u = \mu n - \nu m : PQ$, et $PQ = \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$. Sed $x = t - PQ$, proinde $x = t - \frac{(\mu n - \nu m)}{m}$. Subſtituantur hi valores in aequatione $yy + \gamma x^2 + \alpha = 0$, nullo conſtantium ſigni habito reſpectu, ut fiat $\frac{uu\mu\mu}{mm} + \gamma\left(t - \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}\right)^2$ $+ \alpha = 0$, quae aequatio ita reducitur: $\frac{uu\mu\mu}{mm} + \gamma$

$$\left(tt - 2t\left(\frac{(\mu n - \nu m)u}{m}\right) + \frac{(\mu n - \nu m)^2 uu}{mm}\right) + \alpha = 0$$

$$\frac{uu\mu\mu + mm\gamma tt}{mm} - \frac{2\gamma tm(\mu n - \nu m)u}{mm} + \frac{\gamma(\mu n - \nu m)^2 uu}{mm} + \frac{mm\alpha}{mm} = 0$$

$$uu\mu\mu + mm\gamma tt - 2\gamma tm(\mu n - \nu m)u = \gamma(\mu n - \nu m)^2 uu + mm\alpha = 0$$

$$(\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2)uu - 2\gamma m(\mu n - \nu m)ut + mm\gamma tt + mm\alpha = 0,$$

Ex hac aequatione applicata u duos obtinet valores QM et $-$ Qn. Tribuatur eidem hæc forma $uu -$

$$\frac{2\gamma m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2} + \frac{\gamma mmtt + \alpha mm}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)t} = 0,$$

 erit.

eritque $QM - Qn = \frac{2\gamma m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2}$. Biſecetur ordinata Mn in p, et erit recta Cpg nova diameter ſecans omnes ordinatas ipſi Mn parallelas bifariam. Eſt vero $pQ + Qn = pn = pM$, $QM - pQ = pM = pn$, ideo $Qp + Qn = QM - pQ$ et $2Qp = QM - Qn =$
$\frac{2\gamma m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2}$, proinde $Qp = \frac{\gamma m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2}$

§. 190.

Obtineri poterit anguli GCg tangens ſequenti modo. Ponatur in formula generaliori $t\varphi - \frac{b\,\mathit{ſin}.a}{a - b\,\mathit{coſ}.a}$ (§. 42.) $\varphi = GCg$, $a = CQ$, $b = Qp$, et $CQp = a$, eritque $\mathit{tang}.\,GCg = \frac{Qp.\mathit{ſin}\,CQp}{CQ - Qp.\mathit{coſ}\,CQp}$. Eſt vero $\mathit{ſin}$ $CQp = \mathit{ſin}\,AQM = \mu$, $\mathit{coſ}\,CQp = \mathit{coſ}\,AQM$ negative ſumto $= -\nu$, ergo $\mathit{tang}.\,GCg$

$$= \frac{\mu Qp}{CQ + \nu Qp} = \frac{\mu\gamma m(\mu - \nu m)t}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2} : t$$

$$\frac{\nu\gamma m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2} = \frac{\mu\gamma m(\mu n - \nu m)t}{t\mu\mu + \gamma t(\mu n - \nu m)^2 + \nu\gamma m(\mu n - \nu m)t}$$

$$= \frac{\mu\gamma m(\mu n - \nu m)}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2 + \nu\gamma m(\mu n - \nu m)}$$

$$= \frac{\mu\gamma m(\mu n - \nu m)}{\mu\mu + \gamma\mu\mu nn - 2\gamma\nu m\mu n + \gamma\nu\nu mm + \gamma\nu m\mu n - \nu\nu mm\gamma}$$

$$= \frac{\mu\gamma m(\mu n - \nu m)}{\mu\mu + \gamma\mu\mu nn - \gamma\nu m\mu n} = \frac{\gamma m(\mu n - \nu m)}{\mu + \gamma\mu nn - \gamma\nu mn}$$

=

$= \frac{\gamma m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\gamma(\mu n - \nu m)}$. Ponamus angulum $GCg = p$, et erit $tang.\, p = \frac{\gamma\mu(\mu n - \nu m)}{\mu + n\gamma(\mu n - \nu m)}$, ex quo fit
$\mu\, tang.\, p + n\gamma\, tang.\, p\, (\mu n - \nu m) = \gamma m(\mu n - \nu m)$
$\mu\, tang.\, p = (\gamma m - \gamma n.\, tang.\, p)\, (\mu n - \nu m)$ et
$\frac{\mu.\, tang.\, p}{(m - n.\, tang.\, p)\, (\mu n - \nu m)} = \gamma$. Sed $\mu = ſin\, \phi$, $\nu = coſ.\, \phi$, $m = ſin.\, q$, $n = coſ.\, q$. Ponatur angulus $ECe = \pi$, eritque $AQM = \phi = q + \pi$ et $\pi = \phi - q$. Eſt igitur $\mu n - \nu m = ſin.\, \phi.\ coſ.\, q - coſ\, \phi\ ſin.\, q = ſin.\, \pi$.
Proinde $\gamma = \frac{tang.\, p.\ ſin.\, \phi}{(ſin\, q - cos\, q.\ tang.\, p)\ ſin\, \pi}$
$= \frac{tang.\, p.\ ſin.\, (q + \pi)}{(ſin.\, q - cos.\, q.\ tang.\, p)\ ſin\, \pi}$. Multiplicetur numerator et denominator per $coſ.\, p$, et fiet $\gamma = \frac{coſ.\, p.\ tang.\, p.\ (ſin.\, q + \pi)}{(ſin.\, q.\, coſ.\, p - coſ.\, q.\, tang.\, p.\, coſ.\, p)\, ſin.\, \pi}$. Sed eſt $tang.\, p.\ coſ.\, p = ſin.\, p$, ideo fit $\gamma = \frac{ſin.\, p.\ ſin.\, (q + \pi)}{(ſin.\, q.\, coſ.\, p - coſ.\, q.\, ſin.\, p)\, ſin\, \pi}$
$= \frac{ſin.\, p.\ ſin.\, (q + \pi)}{ſin.\, \pi.\ ſin.\, (q - p)}$, ob $ſin.\, q.\ coſ.\, p - coſ.\, q.\ ſin.\, p = ſin.\, (q - p)$. Vocemus jam ſemidiametrum $CG = f$ et ſemiconjugatam $CE = CF = g$, et cum ſit $CG = \sqrt{\frac{aa}{\gamma}}$ ſive γ ſit negativum, ſive affirmativum, erit $f = \sqrt{\frac{\pm aa}{\gamma}}$

 et

et $ff = \frac{\alpha}{\gamma}$; cum deinde ſit CE $= \sqrt{\alpha} = g$, et $\alpha = gg$, erit $\alpha = \gamma ff = gg$ proinde $\gamma = \frac{gg}{ff}$ et $\frac{gg}{ff} = \frac{\text{ſin.}\,p.\ \text{ſin.}\,(q+\pi)}{\text{ſin.}\,\pi\ \text{ſin.}\,(q-p)}$.

§. 191.

Ex æquatione igitur $yy = \alpha - \gamma xx$ fit $yy = gg - \frac{gg}{ff}xx$, atque altera $yy = -\alpha + \gamma xx$ ſic mutatur $= -gg + \frac{gg}{ff}xx$. Si abſciſſae in diametro a vertice computentur; æquatio generalis eſt $yy = \beta x + \gamma xx$, ubi coefficiens β datur per æquationem $-\frac{\beta\beta}{4\gamma} = \alpha$, unde pro γ negativo, fit $\frac{-\beta\beta}{4\times-\gamma} = \frac{\beta\beta}{4\gamma} = \alpha$, hinc $\beta\beta = 4\alpha\gamma = \frac{4g^4}{ff}$, et $\beta = \frac{2gg}{f}$. Quia igitur ſub hac hypotheſi eſt coefficiens γ negativus, habetur æquatio pro una ſpecie $yy = \frac{2gg}{f}x - \frac{gg}{ff}xx$. Pro γ poſitivo fit $-\frac{\beta\beta}{4\gamma} = -gg$, quia $+\alpha$ eſt $= +gg$, unde pro hoc quoque caſu eſt $\beta = \frac{2gg}{f}$, et aequatio pro altera ſpecie fit $yy = \frac{2gg}{f}x + \frac{gg}{ff}xx$. Quia eſt $2f : 2g = 2g : \frac{2gg}{f}$, coefficiens ipſius x eſt tertia proportionalis ad diametrum, in qua abſciſſae capiuntur, ejus-

ejusque conjugatam, quae *parameter* illius diametri vocatur. Poſito hoc parametro $= p$, erit $\frac{2gg}{f} = p$, atque $\frac{gg}{ff} = \frac{p}{2f}$. His ſubſtitutis æquatio pro una ſpecie fit $yy = px - \frac{pxx}{2f}$, et pro altera $yy = px + \frac{pxx}{2f}$, unde concluditur tertia $yy = px$, ſi $f = \infty$, quo caſu eſt p tertia proportionalis ad abſciſſam et applicatam. Sit angulus gCe rectus, et erit $q + \pi - p = 90^\circ$, ideo $\pi = 90^\circ + p - q = 90^\circ - (q - p)$ et $\sin \pi = \cos.(q - p)$. Porro $q + \pi = 90^\circ + p$, hinc $\sin (q + \pi) = \cos.p$, et $\frac{gg}{ff} = \frac{\sin.p.\cos.p}{\sin(q-p)\cos.(q-p)} = \frac{\sin 2p}{\sin 2(q-p)} = \frac{\sin 2p}{\sin 2q.\cos 2q - \cos 2q.\sin 2p}$.

Ergo eſt $\frac{ff}{gg} = \frac{\sin 2q.\cos 2p}{\sin.2p} - \cos 2q = \sin 2q.\cot 2p - \cos 2q$, ex quo fit $\cos 2q + \frac{ff}{gg} = \sin 2q.\cot 2p$, et $\cot 2p = \frac{\cos 2q}{\sin 2q} + \frac{ff}{gg.\sin 2q}$, quæ æquatio ſemper præbet ſolutionem poſſibilem. Datis igitur duabus diametris conjugatis, quæ angulum quemcunque obliquum GCE $= q$ inter ſe comprehendant, ſemper duci poterunt duae aliae diametri conjugatæ, quæ angulum gCe rectum comprehendant. Datur enim angulus GCg ex æquatione $\cot 2p = \frac{\cos 2q}{\sin 2q} + \frac{ff}{gg.\sin 2q}$.

§. 192.

F. 258. Aequationes pro tribus linearum ſecundi ordinis ſpeciebus inventæ adeo univerſales ſunt, ut f quemcunque diametrum, atque g ejus conjugatam, p vero illius diametri parametrum denotare poſſint. Sint igitur CA $= a$ et CE $= b$ duæ ſemidiametri conjugatae lineae ſecundi ordinis orthogonales, quæ vocari ſolent *ſemidiametri principales*, ita ut punctum C ſit curvæ centrum. Sit abſciſſa CP $= x$, applicata PM $= y$, eritque æquatio pro una ſpecie $yy = bb - \frac{bb}{aa}xx$. Si ex centro C, quod pro initio abſciſſarum fuit aſſumtum, ad curvæ punctum M quodcunque ducamus rectam CM, erit CM $= \surd(xx + yy) = \surd(bb - \frac{bbxx}{aa} + xx)$, unde intelligitur, ſi fuerit $b = a$, ſeu CE $=$ CA, fore CM $= \surd bb = b = a$. Hoc ergo caſu omnes rectae ex centro C ad curvam productae inter ſe erunt æquales; quæ cum ſit proprietas circuli, manifeſtum eſt, curvam ſecundi ordinis, cujus binæ diametri conjugatæ ſunt inter ſe æquales, eſſe circulum, cujus adeo æquatio inter coordinatas orthogonales, poſitis CI $= x$ et PM $= y$, erit $yy = aa - xx$ exiſtente radio circuli CA $= a$, quam eandem æquationem ſupra ex natura ciruli invenimus. Quodſi autem non fuerit $b = a$, recta CM per x nunquam poterit rationaliter exprimi. Dabitur autem aliud punctum F in axe ejus conditionis, ut omnes rectae FM ab eodem ab curvam ductae rationaliter exprimi poſſint. Ad quod inveniendum ponatur CF $= f$, atque ob FP $= f - x$, erit $FM^2 = FP^2 + PM^2 = ff - 2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa} = bb + ff - 2fx + \frac{(aa - bb)}{aa}xx$, quæ expreſſio quadratum evadet, ſi fuerit $ff = \frac{(aa - bb)(bb + ff)}{aa}$,

hinc-

[Handwritten margin notes: [illegible] … orthogonales relatae. — Circulus.]

hincque $aaff = (aa-bb)(bb+ff) = aabb + aaff - b^4 - bbff$, et $aaff$ utrinque ſubtracto, $0 = aabb - b^4 - bbff = (aa-bb-ff)\,bb$. Horum igitur factorum unus eſt $=0$, quare cum non ſit $bb = 0$, erit $aa - bb - ff = 0$, hincque porro concluditur $f = \pm\sqrt{(aa-bb)}$. Huiusmodi igitur punctum dabitur geminum in axe AC, utrinque ſcilicet a centro intervallo CF $= \sqrt{(aa-bb)}$ remotum. Patet vero ſimul diametrum a, in qua hæc puncta ſunt ſita, altera b majorem fore, quia $aa = bb + ff$, et hinc quadratum ipſius a quadrato ipſius b majus eſt, quod fieri non poſſet, niſi ſit $a > b$. Diameter haec major a ſua conjugata b ita diſtinguitur, ut ea vocetur *Axis principalis* ſive *transverſus*, dum altera b ejus axis *conjugatus* appellatur. Puncta vero F et G *Foci* ſeu *Umbilici* curvæ dicuntur. Erit autem $FM^2 = aa - 2x\sqrt{(aa-bb)} + \frac{(aa-bb)}{aa}xx$, hincque $FM = a - \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$

$$= AC - \frac{CF \cdot CP}{AC}.$$

Facto CP $= 0$, fiet FM $=$ FE $= a =$ AC, ſumta autem abſciſſa CP $=$ CF, ſeu $x = \sqrt{(aa-bb)}$, recta FM abibit in applicatam FG, quae erit $= \frac{bb}{a} = \frac{CE^2}{AC}$, ſeu fiet applicata in foco tertia proportionalis ad ſemidiametrum principalem et ſemidiametrum conjugatam. Applicata hæc orthogonalis in ipſo foco alterutro erecta nomen *Semiparametri* obtinuit. Tota enim *Parameter* eſt ordinata in F ſeu FG bis ſumta, quae etiam *latus rectum* nuncupatur.* Nemo jam non perſpicit, quod iſta linearum ſecundi ordinis ſpecies, quam exprimit æquatio $yy = \alpha - \gamma xx$, ſeu $yy = bb - \frac{bb}{aa}xx$, abſciſſis in axe transverſo a centro computatis vel $yy = px - \frac{pxx}{2a}$,

Ellipſis.

* Euleri Introductio in Analysin infinitorum. T. II. C. V. De lineis ſecundi ordinis.

 ab-

abſciſſis a vertice computatis, ſit ea ex ſectionibus conicis, quam ſupra *ellipſin* vocavimus, cujus ſpecies eſt *parabola*, poſito axe transverſo a infinito, ad quam ideo generaliter eſt $yy = px$, quicunque diameter pro axe ſumatur, ſive principalis ſive obliquangula. Aequatio pro ellipſi $yy = bb - \frac{bb}{aa}xx$ mutatur in æquationem pro tertia ſpecie linearum ſecundi ordinis, ſi loco $+bb$ ſcribatur $-bb$, quare et conclusiones ex æquatione pro ellipſi deductæ hic quoque valent, ſi ubique $-bb$ loco $+bb$ ſcribatur. Dabuntur ideo in axe duo puncta F et G a centro C intervallo $f = \surd(aa + bb)$ remota, et quidem talia, ut omnis recta FM et GM ex ejusmodi puncto ad curvam ducta per x rationaliter exprimi poſſit. Nimirum fiet $FM = \frac{x\surd(aa + bb)}{a} - a$, atque $GM = \frac{x\surd(aa+bb)}{a} + a$. Ideo applicata orthogonalis in hoc puncto ſit $= \frac{bb}{a}$. Puncta hæc ſunt *Foci* hujus curvæ et diameter orthogonalis in quo ſita ſunt, diameter ſeu *axis transverſus* hujus curvae, ordinata vero per focum ejus *parameter*. Ipſam igitur hanc curvam hyperbolas oppoſitas eſſe, nemo non videt. Ex his autem omnibus quae a §. 183. uſque ad hunc §. 192. ſunt expoſita patet, quod omnis curva ſecundi ordinis ſit vel circulus, vel ellipſis, vel parabola, vel hypevbola, ideoque una ex ſectionibus conicis. Omne igitur problema indeterminatum, quod ad æquationem ſecundi ordinis conducit, per ſectionem quandam conicam geometrice conſtruitur, cujusmodi eſt id, quod ſequitur.

§. 193.

Data baſe AB trianguli ABC et ſumma vel differentia laterum AC et BC, invenire locum apicis C.

SOL

SOL. Ex apice C ad baſin ducatur perpendicularis CD, ac ponatur $AB = b$, quia eſt conſtans. Cum autem AD et CD ſint variabiles, dicatur $AD = x$ et $DC = y$, erit $DB = b - x$, $AC = \sqrt{(xx + yy)}$, et $CB = \sqrt{(DB^2 + DC^2)} = \sqrt{(bb - 2bx + xx + yy)}$. Quodſi igitur primo ſumma laterum $AC + CB$ detur $= a$, quae baſe $AB = b$ major erit, fiet $\sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{(bb - 2bx + xx + yy)} = a$, $\sqrt{(bb - 2bx + xx + yy)} = a - \sqrt{(xx + yy)}$; $bb - 2bx + xx + yy = a^2 - 2a\sqrt{(xx + yy)} + xx + yy$; $-2bx = aa - bb - 2a\sqrt{(xx + yy)}$, vel ſi ponatur $aa - bb = cc$, fiet $-2bx = cc - 2a\sqrt{(xx + yy)}$, vel $2a\sqrt{(xx + yy)} = cc + 2bx$, ideo $4aaxx + 4aayy = c^4 + 4bccx + 4bbxx$, vel $4aayy = c^4 + 4bccx + 4bbxx - 4aaxx$, quare cum ſit $aa - bb = cc$, atque hinc $bb - aa = -cc$, fiet $4aayy = c^4 + 4bccx - 4ccxx$. Quodſi ſecundo ponatur differentia laterum AC et BC data eſſe, eaque ſit $= d$, erit $b > d$, quia in quolibet triangulo quodcunque latus aſſumtum majus eſt differentia reliquorum. Præterea erit $\sqrt{(xx + yy)} - \sqrt{(bb - 2bx + xx + yy)} = d$, et ideo $bb - 2bx + xx + yy = dd - 2d\sqrt{(xx + yy)} + xx + yy$, vel $bb - 2bx = dd - 2d\sqrt{(xx + yy)}$, et $-2bx = dd - bb - 2d\sqrt{(xx + yy)}$. Quare poſito hic $bb - dd = ee$, adeoque $dd - bb = -ee$, fiet $-2bx = -ee - 2d\sqrt{(xx + yy)}$ et $2d\sqrt{(xx + yy)} = 2bx - ee$, hinc $4ddxx + 4ddyy = 4bbxx - 4beex + e^4$, et $4ddyy = e^4 - 4beex + 4bbxx - 4ddxx$ vel $4ddyy = e^4 - 4beex + 4eexx$, ob $bb - dd = ee$. Utroque igitur caſu locus problemati ſatisfaciens eſt ſectio quædam conica. Reſtat ut inveniatur, quaenam ex ſectionibus conicis priori et quaenam poſteriori problematis caſui ſatisfaciat. Quod igitur attinet ad primam aequationem $4aayy = c^4 + 4bccx - 4ccxx$, baſis AB trianguli ACB biſecetur in E, atque loco puncti A jam punctum E ſumatur pro abſciſſarum initio. Ponatur $ED = z$, erit $AE = \frac{1}{2}b = x + z$, adeoque $x = \frac{1}{2}b - z$. Valore hoc pro x in aequatione ſubſtituto fiet $4aayy = c^4 + bbcc - 4cczz$, cum vero ſit $bb = aa - cc$, habetur

F. 259. 260.

tur $4aayy = aacc - 4cczz$ vel $yy = \frac{ee}{4} - \frac{cc}{aa} zz$, quam æquationem eſſe pro ellipſi ultro patet. Hujus enim curvae æquatio, abſciſſis a centro in diametro orthogonali computatis, vocata ſemidiametro principali $= \alpha$, et ſemidiametro conjugata $= \beta$, erat $yy = \beta\beta - \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} xx$, ex qua cum æquatione inventa comparata adparet, fore $\frac{cc}{4} = \beta\beta$, adeoque $\beta = \frac{c}{2}$ et $c = 2\beta$. Praeterea $\frac{cc}{aa} = \frac{4\beta\beta}{aa} = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}$, hincque $4\alpha\alpha = aa$ et $2\alpha = a$. Locus igitur quæſitus in caſu problematis primo eſt ellipſis, cujus diameter orthogonalis eſt a et diameter conjugata $= c$. Factis igitur EF $=$ EG $= \frac{1}{2}a$ erit FG ellipſis quæſitæ axis principalis, tum ducta per E recta HI ad FG normali, et factis EH $=$ EI $= \frac{1}{2}c$ erit HI ipſis axis conjugatus. Puncta vero A et B erunt foci hujus ellipſeos. Poſito enim $z = \pm \frac{1}{2}b =$ EA $=$ EB fit $4aayy = c^4 + bbcc - ccbb = c^4$, proinde $yy = \frac{c^4}{4aa}$, et $y =$ AK $= \frac{c^2}{2a}$, hinc KL $= 2$AK $= \frac{c^2}{a}$, id eſt tertia proportionalis ad axem principalem ejusque conjugatum, ex quo patet KL eſſe parametrum. In caſu problematis ſecundo eſt $4ddyy = e^4 - 4eebx + 4eexx$. Biſecetur et hoc caſu AB in E atque loco puncti A ſumatur E pro initio abſciſſarum. Quare poſito ED $= z$, fiet AD $= x = \frac{1}{2}b + z$, et facta ſubſtitutione erit $4ddyy = e^4 - 2eebb - 4eebz + eebb + 4eebz + 4eezz = e^4 - eebb + 4eezz$. Hic vero eſt $bb = ee + dd$, quare fit $4ddyy = e^4 - e^4 - eedd + 4eezz$, vel $yy - \frac{ee}{4} + \frac{ee}{dd}$

$\frac{ee}{dd}zz$, quam æquationem eſſe pro hyperbolis ultro patet. Erat enim aequatio pro hyperbolis, ſi abſciſſæ a centro in diametro orthogonali computentur, et ſemidiameter orthogonalis ponatur $= \alpha$, ejusque ſemiconjugata $= \beta$, haec $yy = -\beta\beta + \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}xx$. Comparatio hujus æquationis cum ea, quae inventa eſt, dat $-\frac{ee}{4} = -\beta\beta$, ideo $\beta = \frac{e}{2}$ et $e = 2\beta$; porro $\frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} = \frac{ee}{dd} = \frac{4\beta\beta}{dd}$, proinde $4\alpha\alpha = dd$ et $d = 2\alpha$. Sunt igitur in caſu problematis ſecundo hyperbolæ locus quæſitus, quarum axis principalis eſt d et e axis conjugatus. Quodſi ideo fiat EF = EG = $\frac{1}{2}d$, erit FG diameter hujus curvæ orthogonalis. Puncta vero A et B ſunt foci ipſius, quia poſito $z =$ EA = EB $= \pm \frac{1}{2}b$ fit $4ddyy = e^4 - eebb + eebb$ ſeu $4ddyy = e^4$ et $y = \sqrt{\frac{e^4}{4dd}} = \frac{e^2}{2d}$. Dupla igitur ordinata in A vel B eſt tertia proportionalis ad axem transverſum et conjugatum, ex quo patet, eandem eſſe parametrum et adeo A et B focos hyperbolarum. Senneri Elem. An. fin. Sect. X. §. 650.

§. 194.

De aequationibus indeterminatis cuiusque ordinis.

Attente qui perſcrutatus eſt ea, quae hactenus de ſolutione geometrica earum problematum indeterminatorum, quorum conditiones exprimuntur æquatione inter duas variabiles primi vel ſecundi ordinis, ſunt expoſita; is haud difficulter intelliget, omne problema, quod ad æquationem indeterminatam tertii ordinis perducit, conſtrui poſſe per lineam tertii ordinis; illud vero, ex cujus conditionibus eruitur æquatio indeterminata quarti ordinis, per curvam quarti ordinis; et ſic porro

ro

ro. Ex iiſdem vero patet, quod is, qui quodlibet problema indeterminatum ipſi propoſitum geometrice ſolvere cupit, completam curvarum theoriam habere debeat perſpectam, quam in Geometria Subliminori ſumus traditurí. Haec cauſſa eſt, cur in diverſas linearum tertii et altiorum ordinum ſpecies, earumque proprietates, hic non inquirimus. Explicanda vero hoc loco erant linearum ſecundi ordinis proprietates palmariae, quia earundem cognitione carere prorſus nequit, qui veram Analyſis Mathematicae indolem ſibi reddere cupit perſpectam. Unicum hic quoque notaſſe conſultum erit, quod natura linearum in eodem plano deſcriptarum et aliis modis exprimi queat æquatione inter duas variabiles; quorum præter expoſitum præcipuus iſte eſt, vi cujus omnia propoſitae lineae puncta ad unum ali-
F.261. quod punctum plani fixum C referuntur, atque aequatio quaeritur inter rectam variabilem CM $= z$, et angulum ACM $= \varphi$, vel *ſin* φ, *tang.* φ, vel aliam quacunque lineam trigonometricam ad angulum φ relatam. Data enim ejusmodi æquatione, pro quovis angulo ACM definiri longitudo variabilis CM, ſicque punctum curvæ M determinari poteſt. Quodſi pro curva AM data ſit æquatio inter coordinatas orthogonales OP $= x$ et PM $= y$, invenitur aeqnatio pro eadem curva inter angulum ACM $= \varphi$ et CM $= z$, ſi ponatur $y = z\ ſin\ \varphi$ atque $x = z\ coſ\ \varphi$, quia in triangulo rectangulo CPM eſt $\frac{y}{z} = ſin\ \varphi$ atque $\frac{x}{z} = coſ\ \varphi$ (§. 42.). Hinc vice verſa, ſi data ſit æquatio pro curva AM inter variabilem z, et anguli φ ſinum et coſinum; poſito $ſin\ \varphi = \frac{y}{z}$; $coſ\ \varphi = \frac{x}{z}$, atque præterea $z = \sqrt{(xx + yy)}$, reperitur ae-

qua-

quatio pro eadem curva inter coordinatas orthogonales CP et PM. Cf. Euleri Introductio in Anal: Infinit. T. II. C. XVIII. De inventione curvarum ex aliis proprietatibus.

SECTIO XII.

DE
SOLVTIONE PROBLEMATVM NON SIMPLICIVM DETERMINATORVM GEOMETRICA.

§. 195.

Quia æquationes analyticae omnes convenienter reductae oſtendunt modum eliciendi quæſitum ex iis, quæ per litteras denotantur data exprimentes, non tantum arithmetice, ſi data expreſſa ſint per numeros, ſed quoque geometrice, ſi per lineas rectas exhibeantur, vel alia extenſa, quae in Geometria ſolent conſiderari; reſtat, ut explicemus modum invendi radices æquationum per conſtructionem geometricam. Atque cum linea recta ſimpliciſſima ſit earum, quae Geometria conſiderat, quantitatum; ejusmodi potiſſimum quæri ſolent methodi, quibus radices æquationum exhiberi poſſunt per lineas rectas. Poteſt hoc negotium confici multis modis, ſi *poſtulentur* delineationes in plano non tantum lineae rectae et circuli, ſed et omnium curvarum algebraicarum, quæ exprimi poſſunt æquationibus inter duas variabiles, abſciſſam nimirum et applicatam, algebraicis. Quare plenaria omnium problematum non ſimplicium geometrica ſolutio expectari demum poterit ab eo, qui non tantum Geometriæ Elementaris ſed et Sublimioris imbutus eſt ſcientia. Explicare tamen debet ipſa Analyſis

De methodo inveniendi radices aequationum reales per constructionem geometricam.

lyſis methodos huic ſcopo inſervientes generales, ut praeſtantiſſimae hujus Artis inveniendi dignitas atque univerſalis uſus eo diſtinctius poſſit perſpici.

§. 196.

F.262. Unitis duabus æquationibus indeterminatis, quarum quaevis peculiarem definit lineam algebraicam, ſemper producitur æquatio utramque lineam exprimens ad eandem axem et idem abſciſſarum initium relatam (§. 182.). Poſſunt vero ejusmodi linearum ita deſcriptarum una alteram in uno pluribusve punctis ſecare, atque hoc caſu duae earum curvarum applicatæ in puncto interſectionis æquales ſunt. Hac itaque æqualitate ſuppoſita, eliminatis litteris, quae applicatas denotant, inveniuntur abſciſſae, quae ad puncta illa interſectionum pertinent, ex æquationibus, quibus curvæ definiuntur. Ad axem AB atque initium abſciſſarum C deſcripta ſit parabola MDE definita per æquationem $y = -bx + xx$ ſub angulo coordinatarum recto. Ad eundem axem et idem initium abſciſſarum deſcriptus ſit circulus CFD, quem definit aequatio $rr = xx + uu$, littera r radium et u adplicatam denotante: erunt ad puncta P et p, in quibus peripheria circuli parabolam ſecat, adplicatae y et u eaedem. Proinde ad haec puncta interſectionum, in quibus $u = y$, ob $y = -bx + xx$ atque $u = \surd(rr - xx)$, habetur $\surd(rr - xx) = -bx + xx$, atque ſublata irrationalitate $rr - xx = bbxx - 2bx^3 + x^4$ vel $x^4 - 2bx^3 + (bb + 1)x^2 - rr = 0$. Hujus igitur aequationis radices ſunt abſciſſae ad puncta ſectionis, quarum ergo hoc caſu duae ſaltem eſſe poſſunt, uti ex ipſa figura apparet. Generatim enim, ſi aliquae radices aequationis ita repertae imaginariae fuerint, ſectiones quoque illi x reſpondentes imaginariae erunt. Non autem omni x, quae ita elicitur, ſectio quoque realis ſemper reſpondet, propterea quod cum y ponitur $= u$, omnes reperiri debent valores ipſius x, ad quas $y = u$,

etiam-

etiamſi iſtae adplicatae y et u ſint imaginariae. Apud imaginarias enim quantitates æqualitas quoque locum habet, quia v. g. $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$, $x\sqrt{-1} = x\sqrt{-1}$. Ex numero itaque abſciſſarum realium, quae ita reperiuntur, ad numerum interſectionum concludi generatim non poteſt, niſi conſtet, nulli abſciſſae x reſpondere applicatam imaginariam y vel u. Sufficit vero, illud de una conſtare, quia ob $y = u$, ſi una harum adplicatarum realis ſit, altera imaginaria eſſe non poteſt. Proinde ſectionibus imaginariis nullus relinquetur locus, ſi in æquatione pro una earum curvarum y vel u æquetur functioni ipſius x uniformi, atque ipſa hujus curvæ aequatio ſub forma generali $P + Qy = 0$ contineatur, ſi P et Q functiones ipſius x denotent. Tum enim, quia talis curva nullas habet applicatas imaginarias, fieri nequit, ut interſectiones imaginariæ oriantur. In caſu præſenti interſectiones imaginariae locum non habent, quia pro una curvarum aſſumtarum eſt $y = -bx + xx$ functio ipſius x uniformis. Atque proinde a numero radicum æquationis $x^4 - 2bx^3 + (bb+1)x^2 - rr = 0$ realium ad æqualem numerum interſectionum eo caſu tuto concludi poteſt. Hinc quoque viciſſim, ipſis curvis æquationum $y = -bx + xx$ atque $yy = rr + xx$ ad eundem axem atque idem initium abſciſſarum deſcriptis, cum puncta interſectionis appareant, a numero interſectionum ad numerum radicum realium æquationis $x^4 - 2bx^3 + (bb+1)x^2 - rr = 0$ eundem recte concluditur, atque ipſas illas radices exhibent abſciſſae CP et Cp in noſtra figura, quarum igitur duæ ſunt, una poſitiva, altera negativa.

§. 197.

Hiſce ratiociniis nititur methodus generalis inveniendi æquationis cujuscunque non ſimplicis determinatæ radices reales omnes per conſtructionem geometricam. Propoſita enim quacunque ejusmodi æquatione, cujus incognita eſt x, aſſumatur æquatio quædam indeter-

minata ſub forma $P + Qy = 0$ contenta, ubi P et Q ſunt functiones ipſius x, atque in ipſa propoſita introducatur y loco $-\frac{P}{Q}$. Hoc facto enim duae habentur æquationes indeterminatae tales, ut eliminato y, ſubſtituto nimirum valore $-\frac{P}{Q}$ loco y in una earum, ipſa æquatio propoſita reſultet. Deſcriptis jam duabus curvis, quales duae repertae æquationes indeterminatæ definiunt, ad eundem axem, et idem abſciſſarum initium, ex punctis, in quibus iſtæ curvæ ſe interſecant, ducantur applicatae ad axem; erunt abſciſſæ reſpondentes radices æquationis propoſitae reales quæſitae. Hoc modo inveniuntur radices reales æquationis cubicæ $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, ponendo $x^2 = y$, ut fiat $x^3 = xy$. Quo valore in propoſitam æquationem introducto fit $xy + px^2 + qx + r = 0$, vel quoque $xy + py + qx + r = 0$. Conſtruantur ad eundem axem idemque abſciſſarum initium duae curvae, quarum una definitur per æquationem $x^2 = y$, altera per aliquam æquationum hac ſubſtitutione productarum, erunt abſciſſæ ad puncta interſectionum radices æquationis datæ. Idem obtinetur poſito $x^2 + px = y$, ut fiat $x^3 + px^2 = xy$, æquatio vero propoſita ſic mutetur $xy + qx + r = 0$, atque conſtructis eodem modo curvis æquationum $x^2 + px = y$ et $xy + qx + r = 0$. Si propoſita æquatio fuerit biquadratica $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$; ſeparatis prioribus duobus terminis $x^4 + px^3$ compleatur quadratum addendo $\frac{1}{4}p^2x^2$. Hoc quadratum $x^4 + px^3 + \frac{1}{4}p^2x^2$ ponatur $= yy$, ut ſit $x^2 + \frac{1}{2}px = y$; valor $x^4 + px^3 = yy - \frac{1}{4}ppxx$ introducatur in æquationem propoſitam, quæ ſic mutabitur $yy + \frac{1}{4}ppxx + qxx + rx + s = 0$, atque ſi lubet ſubſtituatur hic quoque valor quadrati x^2, qui eſt $y - \frac{1}{2}px$, quo facto producitur $yy - \frac{1}{4}ppy + \frac{1}{8}p^3x + qy - \frac{1}{2}pqx + rx + s = 0$. Conſtructis jam, ut prius

curvis,

curvis, quarum una per æquationem aſſumtam, altera per alterutram ita elicitarum exprimitur, abſciſſæ ad puncta interſectionum erunt radices æquationis propoſitæ reales. Imaginariis interſectionibus locus non relinquitur, quia curva aſſumta utroque caſu eſt generis parabolici.

§. 198.

Nonnunquam ex ipſius problematis determinati conditionibus eruuntur duæ æquationes pro duabus curvis conſtructioni inſervientibus. Sic problema de duplicatione vel multiplicatione quacunque dati cubi (§. 26. *Calc. Ext.*) reducitur ad illud: Inter duas rectas a et b datas invenire duas medias continue proportionales. Sit igitur prima mediarum, quas quaerere debemus, $= x$, et ſecunda $= y$, erit $a : x = x : y$, unde fit prima aequatio $xx = ay$. Deinde erit $x : y = y : b$, unde concluditur altera æquatio $yy = bx$. Eliminando igitur x, invenitur prima mediarum $x = \sqrt[3]{aab}$. Per conſtructionem vero geometricam invenitur eadem x interſectione duarum curvarum, quarum prima æquatione $xx = ay$ repræſentata eſt parabola, cujus parameter $= a$, altera vero æquatione $yy = bx$ repræſentata pariter parabola, cujus parameter eſt b, et cujus abſciſſæ capiuntur in recta ad prioris axem transverſum in vertice A normali. Conſtructa itaque perabola CAM ad axem F. 263. AP et initium abſciſſarum A ex æquatione $yy = bx$; conſtructa praeterea parabola BAM ad eundem axem, idemque initium abſciſſarum ex aequatione $xx = ay$; ex puncto interſectionis M ducatur applicata MP ad axem normalis, abſciſſa AP erit mediarum inter a et b continue proportionalium prima.

§. 199.

Negotium hoc aliter quoque perfici poſſe multis modis, a quovis adtendenti facile perſpicitur; atque ſimul ex his abſtrahi poſſunt regulae, quibus convenien-

 ter

ter aequationum biquadraticis ſuperiorum radices geometrice ſunt detegendae. Lineis in eam rem opus eſt tertii aut quarti aut ſuperiorum quoque ordinum, prout ipſa aequatio propoſita minus vel magis alta eſt. Quando autem aequationes indeterminatas huic ſcopo inſervientes elicimus, ſaepe in curvas incidimus, quarum difficilis eſt conſtructio, ac plerumque ſat longo labore inveſtigandum eſt, quae ſit linea, quam aequatio producta definit. Tota vero conſtructionis geometricae pulchritudo conſiſtit in facilitate executionis, atque proinde in hoc opere praeferendae ſemper ſunt curvae, quae facilius conſtrui poſſunt, iis, quarum difficilior eſt conſtructio. Eum in finem praeſtat fere, duas eligere curvas, quibus uti velimus, atque a poſteriori inquirere quaenam aequationes earum ope conſtrui poſſint. In-

§. 264. cipiamus a lineis rectis omnium linearum ſimpliciſſimis, atque deinde ad quasdam alias progrediamur his difficiliores. Atque ſi duae lineae reſolventes fuerint rectae EM et FM ſe in puncto M interſecantes, ſumta ſit recta EF pro axe in eoque punctum A pro abſciſſarum initio. Ex hoc puncto erigatur ad axem normalis AC rectam EM in B atque FM in C ſecans. Ponatur AE $= a$, AF $= b$, AB $= c$, AC $= e$, abſciſſa AP $= x$ et applicata PM $= y$, erit pro recta EM; $a : c = a + x : y$, vel $ay = ca + cx$, et pro altera FM invenitur $b : e = b - x : y$, vel $by = eb - ex$. Eliminata jam variabili y ex hiſce aequationibus reperitur $bc(a + x) = ae(b - x)$ vel $x = \frac{abe - abc}{bc + ae}$ $= \frac{ab(e - c)}{bc + ae}$. Ideo per interſectionem duarum linearum rectarum conſtrui poteſt aequatio ſimplex $x = \frac{ab(e - c)}{ab + ae}$, ad quam formam omnes omnino aequationes ſimplices revocari poſſunt. Propoſita enim quacunque aequatione ſimplici, forma ipſius generalis haec eſt $Ax + B = 0$.

Quae aequationes construi possint per intersectionem 1) duarum rectarum.

Si

Si cum hac comparetur aequatio $(bc + ae)x - ab(e - c) = 0$, ut termini reſpondentes aequales fiant, poni debet $A = bc + ae$ et $B = -ab(e - c)$. Duabus hiſce aequationibus duae tantum ex quantitatibus conſtantibus a, b, c, e determinantur, proinde duae poſſunt pro arbitrio determinari, quod fiet ponendo $a = b = 1$ hoc vero poſito fiet $A = c + e$ atque $B = c - e$. Proinde $\frac{A + B}{2} = c$, atque $\frac{A - B}{2} = e$. Si igitur datae fuerint coefficientes aequationis ſimplicis $Ax + B = 0$ per lineas rectas, valor ipſius x per lineam rectam ſic exhibebitur: Ducatur recta EF, quae fiat $= 2$, unitate vel data, vel pro arbitrio aſſumenda. Biſecetur EF apud A atque per A ducta AC ipſi EF normali fiat $AB = \frac{A + B}{2}$ et $AC = \frac{A - B}{2}$. Ducantur rectae EB et FC, quae neceſſario ſeinvicem ſecabunt in puncto quodam M, quia ob triangula CAF et CAE apud A rectangula anguli apud E et F fiunt recto minores. A puncto M ad EF demittatur perpendicularis, erit AP valor ipſius x quaeſitus. Non ſine ambagibus ſic invenitur valor quantitatis x, et proinde hac methodo uti raro conſultum eſt, quia breviores ipſa Geometria Elementaris ſuppeditat. Sic quia ex ipſa aequatione $Ax + B = 0$, vel $x = -\frac{B}{A}$ concluditur $A : 1 = -B : -\frac{B}{A}$ ex §. 196. *Cor. Geom. Elem.* obſervatis poſitionibus rectarum A et B, quae ſigna + et − indicant, habetur x per lineam rectam. Praetermittenda vero non erat methodus, quam explicamus,

 adpli-

adplicatio ad caſum hunc ſimpliciſſimum, quo indoles ipſius eo melius poſſit perſpici.

§. 200.

F.265. Lineas rectas ratione facilitatis deſcribendi excipit circulus; quare nunc inquirendum erit, quænam aequationes per interſectionem rectae et circuli conſtrui queant. Deſcripta igitur ſit linea recta EM ad axem AP et initium abſciſſarum A, atque poſitis $AE = a$, $AB = b$, $AP = x$, $PM = y$, erit $a : b = a + x : y$, et $ay = b(a + x)$ aequatio pro linea recta. Ad eundem axem idemque abſciſſarum initium ſit deſcriptus circulus, cujus radius eſt $CM = c$; atque ſi ex centro C ad axem demittatur perpendiculum CD, poſitis $AD = f$, $CD =$ G, erit $DP = x - f$ et $PM - CD = y - g$. Eſt vero ex natura circuli $CM^2 = DP^2 + (PM - CD)^2$ hincque aequatio pro circulo $cc = xx - 2fx + ff + yy - 2gy + gg = (x - f)^2 + (y - g)^2$. Quia jam ex æquatione pro recta concluditur $y = \frac{ab + bx}{a}$, fit $y - g = \frac{a(b - g) + bx}{a} = b - g + \frac{bx}{a}$, atque ipſo hoc valore in altera æquatione ſubſtituto reſultabit hæc æquatio $cc = xx - 2fx + ff + (b - g)^2 + \frac{2b(b - g)x}{a} + \frac{bbxx}{aa}$, ſive

$$\left.\begin{array}{l} + aa \\ + bb \end{array}\right\} xx \left.\begin{array}{l} + 2ab(b - g) \\ - 2aaf \end{array}\right\} x \begin{array}{l} + aa(b - g)^2 \\ + aaff \\ - aacc \end{array} = 0$$

Hujus proinde æquationis radices inveniri poſſunt per lineae rectae atque circuli interſectionem. Omnes vero aequationes quadraticæ in hac forma continentur. Forma enim hujus ordinis æquationum generaliſſima $Axx + Bx + C = 0$ reducitur ad ſuperiorem formam, ſi primo multiplicetur per $\frac{aa + bb}{A}$, ut primi termini

con-

2) rectae et circuli.

conveniant, atque hoc facto habetur $(aa+bb)xx + \frac{B(aa+bb)}{A}x + \frac{C(aa+bb)}{A}$. Deinde coaequatio reliquorum terminorum dabit $2Aab(b-g) - 2Aaaf = B(aa+bb)$, atque $af = b(b-g) - \frac{B(aa+bb)}{2Aa}$. Praeterea eſt $aa(b-g)^2 + aaff - aacc = \frac{C(aa+bb)}{A}$, ex qua aequatione valore ipſius af ſubſtituto deducitur $(aa+bb)(b-g)^2 - \frac{Bb(b-g)(aa+bb)}{Aa} + \frac{BB(aa+bb)^2}{4AAaa} - aacc = \frac{C(aa+bb)}{A}$, atque $(b-g)^2 = \frac{Bb(b-g)}{Aa} - \frac{B(aa+bb)}{4AAaa} + \frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A}$, ergo $b-g = \frac{Bb}{2Aa} \pm \sqrt{\left(\frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A} - \frac{BB}{4AA}\right)}$. Hac igitur aequatione et praecedente $af = b(b-g) - \frac{B(aa+bb)}{2Aa}$ determinantur quantitates f et g, valoribus ipſarum a, b, c pro arbitrio ſumtis. Ipſae vero hae quantitates ita determinari debent, ut $\frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A} - \frac{BB}{4AA}$ fiat quantitas poſitiva, ne quantitas $b-g = AB - CD$ fieret imaginaria. Poſſumus itaque ponere $b=0$, quo facto erit $g = \sqrt{\left(cc + \frac{C}{A} - \frac{BB}{4AA}\right)}$ atque $f = -\frac{B}{2A}$. In aequatione igitur $g = \sqrt{\left(cc + \frac{C}{A} - \frac{BB}{4AA}\right)}$ unam con-

conſtantium g vel c pro arbitrio determinare licet, eoque facto ſimul altera eſt determinata. Poſito proinde $g = \left(\frac{C}{A} + 1\right) : 2 = \frac{C}{2A} + \frac{1}{2}$, ut ſit $\frac{C}{2A} + \frac{1}{2} = \sqrt{(cc - \frac{BB+4AC}{4AA})}$ exinde concluditur $\frac{CC}{4AA} + \frac{C}{2A} + \frac{1}{4} = cc - \frac{BB}{4AA} + \frac{C}{A}$ atque $cc = \frac{CC}{4AA} + \frac{BB}{4AA} - \frac{C}{2A} + \frac{1}{4}$. Subſtitutis his valoribus in æquatione pro circulo; duæ æquationes pro lineis, quarum interſectione inveniuntur æquationis $Axx + Bx + C = 0$ radices, erunt ſequentes $y = 0$, atque $\frac{CC}{4AA} + \frac{BB}{4AA} - \frac{C}{2A} + \frac{1}{4} = xx + \frac{B}{A}x + \frac{BB}{4AA} + yy - (\frac{C}{A} + 1)y + \frac{CC}{4AA} + \frac{C}{2A} + \frac{1}{4}$ vel $xx + \frac{B}{A}x + yy - (\frac{C}{A} + 1)y + \frac{C}{A} = 0$. Si itaque æquationi $Axx + Bx + C = 0$ tribuatur forma $xx + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$, ſcriptis p loco $\frac{B}{A}$ atque q loco $\frac{C}{A}$, ut ſit $xx + px + yy - (q + 1)y + q = 0$, æquatio pro circulo reſolvente erit $xx + px + yy - (q+1)y + q = 0$, ex qua poſito $y = 0$ utique fit $xx + px + q = 0$. Ipſa vero hæc æquatio pro circulo exprimit, abſciſſæ $x = 0$ duplicem reſpondere applicatam, ex æquatione $yy - (q+1)y + q = 0$ inveniendam. Hæc enim reſoluta dat $y = \frac{q+1}{2} \pm \frac{q-1}{2}$, unde fit $y = q$ et $y = 1$, atque exinde admodum facilis deducitur conſtru-

ſit

ſtio, ita ut radium circuli conſtruentis computare non ſit opus. Ducantur enim rectae AB et AD apud A ſeinvicem normaliter ſecantes. Fiat $AE = -\frac{1}{2}p$ et $AF = \frac{q+1}{2}$. Compleatur rectangulum AG, erit G centrum circuli. Deinde capiatur $AD = q$ et $AC = 1$, erunt puncta C et D in peripheria circuli, proinde GC vel GD radius circuli deſcribendi, qui ſecabit axem AB in duobus punctis H et K, eruntque AH et AK radices aequationis quaeſitae, ambae negativae, ſi p et q ſunt poſitivae quantitates; ambae poſitivae, ſi p fuerit negativa, et q poſitiva; una poſitiva et altera negativa, ſi p et q ſint negativae quantitates. F.266.

Ipſa haec reſolutio aequationis quadraticae ex principiis Geometricae elementaris deduci poteſt. Ex proprietate enim circuli §. 203. *Geom.* demonſtrata patet, eſſe $AD : AK = AH : AC$. Quia vero $AK = x$; erit $AH = -p - x$: atque ob $AD = q$ et $AC = 1$, concluditur, eſſe $q : x = -p - x : 1$, proinde $-px - xx = q \times 1 = q$. atque $xx + px + q = 0$.

§. 201.

Conſiderandi jam veniunt duo circuli ſe interſecantes, ponaturque pro primo circulo $AD = a$, $CD = b$, et radius $CM = c$, $AP = x$, $PM = y$, erit $DP = a - x$, $CD - PM = b - y$, atque ex natura circuli $xx - 2ax + aa + yy - 2by + bb = cc$. Pro altero circulo ſit $Ad = f$, $dc = g$, ejusque radius $cM = h$ erit que $xx - 2fx + ff + yy + 2gy + gg = hh$. Poſterior aequatio ſi a priori ſubtrahatur, remanebit $2(f-a)x + aa - ff - 2(b+g)y + bb - gg = cc - hh$, ergo $y = \frac{aa + bb - ff - gg - cc + hh - 2(a-f)x}{2(b+g)}$, ideo $b - y$
F.267. *utrorumque circulorum.*

$$= \frac{bb + 2bg - aa + ff + gg + cc - hh + 2(a-f)x}{2(b+g)}$$

et $a - x = \dfrac{2a(b+g) - 2(b+g)x}{2(b+g)}$. Quia vero eſt $(a-x)^2 + (b-y)^2 = cc$, facta ſubſtitutione invenitur

$$\begin{array}{l} +4(a-f)^2 \\ +4(b-g)^2 \end{array} xx \begin{array}{l} -4(a+f)(b+g)^2 \\ -4(a-f)(aa-ff) \\ +4(a-f)(cc-bb) \end{array} x \begin{array}{l} +(b+g)^4 \\ +2(aa-cc)(b+g)^2 \\ +2(ff-bb)(b+g)^2 \\ +(aa-cc-ff+bb)^2 \end{array} = 0.$$

Hæc æquatio iterum quadratica eſt atque ſub forma generali $Axx + Bx + C = 0$ contenta. Conſtantibus igitur arbitrariis ſimili modo, ut ante determinatis, patet, quamvis aequationem quadraticam quoque per interſectionem duorum circulorum conſtrui poſſe. Simul vero manifeſtum eſt, quod æquatio algebraica quadratica altior per interſectionem duorum circulorum conſtrui non poſſit, quia duo circuli in pluribus, quam duobus punctis ſe interſecare nequeunt. Cum igitur eadem aequatio quadratica conſtrui poſſit per interſectionem rectae et circuli, hæc conſtructio illi, quæ duos circulos requirit, merito praefertur. Denique ex his concludere quoque poſſumus, quod omne problema geometricum, cujus conditiones exprimi poſſunt aequatione quadam quadratica, ſolvi poſſit per Geometriam elementarem.

§. 202.

F. 268. 1) circuli et parabolae. Sit curva GFH parabola, quam ſecet circulus BMm. Ex circuli centro C in axem AP cadat perpendiculum CD, ſitque AP $= x$, PM $= y$, AD $= a$, CD $= b$, radius CM $= c$, erit aequatio pro circulo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = cc$. Sit FB parabolae latus transverſum axi AP hic aſſumtae normale, ſitque AE $= f$, EF $= g$, parabolæ parameter $= 2b$, erit ex natura parabolæ $EP^2 = 2b$ (EF + PM), id eſt $(x-f)^2 = 2b(g+y)$. Inde concluditur $y = \dfrac{(x-f)^2}{2b} - g$, et $y - b = \dfrac{(x-f)^2}{2b} - (b+g)$. Quod ſi

ſi hic valor in priori aequatione ſubſtituatur, eliminabitur y, eritque

$$\frac{(x-f)^4}{4bb} - \frac{(b+g)(x-f)^2}{b} + (b+g)^2 + (x-a)^2 = cc$$

ſive

$$x^4 - 4fx^3 \begin{array}{l} +6ff \\ -4b(b+g)x^2 \\ +4bb \end{array} \begin{array}{l} -4f^3 \\ +4fb(b+g)x \\ -8abb \end{array} \begin{array}{l} +f^4 \\ -4ffb(b+g) \\ +4bb(b+g)^2 \\ +4aabb \\ -4ccbb \end{array} = 0,$$

cujus æquationis radices erunt abſciſſae AP, Ap, Ap, Ap. Inſunt vero in eadem aequatione ſex quantitates conſtantes a, b, c, f, g, h, ubi vero ſumma duarum $b+g$ pro una eſt reputanda, ut quinque ſolum, ponendo $b+g=k$, ſuperſint. Poſito nimirum CD + EF $= b+g = k$ iſta habetur aequatio,

$$x^4 - 4fx^3 \begin{array}{l} +6ff \\ -4bkxx \\ +4bb \end{array} \begin{array}{l} -4f^3 \\ +4fbkx \\ -8abb \end{array} \begin{array}{l} +f^4 \\ -4ffbk \\ +4bbk^2 \\ +4aabb \\ -4ccbb \end{array} = 0,$$

ad quam formam omnis æquatio biquadratica revocari poteſt. Propoſita enim aequatione

$$x^4 - Ax^4 + Bxx - Cx + D = 0,$$

erit comparatione inſtituta

$$4f = A, \text{ vel } f = \tfrac{1}{4}A$$

$$6ff - 4bk + 4bb = B, \text{ ſive } \tfrac{3}{8}AA - 4bk + 4bb = B.$$

Unde cuncluditur

$$k = \frac{3AA}{32b} + b - \frac{B}{4b},$$

$$4f^3 - 4fbk + 8abb = C,$$

ſive $\dfrac{1}{16}A^3 - \dfrac{3}{32}A^3 - Abb + \tfrac{1}{4}AB + 8abb = C,$

unde

unde $a = \frac{A^3}{256bb} + \frac{A}{8} - \frac{C}{8bb}$.

Denique eſt $(ff - 2bk)^2 + 4\,aabb - 4ccbb = D$,

$$ff - 2bk = \frac{B}{2} - 2bb - \frac{AA}{16},$$

et $2ab = \frac{A^3}{128b} + \frac{Ab}{4} - \frac{AB}{16b} + \frac{C}{4b}$. Quibus valoribus ſubſtitutis invenitur aequatio c et b involvens.

§. 203.

Quia in omni aequatione determinata tolli poteſt terminus ſecundus, (§. 110.) ponamus hoc factum eſſe, atque hanc aequationem eſſe conſtruendam

$$x^4 * + Bx^2 - Cx + D = 0.$$

Erit itaque primo $f = 0$, ſecundo $k = b - \frac{B}{4b}$, tertio $a = \frac{C}{8bb}$, atque ob $2bk - ff = 2bb - \frac{B}{2}$, et $2ab = \frac{C}{4b}$, quarto $4b^4 - 2Bbb + \frac{1}{4}BB + \frac{CC}{16bb} - 4ccbb = D$, unde concluditur $64ccb^4 = CC + 4BBbb - 32\,Bb^4 + 64b^6 - 16Dbb$, ideoque $8cbb = \sqrt{(4bb\,(B - 4bb)^2 + CC - 16Dbb)}$. Jam eo diſpiciendum eſt, ut tam c, quam b obtineant valores reales. Ideo ponatur $c = b - \frac{B+q}{4b}$, eritque $CC - 16\,Dbb + 8Bbbq - 32b^4q - 4bbqq = 0$. Duo vero, ut quaeſito ſatisfiat, caſus ſunt diſtinguendi, alter, quo D eſt quantitas poſitiva, ut +EE, alter, quo D eſt quantitas negativa, puta − EE. Sit itaque

I. D quantitas poſitiva, et conſtruenda aequatio

$$x^4 * + Bx^2 - Cx + EE = 0.$$

Pro hoc caſu ponatur $q = 0$, ut ſit $c = \frac{4bb - B}{4b}$, et fiet

fiet $\frac{CC}{16EE} = bb$, unde $b = \frac{C}{4E}$, atque $c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$,

praeterea $k = c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$, $a = \frac{2EF}{C}$, $f = 0$.

II. Sit D quantitas negativa et conſtruenda aequatio

$$x^4 * + Bx^2 - Cx - EE = 0.$$

Hoc caſu fiet $64ccb^4 = CC + 4bb(4bb - B)^2 + 16EEbb$ quae aequatio realem pro c valorem praebet, quidquid pro b aſſumatur. Fiet enim $c =$
$\frac{\sqrt{(CC + 4bb(4bb - B)^2 + 16EEbb)}}{8bb}$. Aſſumto itaque b tali, ut facillima ipſius c conſtructio inde conſequatur, ut ante habebitur $AE = f = 0$, $CD + EF = k = c =$ $\frac{4bb - B}{4b}$, et $AD = a = \frac{C}{8bb}$. Si ponatur $E = 0$, exinde concluditur conſtructio aequationis cubicae $x^3 * + Bx - C = 0$ ope circuli et parabolae.

§. 204.

Sumtis nunc duabus lineis ſecundi ordinis quibuscunque, quarum aequationes ad communem axem et idem abſciſſarum initium relatae ſint

$$ayy + byx + cxx + dy + ex + f = 0$$
$$\text{et } \alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0$$

quae continentur ſub formis

$$P + Qy + Ryy = 0$$
$$\text{et } p + qy + ryy = 0,$$

ſi P et p ſint functiones ſecundi ordinis ipſius x, Q et q, vero primi ordinis, R vero et r conſtantes; eliminabitur y ſecundum regulas §. 34. expoſitas, tumque prodibit aequatio biquadratica. Per interſectionem itaque duarum ſectionum conicarum quarumvis altioris gradus aequationes conſtrui nequeunt, quam biquadraticae. Quare cum idem praeſtari queat ope circuli et parabolae,

haec

haec conſtructio reliquis praefertur. Idem quoque ex natura linearum ſecundi ordinis praevideri poterat, quae a linea recta in duobus, non vero pluribus punctis ſecari poſſunt, unde duae rectae ſectionem conicam in quatuor ſecare poterunt punctis. Cum itaque ſyſtema duarum rectarum ſit ſpecies linearum ſecundi ordinis; patet, duas lineas ſecundi ordinis in quatuor punctis ſe interſecare poſſe. Quodſi haec ratiocinia adplicentur ad duas lineas, quarum una eſt ſecundi, altera tertii ordinis, quae exprimuntur his aequationibus

$$P + Qy + Ryy = 0$$
$$\text{et } p + qy + ryy + sy^3 = 0,$$

6) lineae tertii ordinis et sectionis conicae.

ubi p eſt functio trium dimenſionum, q duarum, r unius, et s quantitas conſtans, per eliminationem ipſius y habebitur aequatio ordinis ſexti. Ideo per interſectionem lineae tertii ordinis cum ſectione conica aequationes ſexto ordine altiores conſtrui nequeunt. Idem ex natura utriusque ordinis patet. Quia enim lineae tertii ordinis a linea recta in tribus ſecari poſſunt punctis, eaedem a duabus rectis, quae junctim ſumtae ſpeciem linearum ſecundi ordinis conſtituunt, in ſex punctis poterunt interſecari. Similibus ratiociniis generaliter demonſtratur, per interſectionem duarum curvarum, quarum una ſit ordinis m, altera ordinis n, conſtrui poſſe omnes aequationes, ordinem mn non excedentes, quia duae ejusmodi curvae in punctis mn ſe invicem ſecare poſſunt.

7) lineae alterius ordinis m et alterius ordinis n.

Cf. Euleri Introductio in Analysin infinitorum T. II. C. XX. De constructione aequationum.

SECT.

SECTIO XIII.

DE SECTIONIBUS ANGULORUM ET ARCUUM CIRCULARIUM.

§. 205.

Poſito radio circuli $= r$ ſemper eſt $(\mathit{ſin.}\, z)^2 + (\mathit{cos.}\, z)^2 = rr$, ſi z angulum quemcunque denotet, cujus producti factores ſunt $\mathit{cos.}\, z + \mathit{ſin.}\, z\sqrt{-1}$ atque $\mathit{cos.}\, z - \mathit{ſin.}\, z\sqrt{-1}$, ita ut ſit $(\mathit{cos.}\, z + \mathit{ſin.}\, z\sqrt{-1}) \times (\mathit{cos.}\, z - \mathit{ſin.}\, z\sqrt{-1}) = rr$, atque $\frac{(\mathit{cos.}\, z + \mathit{ſin.}\, z\sqrt{-1})}{r} \times \frac{(\mathit{cos.}\, z - \mathit{ſin.}\, z\sqrt{-1})}{r} = 1$, quod productum reale eſt, licet factores ſint impoſſibiles. Si loco factoris $\frac{(\mathit{cos.}\, z - \mathit{ſin.}\, z\sqrt{-1})}{r}$ aſſumatur iſte $\frac{\mathit{cos.}\, y + \mathit{ſin.}\, y\sqrt{-1}}{r}$; invenitur productum $\frac{(\mathit{cos.}\, z + \mathit{ſin.}\, z\sqrt{-1})(\mathit{cos.}\, y + \mathit{ſin.}\, y\sqrt{-1})}{rr}$ $= \frac{\mathit{cos.}\, y \cdot \mathit{cos.}\, z - \mathit{ſin.}\, y \cdot \mathit{ſin.}\, z}{rr} + \frac{(\mathit{cos.}\, y\, \mathit{ſin.}\, z + \mathit{ſin.}\, y\, \mathit{cos.}\, z)\sqrt{-1}}{rr}$. Eſt vero $\frac{\mathit{cos.}\, y.\, \mathit{cos.}\, z. - \mathit{ſin.}\, y.\, \mathit{ſin.}\, z}{r} = \mathit{cos}\,(y+z)$, atque $\frac{\mathit{cos.}\, y.\, \mathit{ſin.}\, z + \mathit{ſin.}\, y.\, \mathit{cos.}\, z}{r} = \mathit{ſin}\,(y+z)$, quod patet ex §. 40. ſi in analogiis ibidem inventis loco 1 ſcribatur r. Proinde eſt productum
$$\frac{(\mathit{cos.}\, y + \mathit{ſin.}\, y\sqrt{-1}) \cdot (\mathit{cos.}\, z + \mathit{ſin.}\, z\sqrt{-1})}{rr}$$
=

$= \frac{\cos.(y+z) + \sin(y+z)\sqrt{-1}}{r}$. Eodem modo invenitur $\frac{(\cos.y - \sin.y\sqrt{-1}).(\cos.z - \sin.z\sqrt{-1})}{rr}$ $= \frac{\cos.(y+z) - \sin(y+z)\sqrt{-1}}{r}$. Pari modo invenitur $\frac{(\cos.x \pm \sin.x\sqrt{-1})}{r} \times \frac{(\cos.y \pm \sin.y\sqrt{-1})}{r} \times \frac{\cos.z \pm \sin.z\sqrt{-1}}{r} = \frac{\cos(x+y+z) \pm \sin(x+y+z)\sqrt{-1}}{r}$.

Poſito itaque $x = y = z$ invenitur $\frac{(\cos.z \pm \sin.z\sqrt{-1})^2}{r^2}$ $= \frac{(\cos.2z \pm \sin.2z\sqrt{-1})}{r}$; $\frac{(\cos.z \pm \sin.z\sqrt{-1})^3}{r^3} =$ $\frac{\cos 3z \pm \sin 3z\sqrt{-1}}{r}$. Atque ex his deducitur formula generalis $\frac{(\cos.z \pm \sin.z\sqrt{-1})^n}{r^n} =$ $\frac{\cos.nz \pm \sin.nz\sqrt{-1}}{r}$. Si enim formula haec vera eſt pro $\frac{(\cos.z \pm \sin.z\sqrt{-1})^n}{r^n}$; ea ſimul vera eſt pro $\frac{(\cos.z \pm \sin.z\sqrt{-1})^{n+1}}{r}$. Atque hoc exinde patet, quia $\frac{(\cos.z \pm \sin.z\sqrt{-1})^{n+1}}{r}$ $= \frac{(\cos.z \pm \sin.z\sqrt{-1})^n}{r} \times \frac{(\cos.z \pm \sin.z\sqrt{-1})}{r}$, quod pro-

productum poſito $\frac{(cos.z \pm ſin.z \sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{cos.nz \pm (ſin.nz)\sqrt{-1}}{r}$ invenitur $= \frac{cos.(n+1)z \pm (ſin(n+1)z)\sqrt{-1}}{r}$. Valet vero haec formula pro dignitate prima et ſecunda; hinc pro omnibus, ſi exponens ſit numerus integer, quod hic ſupponitur.

§. 206.

Ex duabus iſtis æquationibus

$$\frac{(cos.z+ſin.z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{cos.nz+ſin.nz.\sqrt{-1}}{r}$$

atque $\frac{(cos.z-ſin.z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{(cos.nz-ſin.nz\sqrt{-1})}{r}$.

concluditur addendo

$$\frac{(cos.z+ſin.z\sqrt{-1})^n+(cos.z-ſin.z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{2\,cos.nz}{r};$$

et ſubtrahendo

$$\frac{(cos.z+ſin.z\sqrt{-1})^n-(cos.z-ſin.z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{2ſin.nz\sqrt{-1}}{r};$$

ex quibus æquationibus denuo concluditur

$$ſin.nz = \frac{(cos.z+ſin.z\sqrt{-1})^n-(cos.z-ſin.z\sqrt{-1})^n}{2r^{n-1}\sqrt{-1}}, \text{ et}$$

$$cos.nz = \frac{(cos.z+ſin.z\sqrt{-1})^n+(cos.z-ſin.z\sqrt{-1})^n}{2r^{n-1}}.$$

Evolutis igitur binomiis hiſce per ſeries, erit

$$ſin.nz = \left(\frac{n}{1}(cos.z)^{n-1}ſin.z - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\right.$$

 (cos. z)

$(cos.z)^{n-3}$ $ſin.z^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}$ $(cos.z)^{n-5}$ $ſin.z^5$ — etc.) : r^{n-1}; atque $cos.nz = (cos.z)^n - \frac{n.n-1}{1.2.}(cos.z)^{n-2}(ſin.z)^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}$ $(cos.z)^{n-4}(ſin.z)^4 - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6.}$ $(cos.z)^{n-6}(ſin.z)^6$ + etc.) : r^{n-1}. Sit $s = ſin.z$, atque $c = cos.z$, eritque

$ſin.z = s$
$ſin\,2z = (2cs : r$
$ſin\,3z = (3ccs - s^3) : rr$
$ſin\,4z = (4c^3s - 4cs^3) : r^3$
$ſin\,5z = (5c^4s - 10ccs^3 + s^5) : r^4$
$ſin\,6z = (6c^5s - 20c^3s^3 + 6cs^5) : r^5$
$ſin\,7z = (7c^6s - 35c^4s^3 + 21ccs^5 - s^7) : r^6$
etc. etc.

$cos.z = c$
$cos\,2z = (cc - ss) : r$
$cos\,3z = (c^3 - 3css) : r$
$cos\,4z = (c^4 - 6ccss + s^4) : r$
$cos\,5z = (c^5 - 10c^3ss + 5cs^4) : r^4$
$cos\,6z = (c^6 - 15c^4ss + 15ccs^4 - s^6) : r^5$
$cos\,7z = (c^7 - 21c^5ss + 35c^3s^4 - 7cs^6) : r^6$
etc. etc.

Si s denotet chordam arcus z, c chordam arcus, qui eſt ipſius z complementum ad ſemicirculum, atque r diametrum circuli; prior formula ſimul eſt pro chorda arcus multipli, atque poſterior pro ejusdem arcus multipli chorda complementi ad ſemicirculum. Formulae enim $\frac{cos.y.\,cos.z - ſin.y.\,ſin.z}{r} = cos.(y+z)$ atque $\frac{cos.y.\,ſin.z + ſin.y.\,cos.z}{r} = ſin(y+z)$ verae etiam ſunt,

Cf. Euleri Introductio in Analyſ. Inf. T. I. C. VIII. De quantitatibus tranſcendentibus ex circulo ortis.

ſunt, r denotante diametrum *ſin* chordam, atque *cos.* chordam complementi ad duos quadrantes. Quia $ss = rr - cc$, et ipſius ss potentiae pariter rationales ſunt, ſubſtituto hoc valore prodit coſinus arcus multipli per ſolum coſinum ſimpli et radium determinatus. Simili quoque modo ex ſinuum formula excluditur coſinus ſubſtituendo $s = \sqrt{(rr - cc)}$, quo tamen facto prodit formula non libera ab irrationalitate.

§. 207.

Ex iisdem formulis eliciuntur aequationes arcus vel anguli in quotcunque partes æquales ſecti ſinum atque coſinum, vel chordam atque chordam complementi definientes. Sit arcus, cujus coſinus eſt a, bifariam ſecti exhibendus coſinus; atque eum in finem in formula $cos. 2z = (cc - ss) : r$ poni debet a loco $2z$, x loco c, erit $a = (xx - ss) : r$, vel $(2xx - rr) : r$, quia $ss = rr - cc$, unde concluditur $xx = \frac{rr + ra}{2}$, atque $x = \pm \sqrt{\frac{rr + ra}{2}}$. Hæc aequatio duplicem indicat coſinum pro arcus, cujus coſinus eſt a, dimidio. Eodem modo patet, æquationem pro coſinu arcus in tres partes æquales ſecti eſſe tertii gradus; et generaliter, æquationem pro coſinu arcus in n partes æquales ſecti n dimenſionum eſſe, atque pro arcu in n partes æquales ſecti inveniri n coſinus. Sic quoque ratio reliquarum aequationum erit comparata, quibus ex data chorda, ſinu, etc. arcus propoſiti quaeritur chorda, ſinus, etc, arcus ſubmultipli. Ipſa igitur quæſtio de angulo in partes n ſecando ita debet eſſe comparata, ut eidem tot reſponſa ſatisfaciant, quot partes arcus propoſiti æquales proponuntur. Quod ut clarius pateat, ad ſequentia attendendum erit.

§. 208.

F. 269. In circulo ADBE ducta ſit chorda AB, eaque erit chorda arcuum omnium ejus circuli ad puncta A et B terminatorum. Primo enim pertinet ad arcum ADB, qui ſit $= \alpha$; deinde, ſi incipiendo ab A et transeundo per DBEA deſcribatur peripheria integra, atque eidem arcus α addatur, erit AB quoque chorda arcus ADBEADB $= \alpha + P$, ſi P integram denotet peripheriam. Eodem modo ſi incipiendo ab A et pergendo verſus D deſcribatur peripheria ADBEA, bis ter ſicque porro, adjecto ſingulis vicibus arcu ADB, ſemper habebitur arcus incipiens in A et terminatus in B. Dicta ergo peripheria $=$ P et arcu AD $= \alpha$, eſt recta AB communis chorda arcuum α, $\alpha + P$, $\alpha + 2P$, $\alpha + 3P$, ... $\alpha + mP$, notante m integrum poſitivum quemvis. Obſervandum vero eſt, etſi chorda AB arcubus his omnibus quantitate eadem reſpondeat, ſigno tamen, quod poſitionem ejusdem indicat, eandem non eſſe. Scilicet, uti coſinus et tangentes arcuum quadrante majorum, ſemicirculo minorum, iidem ſunt quantitate cum coſinibus et tangentibus arcuum quadrante minorum, ſignis tamen oppoſitis gaudent; ita chorda arcus α peripheria minoris poſitiva aſſumta arcuum $\alpha + P$, $\alpha + 3P$, ... $\alpha + (2k+1)P$ chordae negativae ſunt, ſed arcuum $\alpha + 2P$, $\alpha + 4P$, $\alpha + 6P$ - - - $\alpha + 2kP$ poſitivae, ſi k ſit integer poſitivus. Concipiatur enim AB circa A tanquam centrum revolvi, puncto B peripheriam BEAD transeunte, manifeſtum eſt, ubi B venit in A, evaneſcere BA, et deinde cum B pertranſit arcum ADB renaſci ſub conditione oppoſita. Cum igitur ad arcum AB addendo peripheriam integram, chorda quavis vice *ſemel* per ſtatum evaneſcentiae tranſeat, conſequens eſt, ut alternatim poſitiva et negativa renaſcatur. Chorda igitur + AB pertinet ad arcus

I.) α, $\alpha + 2P$, $\alpha + 4P$ . . . . . $\alpha + 2kP$

et

et chorda AB ad arcus

II.) $\alpha+P$, $\alpha+3P$, $\alpha+5P$ . . . $\alpha+(2k+1)P$

Pertinet vero etiam chorda AB ad arcum BEA $= P-\alpha$, BEADBEA $= 2P-\alpha$, et ſic porro addendo ſemper peripheriam integram. Ideo ex præcedentibus ſimul intelligitur, pertinere chordam + AB ad arcus

III.) $P-\alpha$, $3P-\alpha$, $5P-\alpha$ . . . $(2k+1)P-\alpha$

Sed chordam − AB ad arcus

IV.) $2P-\alpha$, $4P-\alpha$, $6P-\alpha$ . . . . . $2kP-\alpha$

Quaerere igitur chordarum ope arcum, qui ſit $\frac{1}{n}$ arcus chordae datae AB, eſt quaerere chordas omnes arcuum omnium, quorum quilibet eſt $\frac{1}{n}$ arcus alicujus ſeriebus I et III contenti, ſi chorda AB ſumatur poſitiva, ſed ſeriebus II et IV contenti, ſi chorda ſit negativa.

§. 209.

Generalis definitio ſinus et coſinus hæc eſt: ad duo F. 270. extrema arcus alicujus puncta ductae ſint rectae ex centro, et ex alterutro extremo B in rectam ad alterum extremum, ſi opus eſt productam, demiſſum perpendiculum BD; erit hæc BD ſinus arcus cujusvis easdem conditiones habentis, et pars CD rectae CA inter centrum et ſinum intercepta cujusvis ejusmodi arcus coſinus. Cum ergo earum, quae ex centro ad arcus extrema ductae ſunt, rectarum altera per B non tranſiens, circulum in duobus punctis A et E ſecare poſſit; arcus omnes, quibus communis eſt ſinus BD, communem habent terminum B, alter vero illorum terminus eſt vel A vel E. Creſcente arcu AB notum jam eſt, creſcere ſinum uſque ad quadrantem, deinde rurſus decreſcere, et in E evaneſcere, ubi arcus AB $= \frac{1}{2}P$, continuato deinde arcu ultra E ſinum renaſci negativum, eaque conditione creſcere et decreſcere denuo ſi arcus excedat $\frac{1}{2}P$, donec ad arcum $= P$ iterum evaneſcat. Ita qualibet ſemiperi-

pheria addita ſinus tranſit per o in ſtatum oppoſitum. Si itaque ſit arcus AB $= \alpha$; poſitivus ſinus BD ſpectat ad hanc arcuum ſeriem

I.) $\alpha,\ \alpha + P,\ \alpha + 2P,\ \ldots\ \alpha + kP$

negativus autem ad ſequentem

II.) $\alpha + \frac{1}{2}P,\ \alpha + \frac{3}{2}P,\ \alpha + \frac{5}{2}P\ \ldots\ \alpha + \frac{2k-1}{2}P.$

Praeterea cum BD ſit etiam ſinus arcus BbE $= \frac{1}{2}P - \alpha$, ſinus poſitivus BD ſpectat ad arcus

III.) $\frac{1}{2}P - \alpha,\ \frac{3}{2}P - \alpha\ \ldots\ \frac{2k-1}{2}P - \alpha$

negativus vero ad arcus

IV.) $P - \alpha,\ 2P - \alpha,\ \ldots\ (k+1)P - \alpha.$

Quærere itaque ſinum, qui ſpectet ad arcum $\frac{1}{n}$ arcus, cujus ſinus eſt + BD, eſt quærere tot ſinus diverſos, quot pertinent ad arcus I, III, diviſos ſingulos per n.

Coſinus idem poſitivus CD ſpectat ad arcus

I.) $\alpha,\ \alpha + P,\ \alpha + 2P,\ \alpha + 3P\ \ldots\ \alpha + mP$

pariter atque ad arcus

II.) $P - \alpha,\ 2P - \alpha,\ 3P - \alpha,\ \ldots\ mP - \alpha$

Coſinus − CD vero pertinet ad arcus

III.) $\frac{1}{2}P - \alpha,\ \frac{1}{2}P - \alpha + P,\ \frac{1}{2}P - \alpha + 2P\ \ldots\ \frac{1}{2}P - \alpha + mP,$

et præterea ad arcus

IV.) $\frac{1}{2}P + \alpha,\ \frac{1}{2}P + \alpha + P,\ \frac{1}{2}P + \alpha + 2P,\ \ldots\ \frac{1}{2}P + \alpha + mP$

Quaerere itaque coſinum, qui pertinet ad arcum $\frac{1}{n}$ arcus, cujus coſinus eſt + CD, eſt quaerere tot coſinus diverſos, quot pertinent ad arcus I., II, diviſos ſingulos per n.

Similia de tangentibus, cotangentibus, ſecantibus vera ſunt, quod cuivis adtendenti facile patet.

§. 210.

§. 210.

Datus ſit coſinus $+CD$, ſitque arcus, ad quem pertinet hic coſinus, in partes quotcunque aequales ſecandus, atque ſecandi erunt omnes arcus iſti α, $P-\alpha$, $P+\alpha$, $2P-\alpha$, $2P+\alpha$, $3P-\alpha$, $3P+\alpha$, et ita porro. Sit igitur primo in duas partes ſecandi; erunt partium eae, quae ab A inchoantur, $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\alpha$, $P-\frac{1}{2}\alpha$, $P+\frac{1}{2}\alpha$; $\frac{3}{2}P-\frac{1}{2}\alpha$, etc. Sed partium harum quinta eodem puncto terminatur, quo prima, ſexta eodem quo ſecunda, idque continuo ita in orbem redit. Si enim arcus inter punctum A et quodcunque punctum peripheriae B vel F interceptus dicatur hujus puncti B vel F diſtantia a puncto A ſecundum partem datam, quae hic ſumitur ABEF, et ita porro; ſique α denotet arcum AB peripheria minorem, P vero denotet ipſam peripheriam; eadem erunt puncta peripheriae, quorum diſtantiae a puncto A ſunt α, $P+\alpha$, $2P+\alpha$, et ita porro, quotiescunque peripheria repetatur. Atque ſemper prodibit diſtantia minima vel arcus AB, ſi a data quacunque diſtantia peripheria, quam notet P, quoties fieri poteſt, ſubtrahatur. Quatuor ergo tantum puncta erunt, quibus arcus quaeſiti terminantur. Praeterea duo quaevis puncta, quorum diſtantiae ſecundum ABEF in peripheria captae diverſae quidem ſunt, ſed ita, ut earum una reducatur ad minimam α, altera autem ad $P-\alpha$ itidem minimam; vel una ad minimam $\frac{1}{2}P-\alpha$, altera ad minimam $\frac{1}{2}P+\alpha$, id eſt, quorum diſtantiae minimae ſimul additae peripheriam complent, eundem habent coſinum. Jam arcuum inventorum $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\alpha$, $P-\frac{1}{2}\alpha$ extremis atque mediis ſibi invicem additis fit $\frac{1}{2}\alpha+P-\frac{1}{2}\alpha=P$, atque $\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\alpha=P$. Ideo ſi puncta ſecantia determinare velimus per arcuum coſinus; pluribus quam duobus coſinibus ad hanc ſectionem abſolvendam opus non erit; pro quibus ii poterunt ſumi, qui pertinent ad arcus $\frac{1}{2}\alpha$, et $\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\alpha$.

Si arcus α ſit triſecandus, erunt arcuum pariter ſecandorum partes, quae inchoantur apud A, iſtae $\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{1}{3}P-\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{1}{3}P+\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{2}{3}P-\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}\alpha$, $P-\frac{1}{3}\alpha$, $P+\frac{1}{3}\alpha$, etc, quarum partium poſtrema eodem puncto terminatur, quo prima. Atque eodem modo, ut ante concludendo invenitur, ſex tantum eſſe puncta diverſa, quibus omnes arcus quæſiti terminantur; quæ per tres coſinus dantur, quia arcubus legitime junctis, duo quilibet $\frac{1}{3}\alpha$ et $P-\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{1}{3}P-\frac{1}{3}\alpha$ et $\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{1}{3}P+\frac{1}{3}\alpha$ et $\frac{2}{3}P-\frac{1}{3}\alpha$ peripheriam complent. Abſolvetur itaque hæc ſectio per ſolos coſinus arcuum $\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{1}{3}P+\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}\alpha$. Eodem modo, ſi in quatuor partes aequales ſecandus proponatur arcus, quatuor reperientur coſinus, per quos iſtae ſectiones univerſaliter dantur. Si in quinque partes ſecandus erit arcus α, quinque coſinibus res abſolvetur et generatim tot coſinibus, in quot partes arcus ſecandus proponitur. Similia ratiocinia erunt inſtituenda, ſi chordae, vel ſinus, vel tangentis, etc, ope arcus ſecandus ſit.

§. 211.

Si ex formulis pro ſinibus §.206. inventæ eliminentur poteſtates pares ipſius s, ponendo $rr-cc$ loco ss, inveniuntur formulæ ſequentes

$$\begin{aligned}
\textit{ſin.}\ z &= s\\
\textit{ſin}\ 2z &= 2cs : r\\
\textit{ſin}\ 3z &= (4cc-rr)s : rr\\
\textit{ſin}\ 4z &= (8c^3-4rrc)s : r^3\\
\textit{ſin}\ 5z &= (16c^4-12r^2c^2+r^4)s : r^4\\
\textit{ſin}\ 6z &= (32c^5-32r^2c^3+6r^4c)s : r^5\\
\textit{ſin}\ 7z &= (64c^6-80r^2c^4+24r^4c^2-r^6)s : r^6
\end{aligned}$$

et ita porro.

Quodſi itaque univerſa circuli peripheria in datum numerum partium æqualium ſecanda ſit; ſequentem in modum erit ratiocinandum.

Sinus integræ circuli peripheriae eſt $= 0$. Sed ſi ſecan-

ſecandus proponatur arcus, cujus ſinus eſt = o; ſecanda erit $\frac{1}{2}P$, P, $\frac{3}{2}P$, 2P, $\frac{5}{2}P$, et ita porro. Omnium enim horum arcuum, qui inchoati apud A vel apud E per idem punctum A terminantur, ſinus itidem eſt = o. Quotcunque fuerint partes, in quas arcus iſti ſecandi ſunt, ſemper inter eaſdem reperientur $\frac{1}{2}P$, P, $\frac{3}{2}P$, 2P, et ita porro, quorum ſinus = o. Si biſectio imperetur, partes erunt $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{2}P$, $\frac{3}{4}P$, P, $\frac{5}{4}P$, $\frac{3}{2}P$, etc; ſi triſectio: erunt partes $\frac{1}{6}P$, $\frac{1}{3}P$, $\frac{1}{2}P$, $\frac{2}{3}P$, $\frac{5}{6}P$, P, et ita porro. Atque inter has partes omnes eae reperiuntur, quarum ſinus eſt nihilum. Poſſunt autem hæ ſectiones in univerſum negligi, quia ducta diametro ultro ſe manifeſtant. Reliquae ſectiones ſic reperiuntur. Pro arcu, cujus ſinus eſt o, biſecando, habemus $2cs : r = 0$, et proinde vel $s = 0$, vel $c = 0$, vel utrumque, quia r eſt datæ magnitudinis. Puncta vero, ad quae $s = 0$, non quæruntur. Eſt itaque $c = 0$, quod indicat, rectam, quæ imperatam ſectionem præſtet, diametro AB in centro normaliter inſiſtere. Pro triſectione eſt $(4cc - rr)s : rr = 0$, et quia non eſt $s = 0$ ex hypotheſi, erit $4cc - rr = 0$, et $4cc = rr$, unde $c = \pm \frac{1}{2}r$. Pro ſectione in quatuor partes invenitur $8c^3 - 4rrc = 0$, ideo $2c^2 - rr = 0$, $c = \pm rr^{\frac{1}{2}}$. Pro ſectione in quinque partes æquales eſt

$$16c^4 - 12r^2c^2 + r^4 = 0;\quad c^4 - \frac{3}{4}r^2c^2 = -\frac{r^4}{16};\quad cc =$$

$$\frac{3}{8}r^2 \pm \sqrt{\frac{5}{64}}\,r^2,\ \text{vel}\ cc = rr \times \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8},\ \text{ergo}\ c =$$

$$\pm r\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}}.$$ Pro ſextiſectione eſt $32c^5 - 32r^2c^3$

$$+ 6r^4c = 0;\quad c^4 - r^2c^2 = -\frac{3}{16}r^4;\quad cc = \frac{rr}{2} \pm$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{16}r^4},\ \text{vel}\ cc = \frac{1}{2}rr \pm \frac{1}{4}rr = \frac{2rr \pm rr}{4};\ \text{ergo}\ c = \pm$$

$\frac{1}{2}r\sqrt{(2\pm 1)}$; id eſt duo c erunt $\pm \frac{1}{2}r$, et duo c reliqui $= \pm \frac{1}{2}r\sqrt{\frac{1}{2}}$. Si ſeptiſectio imperetur, erit $64c^6 - 80rrc^4 + 24r^4c^2 - r^6 = 0$, qua æquatione reſoluta ſectio quæſita dabitur. Eodem modo pro quavis alia ſectione concludendum erit.

§. 212.

Poteſt itaque circuli peripheria dimidia, in quemlibet numerum partium, qui non excedit ſenarium, geometrice dividi, quo facto tota peripheria in bis tot partes aequales dividitur. In ſeptem vero partes æquales ſi dimidia peripheria vel integra dividenda ſit, aequatio invenitur, quæ circuli et lineae rectæ interſectione ſolvi non poteſt. Tanto minus diviſiones in numerum partium hoc majorem in poteſtate Geometriæ Elementaris ſunt, niſi, arcus continuo biſecando ex aliqua priorum deduci poſſunt. Sic peripheria in decem partes æquales diviſa geometrice dividitur in 20, in 40, et ita porro. Poſſunt ex hiſce latera figurarum regularium circulo dato inſcriptorum brevi calculo deduci. Sit AB tertia pars dimidiae peripheriae, erit BAF tertia pars peripheriae integræ, et BF latus trigoni regularis circulo inſcribendi. Cum autem ſit $BD = \sqrt{(CBq - CDq)}$, erit generatim pro omnibus figuris regularibus $BF = 2\sqrt{(CBq - CDq)}$. Cum igitur ad triſectionem ſit $CD = \frac{1}{2}r$, erit $BF = 2\sqrt{(rr - \frac{1}{4}rr)}$. Sic pro quadrilatero regulari invenitur $BF = 2\sqrt{(rr - \frac{1}{2}rr)} = 2r\sqrt{\frac{1}{2}} = r\sqrt{2}$; Pro pentagono ob $CDq = rr\frac{3+\sqrt{5}}{8}$, quia CD hic eſt coſinuum repertorum maximus, eſt $BF = 2\sqrt{\left(rr - rr \times \frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)}$

$$= 2\sqrt{\frac{(5rr - rr\sqrt{5})}{8}} = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$ Sit AB ſexta pars ſemiperipheriae, erit BF latus hexagoni aliunde notum, CD ad hunc caſum iterum coſinuum repertorum maximus

mus erit, ergo $cc = \frac{3}{4}rr$, atque BF $= 2\sqrt{(rr - \frac{3}{4}rr)} = 2\sqrt{\frac{1}{4}rr} = r$. Segneri Elem. An. Inf. Sect. VIII. p. 438 – 459.

§. 213.

Dato latere pentagoni ſimul habetur latus decagoni. Poteſt tamen quoque latus AB decagoni regularis circulo, cujus radius eſt CA $= r$, inſcribendi quæri ſequentem in modum. Arcus AB eſt $\frac{1}{10}$ P, ſi P denotet peripheriam. Ideo angulus ACB $= 36°$, triangulum vero ABC eſt aequicrurum, ideoque angulus ABC = CAB $= 72°$. Producto itaque latere BA verſus D fit angulus DAC $= 108°$. Fiat AD = AC, erit ADC = ACD $= 36°$, et proinde DCB $= 72°$. Sunt itaque triangula ABC et BDC ſimilia, ideoque BD : BC = BC : AB. Sit AB $= x$, erit BD $= r + x$, et proinde $r + x : r = r : x$, vel $r : x = r + x : r$, unde latus decagoni invenitur per conſtructionem §. 200. explicatam. Ex analogia $r : x = r + x : r$ iſta quoque deducitur $r : x = x : r - x$ (§. 186. *Geom. Elem.*) unde fit $xx = rr - rx$. Latus itaque decagoni invenitur ſecando radium eo modo, ut quadratum ſegmenti majoris æquale ſit rectangulo comprehenſo ſub radio integro et ſegmento minore, quam ſectionem VETERES dicunt *ſectionem media et extrema ratione.* F. 271.

Hinc deducitur, lateris pentagoni quadratum æquale eſſe quadrato lateris decagoni cum quadrato radii ſimul ſumto. Sit enim radius AE $= r$, latus decagoni AF $= y$, latus pentagoni AB $= x$, erit AG $= \frac{1}{2}x$, GE $= \sqrt{(rr - \frac{1}{4}x^2)}$, FG $= y - \sqrt{(rr - \frac{1}{4}xx)}$. Ergo $yy = \frac{1}{4}xx + rr - 2r\sqrt{(rr - \frac{1}{4}xx)} + rr - \frac{1}{4}xx = 2rr - 2r\sqrt{(rr - \frac{1}{4}xx)}$; unde concluditur $2r\sqrt{(rr - \frac{1}{4}xx)} = 2rr - yy$; $4r^4 - rrxx = 4r^4 - 4rryy + y^4$; $4rryy - y^4 = rrxx$; F. 272.

atque $xx = \dfrac{4yy - y^4}{rr}$. Eſt vero $y = -\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{5}{4}rr}$; ideo

$yy = \frac{6}{4}rr - r\sqrt{\frac{5}{4}rr}$; $y^4 = \dfrac{14}{4}r^4 - 3r^3\sqrt{\frac{5}{4}rr}$. Proinde xx

=

$= \frac{24}{4} rr - 4r\sqrt{\tfrac{5}{4}rr} - \left(\frac{14}{4} r^4 - 3r^3 \sqrt{\tfrac{5}{4}rr}\right) : rr =$
$\frac{24}{4} rr - 4r\sqrt{\tfrac{5}{4}rr} - \frac{14}{4} rr + 3r\sqrt{\tfrac{5}{4}rr} = \frac{10}{4} rr - r\sqrt{\tfrac{5}{4}rr}$
$= rr + \tfrac{6}{4}rr - r\sqrt{\tfrac{5}{4}rr} = rr + yy$. Quæſito itaque latere hexagoni ED, erit DC latus pentagoni, ſi angulus BEC ſit rectus.

§. 214.

Quia eſt $\frac{\text{tang.}\, z}{r} = \frac{\text{ſin.}\, z}{\text{cos.}\, z}$, ſi r denotet radium circuli, atque z angulum quemcunque; erit $\text{tang.}\, nz = \frac{\text{ſin.}\, nz}{\text{cos.}\, nz} r$, atque $\text{cos.}\, z = \frac{\text{ſin.}\, z}{\text{tang.}\, z} r$. Excluſo communi terminorum in ſeribus pro $\text{ſin.}\, nz$ atque $\text{cos.}\, nz$ diviſore r^{n-1}, ad abbreviandum calculum pro coefficientibus ſcribantur litteræ A, B, C, D, E, etc, et pro coefficientibus $\text{ſin.}\, nz$ litteræ P, Q, R, S, etc; erit $\text{tang.}\, nz =$

$$\frac{Pr(\text{cos.}\, z)^{n-1}\, \text{ſin.}\, z - Qr(\text{cos.}\, z)^{n-3}\, \text{ſin.}\, z^3 + Rr(\text{cos.}\, z)^{n-5}\, \text{ſin.}\, z^5 - \text{etc.}}{(\text{cos}\, z)^n - A(\text{cos}\, z)^{n-2}\, \text{ſin}\, z^2 + B(\text{cos}\, z)^{n-4}\, \text{ſin}\, z^4 - C(\text{cos}\, z)^{n-6}\, \text{ſin}\, z^6 + \text{etc.}}$$

Subſtituto in hac formula valore $\text{cos.}\, z = \frac{\text{ſin.}\, z}{\text{tan}\, z} r$, habetur iſta formula pro tangente anguli multipli:

$$\text{tang.}\, nz =$$
$$\frac{\frac{Pr^n\, \text{ſin.}\, z^n}{\text{tang.}\, z^{n-1}} - \frac{Qr^{n-1}\, \text{ſin.}\, z^n}{\text{tang.}\, z^{n-3}} + \frac{Rr^{n-4}\, \text{ſin.}\, z^n}{\text{tang.}\, z^{n-5}} - \frac{Sr^{n-6}\, \text{ſin.}\, z^n}{\text{tang.}\, z^{n-7}} + \text{etc.}}{\frac{r^n\, \text{ſin.}\, z^n}{\text{tang.}\, z^n} - \frac{Ar^{n-2}\, \text{ſin.}\, z^n}{\text{tang.}\, z^{n-2}} + \frac{Br^{n-4}\, \text{ſin.}\, z^n}{\text{tang.}\, z^{n-4}} - \frac{Cr^{n-6}\, \text{ſin.}\, z^n}{\text{tang.}\, z^{n-6}} + \text{etc.}}$$

Numeratore igitur et denominatore per $\text{ſin.}\, z^n$ diviſo, atque per $\text{tang.}\, z^n$ multiplicato, habetur formula tangentem anguli multipli ex data tangente anguli ſimplici exhibens iſta

tang.

$$tang.\, nz =$$

$$\frac{Pr^n\, tg.z - Qr^{n-2}(tg.z)^3 + Rr^{n-4}(tg.z)^5 - Sr^{n-6}(tg.z)^7 + etc.}{r^n - Ar^{n-2}(tang.z)^2 + Br^{n-4}(tg.z)^4 - Cr^{n-6}(tg.z)^6 + etc.}$$

vel ſubſtitutis valoribus P, Q, R, S, etc, A, B, C, etc,

$$tang.\, nz = \Big(\frac{n}{1} r^n\, tang.z - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} r^{n-2}(tg\, z)^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.}{1.2.3.4.5} r^{n-4}(tang.\, z)^5 - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n.6}{1.2.3.4.5.6.} r^{n-6}(tg.z)^7 + etc.\Big)$$

$$:\Big(r^n - \frac{n.n-1}{1.2} r^{n-2}(tg.z)^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} r^{n-4}(tang.z)^4 - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.}{1.2.3.4.5.6.} r^{n-6}(tang.z^6 + etc.\Big).$$

Eodem modo habetur formula pro cotangente anguli multipli ex formulis $\frac{cot.z}{r} = \frac{cos.z}{ſin.z}$, $ſin.z = \frac{cos.z}{cot\, z} r$, $\frac{cot.nz}{r} = \frac{cos.nz}{ſin.nz}$. Quin et formulae generales pro ſecante vel coſecante, vel ſinu verſo anguli multipli ſimilem in modum invenirentur, ſi quis earum indigeret.

SECT.

SECTIO XIV.

DE

INVESTIGATIONE RADICUM AE
QUATIONIS IMPOSSIBILIUM.

§. 215.

Quodſi æquatio quædam algebraica omnes radices h
beat impoſſibiles, vel ſi reales adſint, æquatio pe
reales ſimplices ex his radicibus formatas ante divi
fuerit; una methodus radices quoque impoſſibiles inve
niendi ſequentibus nititur ratiociniis. Quodſi ſeri
quantitatum quarumcunque, quarum termini ex part
reales ſunt et ex parte imaginarii, ſit $= 0$; omnes te
mini reales ſimul ſumti ſunt $= 0$, atque omnes imag
narii ſimul ſumti pariter ſunt $= 0$. Sit enim ſumm
realium $= R$, et ſumma imaginariorum $= I$; erit
hypotheſi $R + I = 0$. Niſi itaque ſit $R = 0$ et $I = 0$, fore
$R = -I$, reale æquale imaginario, quod eſſe nequit. Dein
de ſupra §. 98. jam demonſtravimus, quod radix impo
ſibilis quæcunque æquationis algebraicae ſequentem h
beat formam $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, ubi α et β ſunt quantitat
reales. Sit itaque propoſita æquatio algebraica quæ
cunque $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + r = 0$
cujus radices omnes ſunt impoſſibiles; atque loco x ſub
ſtituatur $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, et facta reductione duae invenien
tur partes, una realis, altera imaginaria, quarum qu
vis ſigillatim ſumta nihilo æquatur. Diviſa jam part
imaginaria per $\sqrt{-1}$, quam continebunt omnes ipſiu
termini, duæ habentur æquationes omnino reales du
incognitas α et β continentes, per eliminationis metho
dum inveniendas.

§. 216.

§. 216.

Quia radices æquationum impoſſibiles ita ſunt comparatae, ut æquationum, per quas duæ iſtæ radices impoſſibiles exhibentur, una ducta in alteram, æquatio quadratica realis rationalis producatur; et proinde omnis æquatio, cujus radices omnes impoſſibiles ſunt, conſtet ex æquationibus quadraticis realibus in ſe invicem ductis: ipſæ radices impoſſibiles invenientur, ſi factores æquationis quadratici hujus formæ $p - qx + rxx = 0$ inveſtigentur, reales quidem, ſed ita ut harum æquationum quadraticarum radices ſint impoſſibiles. His alia innititur methodus radices impoſſibiles aequationis propoſitae inveniendi. Ipſa vero hæc methodus ſimul manifeſtabit, quomodo ſi x ſpectetur ut variabilis, cujuscunque functionis rationalis integrae factores duplices reales inveniri queant, ſi factores agnoſcat ſimplices impoſſibiles, atque hæc inveſtigatio opus eſt maximi momenti, ut in ſequentibus docebitur. Quoniam res eodem redit, atque ipſam inveſtigationem reddit generaliorem; conſideremus formam functionis variabilis x generalem iſtam $\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \varepsilon x^4 +$ etc.; atque hujus functionis quaeramus factores reales duplices formæ $p - qx + rxx$. Tum enim ſi $\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc} = 0$; erit $p - qx + rxx = 0$, unde æquationis radices impoſſibiles per methodum reſolvendi æquationes quadraticas facile eliciuntur.

§. 217.

Trinomium autem $p - qx + rxx$ habebit factores ſimplices imaginarios, ſi fuerit $4pr > qq$ ſeu $\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1$. Cum igitur ſinus et coſinus angulorum intra limites 0 et 1 contineantur, pro radio $= 1$; formula $p - qx + rxx$ factores habebit impoſſibiles; ſi fuerit $\frac{q}{2\sqrt{pr}} =$ ſinui

vel

vel coſinui cujusdam anguli, qui non ſit angulo recto, vel ejus multiplo aequalis. Ad vitandam vero irrationalitatem aſſumamus hanc formam $pp - 2pqx\ coſ.\phi + qqxx$, cujus factores ſimplices impoſſibiles erunt $qx - p(cos\ \phi \pm \sqrt{-1}.\ ſin.\ \phi)$. Ubi patet, quod in caſu $cos\ \phi = \pm 1$, ob $ſin\ \phi = 0$, ambo factores fiant aequales et reales. Propoſita igitur functione rationali integra $\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \epsilon x^4 +$ etc, ejus factores duplices reales, qui exhibent ipſius factores ſimplices impoſſibiles, eruentur, ſi determinentur quanta p et q cum angulo ϕ, ut hoc trinomium $pp - 2pqx\ cos\ \phi + qqxx$ fiat factor functionis. Tum enim ſimul habentur factores ſimplices impoſſibiles $qx - p(cos\ \phi + \sqrt{-1}.\ ſin\ \phi)$ et $qx - p(cos\ \phi - \sqrt{-1}.\ ſin.\ \phi)$. Functio autem propoſita evaneſcit, ſi ponatur tam $x = \frac{p}{q}(coſ.\ \phi + \sqrt{-1}.\ ſin.\ \phi)$ quam $x = \frac{p}{q}(cos\ \phi - \sqrt{-1}.\ ſin\ \phi)$. Facta igitur ſubſtitutione utraque duplex invenitur aequatio ex quibus tam fractio $\frac{p}{q}$, quam arcus ϕ definiri poſſunt.

§. 218.

Iſtae ſubſtitutiones loco x faciendae licet primo intuitu difficiles videantur, tamen per ea, quae initio *Sect. praec.* ſunt explicata, ſat expedite abſolvi poſſunt. Quia enim poſito radio $= 1$ eſt $(cos\ \phi \pm \sqrt{-1}.\ ſin.\ \phi)^n = cos\ n\phi \pm \sqrt{-1}.\ ſin.\ n\phi$; ſequentes formulae loco ſingularum ipſius x poteſtatum inveniuntur ſubſtituendae:

pro priori factore.

$$x = \frac{p}{q}\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\ \sin\varphi\right)$$

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2}\left(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}.\ \sin 2\varphi\right)$$

$$x^3 = \frac{p^3}{q^3}\left(\cos 3\varphi + \sqrt{-1}.\ \sin 3\varphi\right)$$

$$x^4 = \frac{p^4}{q^4}\left(\cos 4\varphi + \sqrt{-1}.\ \sin 4\varphi\right) \text{ etc.}$$

pro altero factore

$$x = \frac{p}{q}\left(\cos\varphi - \sqrt{-1}.\ \sin\varphi\right)$$

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2}\left(\cos 2\varphi - \sqrt{-1}.\ \sin 2\varphi\right)$$

$$x^3 = \frac{p^3}{q^3}\left(\cos 3\varphi - \sqrt{-1}.\ \sin 3\varphi\right)$$

$$x^4 = \frac{p^4}{q^4}\left(\cos 4\varphi - \sqrt{-1}.\ \sin 4\varphi\right) \text{ etc.}$$

In compendium calculi ponatur $\frac{p}{q} = r$, et facta ſubſtitutione duæ ſequentes inveniuntur æquationes.

$$o = \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta r.\ \cos\varphi + \gamma r^2 \cos 2\varphi + \delta r^3 \cos 3\varphi + \text{etc.} \\ + \beta r.\sqrt{-1}\sin\varphi + \gamma r^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi + \delta r^3\sqrt{-1}\sin 3\varphi + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$o = \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta r.\ \cos\varphi + \gamma r^2 \cos 2\varphi + \delta r^3 \cos 3\varphi + \text{etc.} \\ - \beta r\sqrt{-1}.\sin\varphi - \gamma r^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi - \delta r^3\sqrt{-1}\sin 3\varphi - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Quodſi hæ duæ æquationes ſibi invicem addantur, ac deinde una ab altera ſubtrahatur; poſteriori autem caſu per $2\sqrt{-1}$ dividantur: inveniuntur duæ æquationes reales ſequentes.

$0 = \alpha + \beta r \cos\varphi + \gamma r^2 \cos 2\varphi + \delta r^3 \cos 3\varphi + \text{etc.}$
$0 = \beta r \sin\varphi + \gamma r^2 \sin 2\varphi + \delta r^3 \sin 3\varphi + \text{etc.}$
quæ ſtatim ex forma functionis $\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 +$ etc. formari poſſunt, ponendo primum unamquamque ipſius x poteſtatem $x^n = r^n \cos n\varphi$, deinceps vero $x^n = r^n \sin n\varphi$. Sic enim ob $\sin 0\varphi = 0$ et $\cos 0\varphi = 1$, pro x^0 ſeu 1 in termino conſtante priori caſu ponitur 1, poſteriori autem 0. Quaeſitis itaque ex his duabus æquationibus incognitis r et φ, ob $r = \frac{p}{q}$, habebitur factor trinomialis quæſitus $pp - 2pqx \cos\varphi + qqxx$, duos factores ſimplices impoſſibiles involvens.

§. 219.

Quodſi æquatio prior per $\sin. m\varphi$ et poſterior per $\cos m\varphi$ multiplicetur, tumque producta vel addantur, vel unum ab altero ſubtrahatur, iſtae reperiuntur aequationes:

$$0 = \alpha \sin. m\varphi + \beta r. \sin(m+1)\varphi + \gamma r^2. \sin(m+2)\varphi + \delta r^3 \sin(m+3)\varphi + \text{etc.}$$

$$0 = \alpha \sin. m\varphi + \beta r. \sin(m-1)\varphi + \gamma r^2 \sin(m-2)\varphi + \delta r^3 \sin(m-3)\varphi - \text{etc.}$$

Sin vero prior æquatio per $\cos. m\varphi$, poſterior per $\sin. m\varphi$ multiplicetur; per additionem et ſubtractionem inveniuntur æquationes.

$$0 = \alpha. \cos. m\varphi + \beta r. \cos(m-1)\varphi + \gamma r^2 \cos(m-2)\varphi + \delta r^3 \cos(m-3)\varphi + \text{etc.}$$

$$0 = \alpha. \cos. m\varphi + \beta r. \cos(m+1)\varphi + \gamma r^2 \cos(m+2)\varphi + \delta r^3 \cos(m+3)\varphi + \text{etc.}$$

Hujusmodi itaque duae æquationes quaecunque conjunctae determinabunt incognitas r et φ. Quod cum plerumque pluribus modis fieri poſſit, ſimul plures factores trinomii obtinentur, et proinde omnes, quos functio propoſita in ſe complectitur.

§. 220.

§. 220.

Propoſita ſit functio $a^n + x^n$, cujus factores trinomiales formæ $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$ ſunt inveniendæ. Ac poſito $r = \frac{p}{q}$, duæ reperiuntur æquationes $o = a^n + r^n \cos. n\phi$, et $o = r^n \sin. n\phi$, ex quarum poſteriori concluditur $\sin. n\phi = o$. Proinde erit $n\phi$ arcus vel hujus formæ $(2k+1)\pi$, vel $2k\pi$, denotante k numerum integrum et π ſemicirculum. Duo iſti caſus ideo diſtinguendi ſunt, quia eorum coſinus ſignis differunt. Priori enim caſu eſt $\cos (2k+1)\pi = -1$, poſteriori vero $\cos 2k\pi = +1$. Quia vero r debet eſſe quantitas realis aſſumi debet prior forma $n\phi = (2k+1)\pi$, quae dat $\cos. n\phi = -1$, unde concluditur $o = a^n - r^n$, et ideo $r = a = \frac{p}{q}$; quare eſt $p = a$, $q = 1$, et $\phi = \frac{(2k+1)\pi}{n}$. Factor itaque functionis $a^n + x^n$ quaeſitus eſt $aa - 2ax \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + xx$. Quia igitur pro k numerum quemcunque integrum ponere poſſumus, hoc modo plures inveniuntur factores numero tamen definiti. Quando n eſt numerus impar, poſito $2k+1 = n$, erit factor quadratus $aa + 2ax + xx$, ſed exinde non ſequitur, quadratum $(a+x)^2$ eſſe factorem functionis $a^n + x^n$, quia in §. 218. unica æquatio reſultat, qua patet, tantum $a+x$ eſſe diviſorem functionis $a^n + x^n$; quae regula ſemper eſt obſervanda, quoties $\cos \phi$ eſt vel $+1$, vel -1.

Sit itaque primo n numerus par, atque

ſi $n = 2$
formulae $a^2 + x^2$
factor eſt $a^2 + x^2$!

ſi $n = 4$

formulae $a^4 + x^4$

factores ſunt $aa - 2ax \cos \frac{1}{4}\pi + xx$

et $aa - 2ax \cos \frac{3}{4}\pi + xx$

ſi $n = 6$

formulae $a^6 + x^6$

factores ſunt ſequentes

$aa - 2ax \cos \frac{1}{6}\pi + xx$

$aa - 2ax \cos \frac{3}{6}\pi + xx$

$aa - 2ax \cos \frac{5}{6}\pi + xx$

Si n fuerit numerus impar,

atque $n = 1$

formulae $a + x$

factor eſt $a + x$

ſi $n = 3$

formulae $a^3 + x^3$

factores ſunt $a + x$

et $aa - 2ax \cos \frac{1}{3}\pi + xx$

ſi $n = 5$

formulae $a^5 + x^5$

factores ſunt $a + x$

$aa - 2ax \cos \frac{1}{5}\pi + xx$

$aa - 2ax \cos \frac{3}{5}\pi + xx$

Patet ex hiſce exemplis, omnes factores obtineri, ſi loco $2k + 1$ omnes numeri impares, non majores quam exponens n ſubſtituantur, iis vero caſibus, ubi factor, quadratus prodit, tantum ejus radicem factoribus annumerandam eſſe.

§. 221.

Si propoſita ſit functio $a^n - x^n$, ejus factor duplex erit $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$; ſi poſito $r = \frac{p}{q}$, fuerit $0 = a^n - r^n \cos. n\phi$ et $0 = r^n \sin. n\phi$. Proinde iterum eſt $\sin. n\phi = 0$, et $n\phi = (2k+1)\pi$, vel $n\phi = 2k\pi$. Hoc autem caſu valor poſterior aſſumendus eſt, ut ut

cos.

$cos. n\phi = +1$, ex quo concluditur $0 = a^n - x^n$, $r = \frac{p}{q} = a$, $p = a$, $q = 1$, $\phi = \frac{2k\pi}{n}$; unde factor trinomius functionis propoſitae eſt $aa - 2ax \cos \frac{2k\pi}{n} + xx$, quae formula, ſi loco $2k$ omnes numeri pares non majores, quam n ponantur, omnes dabit factores quæſitos, ubi de factoribus quadratis idem quod ante eſt tenendum. Primo enim poſito $k = 0$ prodit factor $aa - 2ax + xx$, cujus radix $a - x$ aſſumenda eſt. Pari modo, ſi n fuerit numerus par et ponatur $2k = n$, prodit $aa + 2ax + xx$, quare $a + x$ eſt diviſor functionis $a^n - x^n$. Ex his concluditur:

Pro n impari, ſi $n = 1$ erit formulæ $a - x$
factor $a - x$
ſi $n = 3$ erunt formulae $a^3 - x^3$
factores $a - x$ et $aa - 2ax \cos \frac{2}{3}\pi + xx$
ſi $n = 5$ erunt formulæ $a^5 - x^5$
factores $a - x$
$aa - 2ax \cos \frac{2}{5}\pi + xx$
$aa - 2ax \cos \frac{4}{5}\pi + xx$

Pro n pari, ſi $n = 2$, formulæ $aa - xx$
factores ſunt $a - x$, et $a + x$
ſi $n = 4$, formulae $a^4 - x^4$
factores ſunt, $a - x$; $a + x$;
$aa - 2ax \cos \frac{2}{4}\pi + xx$
ſi $n = 6$, formula $a^6 - x^6$
factores ſunt $a - x$; $a + x$;
$aa - 2ax \cos \frac{2}{6}\pi + xx$
$aa - 2ax \cos \frac{4}{6}\pi + xx$.

§. 222.

Habeat nunc functio propoſita hanc formam $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$. Atque ſi haec functio duos habeat factores reales formae $\eta + \vartheta x^n$, reſolutio ex præcedentibus patet. Quodſi vero functio eam habeat formam $a^{2n} -$

 aa^n

$2a^n\, x^n \cos g + x^{2n}$, quae in duos factores reales formae $\psi + \vartheta x^n$ reſolvi nequit, tumque hujus functionis quaeratur factor duplex realis formae $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$; poſito $r = \frac{p}{q}$ duae ſequentes æquationes erunt reſolvendæ $o = a^{2n} - 2a^n\, r^n \cos. g \cos. n\phi + r^{2n} \cos 2n\phi$, et $o = -2a^n\, r^n \cos. g \cos. n\phi + r^{2n} \sin 2n\phi$; vel quoque ponendo $m = 2n$, loco prioris æquationis ex §. 218. iſta $o = a^{2n} \sin 2n\phi - 2a^n\, r^n \cos. g \sin. n\phi$. Ex qua cum poſteriori collata concluditur $r = a$. Tum vero erit $\sin. 2n\phi = 2 \cos. g \cdot \sin. n\phi$; ſed $\sin 2n\phi = 2 \sin. n\phi \cdot \cos. n\phi$; proinde $\cos. n\phi = \cos. g$. Perpetuo autem eſt $\cos. (2k\pi \pm g) = \cos. g$, unde habetur $n\phi = 2k\pi \pm g$ et $\phi = \frac{2k\pi \pm g}{n}$. Proinde factor generalis duplex quaeſitus eſt $aa - 2ax \cos. \frac{2k\pi \pm g}{n} + xx$, atque omnes factores prodibunt, ſi pro $2k$ omnes numeri pares non majores quam n ſucceſſive ſubſtituantur, ut factum eſt in caſibus particularibus, qui ſequuntur. Erit enim

formulae $a^2 - 2ax \cos. g + xx$

unicus factor $aa - 2ax \cos. g + xx$;

formulae $a^4 - 2a^2x^2 \cos. g + x^4$

duo factores ſunt

$$aa - 2ax \cos \frac{g}{2} + xx$$

$$aa - 2ax \cos \frac{2\pi \pm g}{2} + xx$$

$$\text{ſive } aa + 2ax \cos \frac{g}{2} + xx$$

formulae $a^6 - 2a^3x^3 \cos g + x^6$

factores tres

aa

$$aa - 2ax\cos\frac{g}{3} + xx$$

$$aa - 2ax\cos\frac{2\pi - g}{3} + xx$$

$$aa - 2ax\cos\frac{2\pi + g}{3} + xx$$

formulae $a^8 - 2a^4x^4\cos g + x^8$ factores quatuor

$$aa - 2ax\cos\frac{g}{4} + xx$$

$$aa - 2ax\cos\frac{2\pi - g}{4} + xx$$

$$aa - 2ax\cos\frac{2\pi + g}{4} + xx$$

$$aa - 2ax\cos\frac{4\pi \pm g}{4} + xx$$

ſive $aa + 2ax\cos\frac{g}{4} + xx$

formulae $a^{10} - 2a^5x^5\cos g + x^{10}$ factores quinque

$$aa - 2ax\cos\frac{g}{5} + xx$$

$$aa - 2ax\cos\frac{2\pi - g}{5} + xx$$

$$aa - 2ax\cos\frac{2\pi + g}{5} + xx$$

$$aa - 2ax\cos\frac{4\pi - g}{5} + xx$$

$$aa - 2ax\cos\frac{4\pi + g}{5} + xx$$

 Simi-

Similem in modum ulterius progredi licet ad functiones hujus formae $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n}$, quae certo habet unum factorem realem hujus formae $\eta + \theta x^n$, cujus igitur factores reales vel ſimplices vel duplices exhiberi poſſunt; alter autem factor formae $\iota + \kappa x^n + \lambda x^{2n}$, utcunque fuerit comparatus, per §. *prac.* in factores reſolvetur. Ulterius hæc functio $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n} + \varepsilon x^{4n}$, quia perpetuo habet duos factores reales hujus formæ $\eta + \theta x^n + \iota x^{2n}$, ſimili modo reſolvitur in factores reales vel ſimplices vel duplices. Quin eodem modo progredi licet ad formam $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n} + \varepsilon x^{4n} + \zeta x^{5n}$, atque ſuperiorum ordinem hujus formae functiones, Cf. Euler Introductio T. I. C. IX.

SECTIO XV.

DE CALCVLO DIFFERENTIALI FVNCTIONVM VNIVS VARIABILIS ALGEBRAICARVM.

§. 223.

Omnis functio quantitatis variabilis x alium induit valorem, ſi ipſa x variari atque vel creſcere vel decreſcere ſtatuatur, niſi functio ſpeciem tantum quantitatis variabilis mentiatur, revera autem ſit quantitas conſtans, ut x^0. Sit igitur y, functio quaecunque variabilis x, atque in eadem loco x ſucceſſive ſubſtituantur valores in arithmetica progreſſione progredientes, nimirum x; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; ac denotet y^{I} valorem, quem functio y induit, ſi in ea loco

loco x ſcribatur $x+\omega$; ſimili modo ſit y^{II} is ipſius y valor, ſi loco x ſcribatur $x+2\omega$, parique ratione denotent y^{III}; y^{IV}; y^{V}; etc; valores ipſius y, qui emergunt, dum loco x ponuntur $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; etc. ita ut iſti diverſi valores ipſarum x et y ſequenti modo ſibi reſpondeant:

$$x;\ x+\omega;\ x+2\omega;\ x+3\omega;\ x+4\omega;\ x+5\omega;\ \text{etc.}$$
$$y;\ y^{I};\ y^{II};\ y^{III};\ y^{IV};\ y^{V};\ \text{etc.}$$

atque prouti ſeries arithmetica x; $x+\omega$; $x+2\omega$; etc. in infinitum continuari poteſt, ita ſeries ex functione y orta, nimirum y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; etc. quoque in infinitum progredietur, eritque functio y hujus ſeriei terminus generalis. Quodſi ejusdem ſeriei quærantur differentiales omnium ordinum, et differentiæ primae ſequentibus indicentur ſignis ut ſit $y^{I}-y=\Delta y$; $y^{II}-y^{I}=\Delta y^{I}$; $y^{III}-y^{II}=\Delta y^{II}$; etc, erit Δy incrementum, quod functio y capit, ſi in ea loco x ponatur $x+\omega$, denotante ω numerum quemcunque pro lubitu aſſumtum, vel poſitivum vel negativum: ſaltem perpetuo tanquam incrementum conſiderari ſolet, licet ſæpius revera ſit decrementum, quod ex ejus valore negativo cognoſcitur. Vocari autem ſolet hoc incrementum functionis y ejus *differentia*. Quia y^{II} oritur ex y, ſi loco x ſcribatur $x+2\omega$; manifeſtum eſt, eandem quantitatem inveniri, ſi primum pro x ponatur $x+\omega$, tumque denuo $x+\omega$ loco x ſtatuatur. Orietur ideo y^{II} ex y^{I}, ſi in hoc valore y^{I} loco x ſcribatur $x+\omega$, proinde erit Δy^{I} incrementum ipſius y^{I}, quod capit poſito $x+\omega$ loco x, atque hinc ſimili modo Δy^{I} vocatur *differentia* ipſius y^{I}. Sic et y^{III} oritur ex y^{II}, ſi in y^{II} loco x ponitur $x+\omega$, et ita porro. Ac proinde Δy^{II} erit differentia ipſius y^{II}, ſeu ejus incrementum, quod capit, ſi loco x ponatur $x+\omega$; Δy^{III} erit differentia functionis y^{III}, et ita porro.

§. 224.

Inventa ſerie differentiarum, ſi ex ea denuo differentiæ capiantur, quamlibet a ſequente ſubtrahendo; orientur differentiæ differentiarum, ſeu *differentiae ſecundae*, quæ ita deſignantur, ut ſit

$$\Delta\Delta y \text{ vel } \Delta^2 y = \Delta y^{\mathrm{I}} - \Delta y$$
$$\Delta^2 y^{\mathrm{I}} = \Delta y^{\mathrm{II}} - \Delta y^{\mathrm{I}}$$
$$\Delta^2 y^{\mathrm{II}} = \Delta y^{\mathrm{III}} - \Delta y^{\mathrm{II}}$$
$$\Delta^2 y^{\mathrm{III}} = \Delta y^{\mathrm{IV}} - \Delta y^{\mathrm{III}}$$

ſicque porro. Erit igitur $\Delta^2 y$, differentia ſecunda ipſius y; $\Delta^2 y^{\mathrm{I}}$ differentia ſecnnda functionis y^{I} etc. Similem autem in modum ſcribendæ ſunt differentiae tertiae, quartae et ſequentes, uti ſequens ſchema repraeſentat.

Variationes variabilis x

x; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; etc.

Valores functionis y.

y ; y^{I} ; y^{II} ; y^{III} ; y^{IV} ; y^{V} ; etc.

Differentia prima.

Δy ; Δy^{I} ; Δy^{II} ; Δy^{III} ; Δy^{IV} ; etc.

Differentiae ſecundae

$\Delta^2 y$; $\Delta^2 y^{\mathrm{I}}$; $\Delta^2 y^{\mathrm{II}}$; $\Delta^2 y^{\mathrm{III}}$; etc.

Differentiae tertiae

$\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^{\mathrm{I}}$; $\Delta^3 y^{\mathrm{II}}$; etc.

Differentiae quartae

$\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^{\mathrm{I}}$; etc.

In quacunque harum differentiarum ſerie terminus conſequens fit ex proxime antecedente, ſi in eodem $x+\omega$ loco x ponatur. Quia enim eadem lex valet de ſerie primitiva y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, y^{V}, ea ſimul valet de differentiali prima Δy, Δy^{I}, Δy^{II}, Δy^{III}, Δy^{IV}, Δy^{V}, etc. Nam poſito $x+\omega$ loco x in $y^{\mathrm{I}} - y = \Delta y$, oritur $y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}} = \Delta y^{\mathrm{I}}$; poſito $x+\omega$ loco x in $y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}} = \Delta y^{\mathrm{I}}$, oritur $y^{\mathrm{III}} - y^{\mathrm{II}} = \Delta y^{\mathrm{II}}$, ac generaliter poſito $x+\omega$ loco x in $y^{\mathrm{N}+1} - y^{\mathrm{N}} = \Delta y^{\mathrm{N}}$, oritur

tur $y^{N+II} - y^{N+I} = \Delta y^{N+I}$. Quodſi jam ſeries differentialis prima conſideretur ut primitiva; patet eandem legem valere pro differentiali ſecunda, tumque ſi haec conſideretur ut primitiva, concluditur eandem valere pro differentiali tertia; ſicque porro concludendo patet, eandem valere pro reliquis omnibus. Eſt itaque $\Delta^2 y$ prima differentia ipſius Δy; $\Delta^3 y$ prima differentia ipſius $\Delta^2 y$; et generaliter $\Delta^{n+1} y$ differentia prima ipſius $\Delta^n y$.

§. 225.

Poſito $y = x$; erit $y^I = x^I = x + \omega$; $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$, et ita porro. Vnde ſumtis differentiis erit $\Delta x = \omega$, $\Delta x^I = \omega$, $\Delta x^{II} = \omega$; etc. quare omnes differentiæ primæ ipſius x erunt conſtantes, ac proinde differentiæ ſequentes omnes evaneſcent. Cum igitur ſit $\Delta x = \omega$, ob analogiam loco litteræ ω iſte character Δx commode adhibebitur. Ideo quantitatis variabilis x, cujus valores ſucceſſivi x; x^I; x^{II}; x^{III}; etc. arithmeticam progreſſionem conſtituere aſſumuntur, differentiæ primæ Δx, Δx^I, Δx^{II}, etc. omnes erunt conſtantes, et ulteriores $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$, $\Delta^4 x$, etc. nihilo æquales. Cæterum characteribus Δx, Δy, $\Delta^2 x$, $\Delta^2 y$ et ſimilibus ita in ſequentibus utemur, ut quivis eorum characterum tanquam unica littera conſideretur. Erit itaque Δx^n dignitas ipſius Δx exponentis n non vero differentia ipſius x^n; $\Delta^2 x^n$ erit dignitas ipſius $\Delta^2 x$ exponentis n, non vero differentia ſecunda ipſius x^n. Quodſi vero inter characterem Δ et litteram x vel y vel aliam, quae variabilem quamcunque denotet, interpoſitum erit punctum, ut $\Delta . x^n$, $\Delta^2 . x^n$, vel $\Delta^n . x^n$; hoc ita explicandum erit, ut intelligatur poteſtatis x^n differentia vel prima vel ſecunda, vel altior quaecunque.

§. 226.

Quemcunque numerum denotet x, poterit ſeries $a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 +$ etc. exprimere numerum

rum quemcunque alium, quomodocunque a numero x pendentem; ſi coefficientes a, b, c, e, etc, convenienter ſumantur, affirmativi vel negativi, integri vel fracti. Cum enim vulgo numerando omnes numeros ex progreſſione 1, 10, 100, 1000, 10000, etc, formamus, dicendo, quoties quilibet terminorum hujus progreſſionis ſumendus ſit; patet, quamlibet progreſſionem geometricam, quae ſubeſt generali 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, etc, eidem rei æque utilem eſſe, præcipue, ſi valores etiam fracti coefficientium admittantur. Hinc patet, omnem functionem variabilis x ſerie quadam ejusmodi formæ exprimi poſſe; ubi tamen terminus primus conſtans deficiet, ſi y ejusmodi ſit ipſius x functio, quae evaneſcit poſito $x = 0$. Propoſita jam quacunque functione y ipſius x ſcripto $x + \Delta x$ loco x, ut y abeat in $y + \Delta y$, atque tum quæſito valore ipſius Δy; fiet Δy functio ipſius Δx, ſi facta hac ſubſtitutione x et y conſiderentur ut conſtantes, et quidem talis, quæ poſito $\Delta x = 0$ evaneſcit. Proinde dari poterit Δy per ſeriem formae $\Delta y = p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 +$ etc; ubi erunt p, q, r, s etc, functiones ipſarum x et y, vel ſolius x, quia eſt y ipſius x functio. Inventa hac ſerie ſimul innoteſcit ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + q\Delta x + r\Delta x^2 + s\Delta x^3 +$ etc, atque ejusdem rationis limes; ratio ſcilicet, cum qua Δx et Δy evaneſcunt, quae eſt $= \frac{p}{1}$ (§. 70.).

§. 227.

Occurrunt problemata Mathematica admodum multa, quorum ſolutio vel plane non invenitur, niſi ultima ratio variabilium evaneſcentium cognita ſit; vel quorum ſolutio, conceſſa prima vel ultima variabilium ratione, multo expeditius invenitur. Præcipue quæri ſolent ultimae rationes differentiarum variabilium evaneſcen-

neſcentium. Atque haec cauſſa eſt, cur peculiaria uſu recepta ſint nomina et ſigna ad differentias iſtas evaneſcentes denotandas, quarum ultima ratio quæritur. Differentias igitur evaneſcentes, ſeu, uti loqui ſolent, infinite parvas (§. 25.) hic cum LEIBNIZIO vocabimus *Differentialia*; atque cum in antecedentibus differentiarum diverſi conſtituti ſint ordines, facile intelligitur, quid differentialia prima, ſecunda, tertia etc. cujuscunque functionis ſignificent. Quaerenda enim ſæpe in poſterum erit ultima ratio, cum qua differentia functionis ſecunda vel tertia vel quarta, cum alia differentia alius cujusdam functionis ſecunda, vel tertia, vel quarta etc. vel alia quacunque variabili comparata, cum ea ſimul evaneſcit. Tumque generatim ejusmodi differentia in ipſo momento evaneſcentiæ vocabitur differentiale ſecundum vel tertium vel quartum etc, prouti eſt vel ſecunda vel tertia, vel quarta etc. differentia, quae evaneſcit. Sed loco characteris Δ, quo ante differentiae ſunt indicatae, nunc utemur charactere d ita, ut dy ſignificet differentiale primum ipſius y; ddy differentiale ſecundum, d^3y tertium, et ſic porro. Mathematici Angli aliis tam nominibus, quam ſignis utuntur. Differentias enim evaneſcentes, quas hic differentialia vocamus, potiſſimum *fluxiones* nominare ſolent, interdum quoque *incrementa*. Fluxiones denotant punctis, quæ litteris ſuperſcribunt, ita ut $\dot{y}$ iis ſignificet fluxionem primam ipſius y; $\ddot{y}$ fluxionem ſecundam; $\dddot{y}$ tertiam et ſic porro. Probe igitur tenendum eſt, litteram d hic non quantitatem denotare, ſed tantum loco ſigni adhiberi, ad vocem *differentialis* exprimendam, eodem modo, quo charactere $\surd$ pro ſigno radicis uti conſuevimus. Hinc dy non ſignificat productum ex quantitate d in quantitatem y, ſed ita enunciari debet, ut dicatur differentiale ipſius y. Simili modo ſi ſcribatur d^2y, neque numerus binarius exponentem, neque d^2 dignitatem ipſius d ſignificat, ſed adhibetur tantum ad nomen dif-

feren-

ferentialis ſecundi breviter exprimendum. Cum igitur littera d in calculo differentiali non quantitatem, ſed ſignum tantum exhibeat, ad confuſionem in calculis vitandam, ubi plures quantitates conſtantes occurrunt, littera ad earum deſignationem uſurpari nequit. Praeterea, qui character d hic in locum ipſius Δ ſuccedit, ea hic repetenda ſunt, quae ſub finem §. 225. monuimus. Adhibitis igitur ſignis hucusque explicatis erit $\frac{dy}{dx}=p$, ſeu limes rationis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aequalis rationi $\frac{p}{1}$ §. 226. atque haec quidem ultima ratio variabilium evaneſcentium eſt id, quod in *Calculo Differentiali* quaeritur. Ipſa enim differentialia ſunt nihilo aequalia, ac propterea nullo negotio invenirentur. *Differentiare* functionem y variabilis x non aliud eſt, niſi invenire ultimam rationem, cum qua differentiae functionis y et varibilis x evaneſcunt. §. 228.

Cf. Newtoni Princ. Phil. Nat. L. 1. Sect. 1. Lem. XI Schol.

Licet igitur id, quod per calculum differentialem quaeritur, proprie ſit aequatio $\frac{dy}{dx}=p$; tamen iſta aequatio ſub hac forma $dy=pdx$ vulgo ſcribi ſolet, atque phraſis, *differentiare functionem* y, ſic explicari: quaerere differentiale functionis y, tumque ipſa expreſſio pdx differentiale functiones y dicitur. Tolerari poſſunt iſtae voces, ſi differentiae Δx atque Δy in ipſo momento evaneſcentiae conſiderentur, quo rationis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitem $=\frac{p}{1}$ attingunt. Atque eadem ratio per aequationem $dy=pdx$ aeque ac per alteram $\frac{dy}{dx}=p$ exprimi poteſt, idque praecipue ob eam, quae ſequitur, cauſſam. Si tam y quam z ejusmodi ſint varibiles, quae pendent a variabili x, ita ut y pariter atque z ſit

ipſius x functio; limes rationis differentiarum Δy atque Δz habetur ex aequationibus $dy = pdx$ atque $dz = Pdx$ pariter atque ex hiſce $\frac{dy}{dx} = p$ et $\frac{dz}{dx} = P$. Eſt enim $\frac{dy}{dz} = \frac{p}{P}$, quia Δy et Δz habent formas $\Delta y = p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 +$ etc. atque $\Delta z = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4 +$ etc; ex quibus utique habetur $\frac{dy}{dz} = \frac{p}{P}$ (§. 75.). Idem ſequitur ex formis $dy = pdx$, et $dz = Pdx$, ex quibus fit $\frac{dy}{dz} = \frac{pdx}{Pdx} = \frac{p}{P}$. In poſterum itaque modo ſub hac forma $\frac{dy}{dx} = p$, modo ſub altera $dy = pdx$, ultimas differentiarum evaneſcentium rationes exhibebimus.

§. 229.

Differentia producti ay variabilis y in quantitatem conſtantem a eſt differentia Δy variabilis y in conſtantem a multiplicata. Eſt enim $\Delta . ay = a(y + \Delta y) - ay = ay + a\Delta y - ay = a\Delta y$. Si itaque eſt y functio variabilis x; habetur $\Delta . ay = ap\Delta x + aq\Delta x^2 + ar\Delta x^3 +$ etc, atque $\frac{d.ay}{dx} = ap$, vel $d.ay = apdx$. Ideo *differentiale producti variabilis in quantitatem conſtantem eſt differentiale illius variabilis per eandem conſtantem multiplicatum.* Praeterea differentia functionis y, quae eſt ſumma algebraica plurium variabilium $z + x + u +$ etc. et conſtantis cujusdam a, eſt ſumma omnium differentiarum $\Delta z + \Delta x + \Delta u$ earum partium variabilium, ex quibus functio propoſita conſtat. Erit enim $y^{I} = a + z + \Delta z + x + \Delta x + u + \Delta u$ etc. atque $y^{I} - y = \Delta y = \Delta z + \Delta x + \Delta u +$ etc. Hiſce ſuppoſitis ex data formula pro differentia

prima

prima functionis y erui poteſt formula generalis pro differentia ſecunda, atque deinde pro differentia tertia, quarta, et ſequentibus, quin formula generalis pro differentia ordinis n quacunque.

§. 230.

Formula pro Δy generalis eſt $\Delta y = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4 +$ etc, ſi y eſt functio variabilis x, atque $\Delta^2 y$ eſt differentia prima ipſius Δy (§. 224.). Ideo eſt $\Delta^2 y = \Delta P\Delta x + \Delta Q\Delta x^2 + \Delta R\Delta x^3 + \Delta S\Delta x^4 +$ etc, ob Δx quantitatem conſtantem. Praeterea ΔP, ΔQ, ΔR, ΔS, etc, quia ſunt functiones ipſius x ſequentes habent formas:

$$\Delta P = p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 + \text{etc.}$$
$$\Delta Q = \mathfrak{P}\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta x^2 + \mathfrak{R}\Delta x^3 + \mathfrak{S}\Delta x^4 + \text{etc.}$$
$$\Delta R = \mathfrak{p}\Delta x + \mathfrak{q}\Delta x^2 + \mathfrak{r}\Delta x^3 + \mathfrak{s}\Delta x^4 + \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Ex quibus iſta concluditur formula

$$\begin{aligned}\Delta^2 y = p\Delta x^2 &+ q\Delta x^3 + r\Delta x^4 + s\Delta x^5 + \text{etc.}\\ &+ \mathfrak{P}\Delta x^3 + \mathfrak{Q}\Delta x^4 + \mathfrak{R}\Delta x^5 + \text{etc.}\\ &\qquad + \mathfrak{p}\Delta x^4 + \mathfrak{q}\Delta x^5 + \text{etc.}\\ &\qquad\qquad \text{etc.} \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Coefficientibus itaque variabilium Δx^3, Δx^4, Δx^5, etc, litteris Z, Y, X, etc, denotatis, erit

$$\Delta^2 y = p\Delta x^2 + Z\Delta x^3 + Y\Delta x^4 + X\Delta x^5 + \text{etc.}$$

ex qua formula habetur ratio

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = p + Z\Delta x + Y\Delta x^2 + X\Delta x^3 + \text{etc.}$$

hujusque rationis limes $\frac{ddy}{dx^2} = p$. Hæc ultima ratio variabilium $\Delta\Delta y$ et Δx^2 eſt id, quod quæritur, ſi functionis y differentio differentiale inveniendum proponitur. Loco æquationis $\frac{ddy}{dx^2} = p$ hic quoque ſcribi ſolet $ddy = pdx^2$, atque pdx^2 ipſius y *differentio-differentiale* ſeu *differentiale ſecundum* vocari. Quod quidem hic

hic quoque tolerari poteſt, tum quia per æquationem $ddy = pdx^2$ atque per aliam $\frac{ddy}{dx^2} = p$, ultima ratio $\frac{ddy}{dx^2}$ aeque commode exprimitur, tum quia limes rationis differentiarum ſecundi ordinis $\Delta\Delta y = p\Delta x^2 + Z\Delta x^3 + Y\Delta x^4 + X\Delta x^5 +$ etc, et $\Delta\Delta z, = \pi\Delta x^2 + \varrho\Delta x^3 + \sigma\Delta x^4 + \tau\Delta x^5 +$ etc, exiſtentibus y et z functionibus ipſius x, eſt $p : \pi$ (§. 75.). Atque hæc ultima ratio habetur ex æquationibus $ddy = pdx^2$, et $ddz = \pi dx^2$, pariter atque ex hiſce $\frac{ddy}{dx^2} = p$ atque $\frac{ddz}{dx^2} = \pi$. Cæterum ex ipſa methodo, qua formulam pro $\Delta\Delta y$ ex formula pro Δy elicuimus, patet, $ddy = pdx^2$ eſſe differentiale primum ipſius $dy = Pdx$; atque ideo conceſſis regulis pro inveniendo differentiali ex data functione unius variabilis; differentiale ſecundum $ddy = pdx^2$ inveniri ex differentiali primo $dy = Pdx$ ſecundum easdem regulas, ſi dx conſideretur, ut quantitas conſtans. Erat enim $\frac{dy}{dx} = P$, ſive $dy = Pdx$, præterea $\Delta P = p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 +$ etc, quare eſt $\frac{dP}{dx} = p$, ſive $dP = pdx$. Quia igitur eſt $ddy = pdx^2$, ſubſtituto dP loco pdx habetur $ddy = dPdx$, quod eſt differentiale ipſius Pdx habito ſigno dx pro quantitate conſtante (§. 229.).

§. 231.

Ex præſtructis hiſce principiis concludere poſſumus generalem pro differentia cujusvis ordinis $\Delta^n y$ functionis y variabilis x formulam. Dico enim, differentiam ordinis n ſequentem habere formam generalem $\Delta^n y = p\Delta x^n + q\Delta x^{n+1} + r\Delta x^{n+2} + s\Delta x^{n+3} +$ etc. Quodſi enim haec forma valet pro differentia $\Delta^n y$, eadem quoque valere debet pro differentia $\Delta^{n+1} y$, quia poſito

$$\Delta^n y = p\Delta x^n + q\Delta x^{n+1} + r\Delta x^{n+2} + s\Delta x^{n+3} + \text{etc.}$$

erit $\Delta^{n+1}y = \Delta p\Delta x^n + \Delta q\Delta x^{n+1} + \Delta r\Delta x^{n+2} + \Delta s\Delta x^{n+3} + \text{etc.}$ Sed $\Delta p = \pi\Delta x + \rho\Delta x^2 + \sigma\Delta x^3 + \tau\Delta x^4 + \text{etc}$, $\Delta q = \mathfrak{P}\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta x^2 + \mathfrak{R}\Delta x^3 + \mathfrak{S}\Delta x^4 + \text{etc}$, $\Delta r = \mathfrak{p}\Delta x + \mathfrak{q}\Delta x^2 + \mathfrak{r}\Delta x^3 + \mathfrak{s}\Delta x^4 + \text{etc}$, $\Delta s = \Pi\Delta x + \text{etc.}$ Ideo

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1}y = {} & \pi\Delta x^{n+1} + \rho\Delta x^{n+2} + \sigma\Delta x^{n+3} + \tau\Delta x^{n+4} + \text{etc.}\\ & + \mathfrak{P}\Delta x^{n+2} + \mathfrak{Q}\Delta x^{n+3} + \mathfrak{R}\Delta x^{n+4} + \text{etc.}\\ & + \mathfrak{p}\Delta x^{n+3} + \mathfrak{q}\Delta x^{n+4} + \text{etc.}\\ & \qquad\qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

atque ipſa haec forma pro $\Delta^{n+1}y$ eſt aſſumta. Scriptis itaque Z, Y, X, etc, loco coefficientium ipſarum Δx^{n+2}, Δx^{n+3}, Δx^{n+4}, etc, ut ſit $\Delta^{n+1}y = \pi\Delta x^{n+1} + Z\Delta x^{n+2} + Y\Delta x^{n+3} + X\Delta x^{n+4} + \text{etc}$, habetur ratio $\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}} = \pi + Z\Delta x + Y\Delta x^2 + X\Delta x^3 + \text{etc}$, hujusque rationis limes $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \pi$. Ipſe hic limes rationis $\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}$ inveniendus eſt, quando, ut vulgo dici ſolet, functionis y differentiale ordinis $n+1$ quaeritur. Exprimitur enim aequatio $\frac{d^{n+1}y}{d^{n+1}x} = \pi$ ſub hac forma $d^{n+1}y = \pi dx^{n+1}$, atque πdx^{n+1} vocatur *differentiale ordinis* $n+1$ functionis y. Tumque generaliter differentiale ordinis $n+1$ fit ex differentiali ordinis n eodem modo, quo d^2y fit ex dy, ſive differentiale $d^{n+1}y$ eſt differentiale primum ipſius d^ny, ſi dx ſpectetur ut quantitas conſtans. Erat enim $\frac{d^ny}{dx^n} = p$, ſive $d^ny = pdx^n$, praeterea $\Delta p = \pi\Delta x + \rho\Delta x^2 + \sigma\Delta x^3 + \tau\Delta x^4 + \text{etc}$, ideoque $\frac{dp}{dx} = \pi$, vel $dp = \pi dx$. Quia igitur eſt $d^{n+1}y = \pi dx^{n+1}$, ſubſtituto dp loco πdx, erit $d^{n+1}y = dpdx^n$, quod eſt differentiale ipſius pdx^n habito dx pro ſigno quantitatis conſtantis (§. 229.).

§. 3

§. 232.

Generalia hæc ante erant demonſtranda, quam ipſum differentiationis negotium poterat ſuſcipi, ad quod ipſum jam adcingere nos poſſumus. Explicabimus vero in hac ſectione tantum regulas pro differentiandis functionibus unius variabilis et quidem algebraicis. Sit itaque primo $y = x^n$ exiſtente n numero integro poſitivo, ac poſito $x + \Delta x$ loco x, habetur $y^I = (x + \Delta x)^n = x^n +$

$$nx^{n-1}\Delta x + \frac{n \,.\, n-1 \,.}{1 \,.\, 2 \,.} x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^{n-3}\Delta x^3 +$$

etc. Proinde $y^I - y = \Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2 \,.}$

$x^{n-2}\Delta x^2 +$ etc, atque $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, vel $dy = nx^{n-1}dx$.

Cujuscunque igitur *poteſtatis variabilis* x *exponentis integri poſitivi differentiale habetur, multiplicando eandem per exponentem, dividendo per* x, *et quod provenit, per* dx *multiplicando.* Creſcente jam x ſecundum progreſſionem arithmeticam, ita ut ſit Δx quantitas conſtans, differentialia omnium ordinum poteſtatis x^n exponentis integri poſitivi ſecundum eandem inveniri poſſunt regulam. Erit enim

$$d \,.\, x^n = nx^{n-1}dx$$
$$dd \,.\, x^n = n \,.\, n-1 \,.\, x^{n-2}d^2x$$
$$d^3 \,.\, x^n = n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, x^{n-3}dx^3$$
$$d^4 \,.\, x^n = n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \,.\, x^{n-4}dx^4$$

et generaliter

$$d^n \,.\, x^n = n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, \ldots \,.\, n-n+1 \,.\, x^{n-n}dx^n$$

Hinc $\frac{d^n \,.\, x^n}{dx^n}$ ſemper evadit quantitas conſtans $=$ $n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, \ldots \, n-n+1$, ſi fuerit n numerus integer poſitivus. Ac iſte caſus vulgo ſic exprimitur, dicendo differentiale ordinis n eſſe conſtans

§. 233.

Per hæc omnium functionum algebraicarum, quæ ſunt rationales et integræ, differentialia poſſunt inveniri, quia ejusmodi functiones ſunt aggregata algebraica partium, quae ſunt producta poteſtatum variabilis exponentium integrorum et poſitivorum in conſtantes multiplicatarum. Si iſtæ partes ſint p, q, r, s, etc, quibus juncta ſaepe eſt conſtans quaedam a, ita ut ſit $y = a + p + q + r + s +$ etc, erit $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r + \Delta s +$ etc. (§. 229.) atque proinde $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{\Delta x} + \frac{\Delta q}{\Delta x} + \frac{\Delta r}{\Delta x} + \frac{\Delta s}{\Delta x} +$ etc. Hinc ultima ratio $\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dx} + \frac{dr}{dx} + \frac{ds}{dx} +$ etc. Si itaque ultimae rationes $\frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}$ etc, ſint π, φ, χ, ψ, etc, erit $\frac{dy}{dx} = \pi + \varphi + \chi + \psi +$ etc, quae æquatio ſic quoque ſcribi poteſt $dy = (\pi + \varphi + \chi + \psi$ etc.$)dx$, vel $dy = \pi dx + \varphi dx + \chi dx + \psi dx +$ etc. Differentiale itaque ejusmodi functionis eſt ſumma differentialium partium functionis y variabilium. Unde

$d.(a + x) = dx$; $d(a + bx) = bdx$

$d.(a + xx) = 2xdx$; $d(aa - xx) = -2xdx$

$d.(a + bx + cxx) = bdx + 2cxdx$

$d.(a + bx + cxx + ex^3) = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx$. etc.

§. 234.

Quodſi y atque z fuerint functiones ipſius x quaecunque; *differentiale producti* yz *conſtabit ex duobus membris, quæ obtinentur, ſi uterque factor per differentiale alterius factoris multiplicetur.* Sit enim $V = yz$, ac poſito $x + \Delta x$ loco x, V abit in V^1, y in $y^1 = y + \Delta y$ atque z in $z^1 = z + \Delta z$. Proinde $V^1 = y^1 z^1 = (y + \Delta y)(z + \Delta z)$, =

$= yz + y\Delta z + z\Delta y + \Delta y \Delta z.$ Ideo $V^1 - V = \Delta V =$ $y\Delta z + z\Delta y + \Delta y\Delta z$, atque $\frac{\Delta V}{\Delta x} = y\frac{\Delta z}{\Delta x} + z\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x}$. Hinc limes hujus rationis evaneſcente Δx erit $\frac{dV}{dx} = y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx} + \frac{dydz}{dx} = y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx}$, quia $\frac{dydz}{dx} = 0$ (§. 75.). Si itaque fuerit $\frac{dz}{dx} = p$, atque $\frac{dy}{dx} = q$, erit $\frac{dV}{dx} = yp + zq$, vel $dV = (yp + zq)dx$, vel $dV = ypdx + zqdx = ydz + zdy$. Eſt itaque v. g.

$$d.(a+x)(b-x) = -dx(a+x) + dx(b-x) = -adx + bdx - 2xdx.$$

Si productum ex pluribus quam duobus conſtet factoribus, eadem regula eſt adhibenda, quia quodlibet ejusmodi productum reſolvi poteſt in duos factores unum ſimplicem et alterum complexum et quilibet eorum factorum in duos alios donec ad ſimplices perveniatur. Sic erit $d.pqrs = d.pqr \times s = pqr \times ds + s \times d.pqr$. Praeterea $d.pqr = p \times d.qr + qr \times dp$. Cum jam $d.qr$ in poteſtate ſit, operatione repetita ſemper ad quaeſitum differentiale pervenitur.

§. 235.

Exiſtente x *quantitate variabili detur ſeries ſive finita ſive infinita per omnes potentias exponentium integrorum ipſius* x, *et coefficientes conſtantes hujus formae* $X = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + etc.$; *ſit autem* $X = 0$, *manente* x *variabili: erunt ſingulae coefficientes* $= 0$. Quia enim eſt x variabilis, ponatur $x = 0$, erit $X = a$, et proinde $a = 0$, *per hyp.* Ideo $X = bx + cx^2 + ex^3$ . . . et dividendo per x fit $0 = b + cx$, ubi poſito $x = 0$ fit $b = 0$. Ergo $X = cx^2 + ex^3$ . . . et dividendo per x^2 iterum $0 = c + ex$, proinde ſi $x = 0$, $c = 0$. Quia haec

haec ratiocinia per omnes ſeriei terminos continuari poſſunt, veritas propoſiti manifeſta eſt. Datis itaque duabus ſeriebus hujus formae $a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$ + etc. et $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^3$ + etc, quarum prior poſteriori æqualis eſt; erunt coefficientes ſingulorum terminorum homogeneorum æquales. Aequalitate enim ſerierum ſuppoſita erit

$$\begin{matrix} a + b & + c & + e & + f & \\ - \alpha - \beta x & - \gamma x^2 & - \delta x^3 & - \varepsilon x^4 \end{matrix} \text{ etc.} = 0.$$ Ideo $a - \alpha = 0$; $b - \beta = 0$; $c - \gamma = 0$; $e - \delta = 0$; $f - \varepsilon = 0$; etc. Ergo $a = \alpha$; $b = \beta$; $c = \gamma$; $e = \delta$; $f = \varepsilon$; etc.

§. 236.

Si functio quæcunque V variabilis x habet valorem conſtantem $= A$, erit $\Delta V = 0$. Poſito enim $x + \Delta x$ loco x, ut V abeat in $V + \Delta V$; manet $V + \Delta V = A$, (*per hyp.*). Ideo $V + \Delta V - V = \Delta V = A - A = 0$. Ergo in formula $\Delta V = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4$ + etc, omnes coefficientes P, Q, R, S, etc, debent eſſe $= 0$, ſi $V =$ conſtanti A, et proinde quoque $\frac{dV}{dx} = P = 0$. Hæc regula vulgo ſic enuntiatur: differentiale quantitatis conſtantis eſſe $= 0$, cujus verus ſenſus ex his eluceſcit. Differentianda jam propoſita ſit functio $y = x^{\frac{n}{m}}$, n et m exiſtentibus numeris integris poſitivis, et proinde $x^{\frac{n}{m}}$ poteſtate variabilis x exponentis fracti poſitivi; erit $y^m = x^n$, atque $y^m - x^n = 0$. Proinde

$$\frac{my^{m-1}dy - nx^{n-1}dx}{dx} = \frac{dy}{dx} my^{m-1} - nx^{n-1} = 0. \text{ Ideo}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}} = \frac{nx^{n-1}}{mx^{n-\frac{n}{m}}} = \frac{n}{m} x^{n-1-n+\frac{n}{m}} =$$

$\frac{n}{m}$

$\frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$, quia $y = x^{\frac{n}{m}}$. Eadem æquatio $\frac{dy}{dx} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$ ſic quoque ſcribi poteſt $dy = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} dx$, id eſt $d. x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} dx$, quae formula indicat, *regulam pro differentiandis dignitatibus variabilis* x *exponentis integri poſitivi* §. 232. *demonſtratam valere quoque pro dignitatibus, quarum exponens eſt fractus poſitivus.*

§. 237.

Eadem regula etiam valet pro dignitatibus variabilis x, *quarum exponens eſt numerus negativus ſive integer, ſive fractus.* Sit enim $y = x^{-m}$, atque littera m denotet numerum vel integrum vel fractum poſitivum. Erit $y = \frac{1}{x^m}$, $yx^m = 1$, atque $yx^m - 1 = 0$. Quia igitur $yx^m - 1$ habet valorem conſtantem $= 0$, erit $\frac{myx^{m-1}dx + x^m dy}{dx} = 0$ (§ *prac.*). Ideo eſt $myx^{m-1} + \frac{dy}{dx} x^m = 0$, $\frac{dy}{dx} x^m = - myx^{m-1} = - mx^{-m+m-1} = - mx^{-1}$ ob $y = x^{-m}$, atque $\frac{dy}{dx} = - mx^{-m-1}$, vel $dy = - mx^{-m-1}dx$, id eſt $d. x^{-m} = - mx^{-m-1} dx$. Hinc ſimul deducitur regula pro differentianda functione fracta, cujus numerator atque denominator ſunt functiones ipſius x. Quaerendum itaque ſit differentiale functionis $\frac{y}{z}$, in qua y et z ſunt functiones variabilis x, erit $\frac{y}{z} = yz^{-1}$. Sed $d. yz^{-1} = yd. z^{-1} + z^{-1}dy$

$= -yz^{-2}dz + z^{-1}dy = \frac{-ydz}{zz} + \frac{dy}{z} =$

$\frac{-ydz + zdy}{zz}$. Unde pro differentiatione fractionis hæc ſequitur regula: *A differentiali numeratoris per denominatorem multiplicato ſubtrahatur differentiale denominatoris per numeratorem multiplicatum, et reſiduum dividatur per quadratum denominatoris, erit quotus differentiale quæſitum fractionis propoſitæ.*

§. 238.

Regulae differentiandi hucusque expoſitæ tam late patent, ut nulla excogitari poſſit functio variabilis x algebraica, quæ earum ope non differentiari queat. Ejusmodi enim functionem non aliae ingrediuntur operationes analyticæ præter additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diviſionem, evectionem ad poteſtates, atque radicum extractiones, qui caſus omnes ſecundum regulas expoſitas tractari poſſunt. Quin ipſæ functiones unius variabilis x implicitæ ſecundum easdem regulas poterunt differentiari. Quæcunque enim ſit functio variabilis x implicita algebraica propoſita, eadem dabitur per æquationem formae $y^n + Py^{n-1} + Qy^{n-2} + Ry^{n-3} \ldots + S = 0$, ubi P, Q, R . . . S erunt functiones ipſius x, uniformes, ad quam formulam regulae expoſitæ nullo negotio adplicantur. Erit enim $(ny^{n-1}dy + (n-1)Py^{n-2}dy + y^{n-1}dP + (n-2)\,Qy^{n-3}dy + y^{n-2}dQ + (n-3)\,Ry^{n-4}dy + y^{n-3}dR + \ldots + dS) : dx = 0$ (§. 236.). Differentialia vero functionum P, Q, R . . . . S tales habent formas, ut ſit $dP = pdx$, $dQ = qdx$, $dR = rdx$ . . . $dS = sdx$. Ideo erit $ny^{n-1}\frac{dy}{dx} + (n-1)Py^{n-2}\frac{dy}{dx} + y^{n-1}p + (n-2)\,Qy^{n-3}\frac{dy}{dx} + y^{n-2}q + (n-3)\,Ry^{n-4}\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} + y^{n-3}r + \ldots + s = 0$. Unde concluditur $my^{n-1}\frac{dy}{dx} + (n-1)Py^{n-2}\frac{dy}{dx} + (n-2)Qy^{n-3}\frac{dy}{dx} + (n-3)Ry^{n-4}\frac{dy}{dx} \ldots$ etc. $= -y^{n-1}p - y^{n-2}q - y^{n-3}r \ldots - s$, atque proinde $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{n-1}p + y^{n-2}q + y^{n-3}r \ldots + s}{my^{n-1} + (n-1)Py^{n-2} + (n-2)Qy^{n-3} + (n-3)Ry^{n-4} + \text{etc.}}$

Quia hic vero pro quovis valore ipſius x functio y habeat n valores, etiam ſcripto $x + \Delta x$ loco x pro Δy inveniri debent n valores, atque ideo totidem diverſae rationes $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, totidemque diverſae limites ſeu ultimae rationes $\frac{dy}{dx}$, ita ut ipſa quoque functio $\frac{dy}{dx}$ hoc caſu habeat n valores, quorum quilibet ſeparatim invenitur, prouti hic vel ille valor pro y ex æquatione $y^n + Py^{n-1} + Qy^{n-2} + Ry^{n-3} + \ldots + S = 0$ quæſitus in formula pro $\frac{dy}{dx}$ inventa ſubſtituatur.

§. 239.

Data æquatione inter duas variabiles x et y, ad inveniendam ultimam rationem $\frac{dy}{dx}$ ex eadem opus non eſt, ut ante differentiationem actualem omnes ipſius termini in unum æquationis membrum transponantur, ſicque æquatio ad formam $V = 0$ redigatur. Ex quotcunque enim terminis functio V conſtet, ut p, q, r, s, etc. exiſtento $p + q + r + s +$ etc. $= 0$, quidam eorum terminorum in unum et reliqui in alterum æquatio-

nis membrum facili transponuntur negotio. Si itaque unum æquationis membrum ſit P, alterum Q, ut ſit P $= Q$, dico, etiam fore $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx}$. Eſt enim $P = Q$, vel $P - Q = 0$; ideo $\frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dx} = 0$, et proinde $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx}$. Sub quacunque igitur forma propoſita ſit æquatio inter duas variabiles x et y, *eſt prioris membri differentiale per* dx *diviſum æquale poſterioris membri differentiali per* dx *diviſo*, *vel quod eodem redit*, *differentiale prioris membri æquale differentiali poſterioris*.

Sit $yy = px$, erit $2y\frac{dy}{dx} = p$, atque $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$ $= \pm \frac{p}{2\sqrt{px}} = \pm \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$, quia $y = \pm \sqrt{px}$.

Si ſit $ayy = apx + pxx$; erit $2ay\frac{dy}{dx} = ap + 2px$, atque $\frac{dy}{dx} = \frac{ap + 2px}{2ay} = \pm \frac{ap + 2px}{2a\sqrt{\left(px + \frac{pxx}{a}\right)}}$, quia y $= \pm \sqrt{\left(px + \frac{pxx}{a}\right)}$.

Ideo ex $ayy = apx - pxx$ ſit $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{ap - 2px}{2a\sqrt{\left(px - \frac{pxx}{a}\right)}}$.

§. 240.

Aequationes formae $\frac{dy}{dx} = X$, exiſtente X functione variabilis x, vel duarum variabilium x et y, ſi valor pro y ex æquatione inter x et y ſubſtitutus non ſit, vocantur

cantur *Aequationes differentiales*. Ac methodus ex æquatione $\frac{dy}{dx} = X$, quæ exprimit ultimam rationem, cum qua differentiae variabilium y et x, evaneſcunt, inveniendi ipſam æquationem inter y et x, ex qua illa differentiando elicitur, *Calculus integralis* vocatur. Conceſſis regulis calculi integralis omnis curva algebraica in eodem plano deſcripta dari poteſt per æquationem differentialem pariter ac algebraicam inter variabilis x et y, ſi x abſciſſam et y applicatam denotet, quia data æquatione inter x et y determinatur limes rationis $\frac{dy}{dx}$, et ideo viciſſim determinato limite rationis $\frac{dy}{dx}$, determinatur ipſius y a variabili x pendentia. Sic æquatio differentialis $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$ æque eſt pro parabola, ac iſta $yy = px$, quia una earum data ſimul altera data eſt. Haec cauſſa eſt, cur æquatio inter variabiles x et y pro curva quacunque in plano deſcripta reſpectu differentialis ſuæ *Aequatio integralis* vocetur.

§. 241.

Quod adtinet ad differentialia ſecunda et reliqua altiora functionum unius variabilis x explicitarum invenienda, pluribus regulis non opus eſt, quia generaliter $d^{n+1}y$ ex $d^n y$ invenitur eodem modo, quo dy ex ipſa functione y elicitur, eo tantum obſervato, quod ſignum dx conſiderandum ſit, tanquam eſſet quantitas conſtans (§. 229.). Aequationum differentialium ulteriori differentiationi, quæ functiones implicitas potiſſimum ſpectat, peculiarem reſervamus tractationem in ſequentibus proponendam.

Sit $y = x^n$, atque denotet n numerum integrum vel fractum, poſitivum vel negativum quemcunque, erit

$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = n.\,n-1.\,x^{n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n.\,n-1.\,n-2.\,x^{n-3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,x^{n-4}$$

$$\frac{d^my}{dx^m} = n.\,n-1.\,n-2.\,n-3\;.\;.\;.\;n-m+1.\,x^{n-m}$$

Si uti poſuimus, ſit $y = x^n$, hæc ultima formula pro $\frac{d^my}{dx^m}$ generalis eſt. Si enim valet pro $\frac{d^my}{dx^m}$, valet quoque pro $\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}$. Differentiata enim formula $\frac{d^my}{dx^m}$ fit $\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = n.\,n-1.\,n-2.\,n-3\;.\;.\;.\;n-m+1.\,n-m.\,x^{n-m-1}$; quæ formula quoque ſecundum legem aſſumtam formatur. Eadem vero lex valet pro differentiali primo et ſecundo, hinc pro tertio, quarto et ſequentibus omnibus.

§. 242.

Si data ſit ſeries valorum y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; y^{V}; etc; quos functio y unius variabilis x induit, ſi loco x ſucceſſive ponantur $x+\Delta x$; $x+2\Delta x$; $x+3\Delta x$; $x+4\Delta x$, etc; manifeſtum eſt, quod

valoribus ipſius	reſpondeant valores
x	$y = y$
$x+\Delta x$	$y^{I} = y+\Delta y$
$x+2\Delta x$	$y^{II} = y+2\Delta y+\Delta^2 y$
$x+3\Delta x$	$y^{III} = y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y$
$x+4\Delta x$	$y^{IV} = y+4\Delta y+6\Delta^2 y+4\Delta^3 y+\Delta^4 y$

Ideo

Ideo quivis hujus ſeriei terminus y^N, qui in ordine eſt n, primo y non connumerato, et qui oritur ſcripto $x+n\Delta x$ loco n, erit

$$y+\frac{n}{1}\Delta y+\frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 y+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 y+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\Delta^4 y+..+\frac{n.n-1.n-2..n.n+1}{1.2.3....n}$$

$\Delta^n y$. Quam formulam eſſe univerſalem, ſequenti ratione demonſtro. Dico, ſi iſta formula vera eſt pro ſerie $n$ta, atque valet pro termino r, eadem ſimul valet pro termino $r+1$. Sit enim ſeriei n terminus $r$tus, primo nimirum non connumerato, =

$$+\frac{n.n-1.n-1.n-2....n-r+1}{1.2.3.....r}\Delta^r y,$$ erit

ſecundum formulam terminus $r+1$tus =

$$\frac{n.n-1.n-2.....n-r}{1.2.3.....r+1}\Delta^{r+1} y.$$ Idem vero

invenitur, ſi loco r ubique in formula pro termino r ponatur $r+1$. Ideo formula vera eſt pro termino $r$to, ſi vera ſit ſeries y^N. Praeterea dico, ſi formula iſta valeat pro ſerie n ea ſimul vera eſt pro ſerie $n+1$. Eſt enim (*per hyp.*) $y^N=y+\frac{n}{1}\Delta y+\frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 y+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 y...+\frac{n.n-1.n-2...n-n+1}{1.2.2....n}$

$\Delta^n y$. Oritur vero y^{N+1} ex y^N ſi ubique loco y ſubſtituatur $y+\Delta y$, et $\Delta y+\Delta^2 y$ loco Δy, $\Delta^2 y+\Delta^3 y$ loco $\Delta^2 y$ et ita porro. Quibus factis

duae oriuntur ſeries, nimirum

$$I = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 y + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\Delta^4 y + \text{etc.}$$

$$II = +\Delta y + \frac{n}{1}\Delta^2 y + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^3 y + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^4 y + \text{etc};$$

quæ ſibi additæ dabunt ſeriem $(n+1)$ *tam*, quae eſt $= y^{N+1}$. Eſt igitur terminus $(r+1)$tus Ser. I + term. $r$tus Ser. II. = term. $(r+1)$to Seriei y^{N+1}. Sed erat terminus $(r+1)$tus ſeriei $I = \frac{n.n-1.n-2.n-3 \ldots n-r}{1.2.3.4 \ldots r+1}\Delta^{r+1}y$ ejusdemque ſeriei terminus

$$r\text{tus} = \frac{n.n-1.n-2.n-3 \ldots n-r+1}{1.2.3.4 \ldots r}\Delta^r y$$

cujus differentia eſt ſeriei II. terminus

$$r\text{tus} = \frac{n.n-1.n-2.n-3 \ldots n-r+1}{1.2.3.4 \ldots r}\Delta^{r+1}y.$$

Ergo eſt terminus $(r+1)$tus ſeriei y^{N+1}

$$= \left(\frac{n.n-1.n-2 \ldots n-r}{1.2.3 \ldots r+1} + \frac{n.n-1.n-2 \ldots n-r+1}{1.2.3 \ldots r}\right)\Delta^{r+1}y$$

$$= \left\{\frac{n.n-1.n-2 \ldots n-r+1}{1.2.3 \ldots r} \times \frac{n-r}{r+1} + \frac{n.n-1.n-2 \ldots n-r+1}{1.2.3 \ldots r} \times \frac{1}{1}\right\}\Delta^{r+1}y$$

$$= \left\{\frac{n.n-1.n-2 \ldots n-r+1}{1.2.3 \ldots r} \times \frac{n-r}{r+1} + \frac{n.n-1.n-2 \ldots n-r+1}{1.2.3 \ldots r} \times \frac{r+1}{r+1}\right\}\Delta^{r+1}y$$

$$= \frac{n.n-1.n-2 \ldots n-r+1}{1.2.3 \ldots r} \times \frac{n+1}{r+1}\Delta^{r+1}y$$

$$= \frac{n+1.n.n-1.n-2 \ldots n-r+1}{1.2.3 \ldots r.r+1}\Delta^{r+1}y.$$

Quodſi

Quodſi vero in formula termini $(r+1)$ti ſeriei y^{N} ubique pro n ſubſtituatur $n+1$; eadem invenitur formula. Quare ſi formula inventa pro y^{N} vera ſit, eadem etiam pro y^{N+1} eſt vera. Sed vera eſt pro y^{I} et y^{II} (*per inductionem*). Ergo vera eſt pro y^{III}, y^{IV} et ſequentibus omnibus.

§. 243.

Ponamus jam $n\Delta x = b$, erit $n = \frac{b}{\Delta x}$, atque n talis ipſius Δx functio, quæ evadit $= \infty$, ſi Δx evaneſcat. Præterea ob $n\Delta x = b$, erit $n^r \Delta x^r = b^r$, unde $n^r = \frac{b^r}{\Delta x^r}$, atque ſi r ſit numerus integer poſitivus, $\infty^r = \frac{b^r}{dx^r}$, evaneſcente Δx. Subſtituatur in formula inventa $\frac{b}{dx} = \infty$ loco n; ac ſimul dx loco Δx, dy loco Δy, ddy loco $\Delta^2 y$; $d^3 y$ loco $\Delta^3 y$, etc, ponendum erit. Quo facto habetur $y^{N} = y + \frac{\infty}{1} dy + \frac{\infty \cdot \infty - 1}{1 \cdot 2} ddy +$

$$\frac{\infty \cdot \infty - 1 \cdot \infty - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 y + \frac{\infty \cdot \infty - 1 \cdot \infty - 2 \cdot \infty - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 y +$$

etc. Habent vero ipſius y differentialia ſequentes formas $dy = pdx$, $ddy = qdx^2$, $d^r y = sdx^r$. Ideo terminus hujus ſeriei generalis indicis r erit

$$\frac{\infty \cdot \infty - 1 \cdot \infty - 2 \cdot \infty - 3 \cdot \cdot \cdot \infty - r + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot r} sdx^r$$

Productum ex factoribus $\infty \cdot \infty - 1 \cdot \infty - 2 \cdot \cdot \cdot \infty - r + 1$ iſtam habet formam $\infty^r - f\infty^{r-1} + g\infty^{r-2} - \cdot \cdot \cdot \pm h\infty$, eſtque $(\infty^r - f\infty^{r-1} + g\infty^{r-2} \cdot \cdot \cdot \pm h\infty)\, sdx^r = \infty^r sdx^r$ (§. 78.). Proinde

[Calculus differentiarum finitarum]

inde terminus generalis ſeriei inventae indicis r erit $\frac{\infty^r\, sdx^r}{1.2.3\ldots r} = \frac{\infty^r\, d^r y}{1.2.3\ldots r} = \frac{b^r\, d^r y}{1.2.3\ldots r.dx^r}$, quia $\infty^r = \frac{b^r}{dx^r}$. Unde integra ſeries ſequentem accipit formam: $y + \frac{b\,dy}{1.dx} + \frac{b^2 ddy}{1.2.dx^2} + \frac{b^3 d^3 y}{1.2.3.dx^3} + \frac{b^4 d^4 y}{1.2.3.4\,dx^4}$ + etc. atque hic eſt valor, quem induit functio quæcunque variabilis x, ſi $x+b$ in eadem loco x ſubſtituatur.

§. 244.

Formulæ hujus ſinguli termini per continuam ipſius y differentiationem inveniri poſſunt. Si enim y ſit functio ipſius x algebraica, erunt $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3 y}{dx^3}$; etc; pariter functiones ipſius x algebraicæ per differentiationem inveniendæ. Si pro b ſumatur numerus negativus, reperietur valor, quem functio quaecunque y ipſius x induit, dum ipſa quantitas x diminuitur data quantitate b. Si nimirum loco x ponatur $x-b$, functio y ipſius x quaecunque accipiet iſtum valorem $y - \frac{b\,dy}{1.dx} + \frac{b^2 ddy}{1.2.dx^2} - \frac{b^3 d^3 y}{1.2.3.dx^3} + \frac{b^4 d^4 y}{1.2.3.4.dx^4}$ — etc. Quodſi igitur y fuerit functio rationalis integra ipſius x, quoniam tandem ad differentialia conſtantia pervenitur, valor variatus per expreſſionem finitam exprimetur. Multiplicem hæc formula habet uſum. Unus, qui ſtatim ſe manifeſtat, in eo conſiſtit, ut ad differentias functionum algebraicarum finitas inveniendas inſerviat. Cum enim, dum quantitas variabilis x quantitate finita b augeri aſſumitur, functio ejus quæcunque y augeatur ſua diffe-

differentia prima Δy, exiſtente $b = \Delta x$; differentia ipſius y per continuam differentiationem reperiri poterit. Erit enim $\Delta y = \frac{\Delta x}{1} \times \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \times \frac{ddy}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} \times \frac{d^4y}{dx^4} +$ etc. ſicque differentia finita Δy exprimitur per ſeriem, cujus ſinguli termini ſecundum poteſtates ipſius Δx procedunt.

§. 245.

Quemadmodum autem differentia prima eſt inventa, ita quoque differentiae ſequentes ſimilibus expreſſionibus exhiberi poſſunt. Induat enim x ſucceſſive valores $x+b$; $x+2b$; $x+3b$; $x+4b$; etc; atque valores functionis y reſpondentes erunt

$$y^{I} = y + \frac{bdy}{1.dx} + \frac{b^2ddy}{1.2.dx^2} + \frac{b^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{b^4d^4y}{1.2.3.4.dx^4} + \text{etc.}$$

$$y^{II} = y + \frac{2bdy}{1.dx} + \frac{4b^2ddy}{1.2.dx^2} + \frac{8b^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{16b^4d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

$$y^{III} = y + \frac{3bdy}{1.dx} + \frac{9b^2ddy}{1.2.dx^2} + \frac{27b^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{81b^4d^4y}{1.2.3.4.dx^4} + \text{etc.}$$

$$y^{IV} = y + \frac{4bdy}{1.dx} + \frac{16b^2ddy}{1.2.dx} + \frac{64b^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{256b^4d^4y}{1.2.3.4.dx^4} + \text{etc.}$$

etc.

Cum igitur ſit

$$\Delta y = y^{I} - y$$
$$\Delta^2 y = y^{II} - 2y^{I} + y$$
$$\Delta^3 y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y$$
$$\Delta^4 y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$

$$\Delta^n y = y^{N} - \frac{n}{1} y^{N-I} + \frac{n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2} y^{N-II} - \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} y^{N-III} + \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} y^{N-IV} - \text{etc.}$$

iſtae differentiae per differentialia hoc modo exprimentur:

$$\Delta y = \frac{b\,dy}{1 \,.\, dx} + \frac{b^2 ddy}{1 \,.\, 2 \,.\, dx^2} + \frac{b^3 d^3 y}{1.2.3.\, dx^3} + \frac{b^4 d^4 y}{1.2.3.4.\, dx^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^2 y = \frac{(2^2 - 2.1) b^2 ddy}{1 \,.\, 2\, dx^2} + \frac{(2^3 - 2.1) b^3 d^3 y}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, dx^3} + \frac{(2^4 - 2.1) b^4 d^4 y}{1.2.3.4.\, dx^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^3 y = \frac{(3^3 - 3.2^3 + 3.1) b^3 d^3 y}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, dx^3} + \frac{(3^4 - 3.2^4 + 3.1) b^4 d^4 y}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, dx^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^4 y = \frac{(4^4 - 4.3^4 + 6.2^4 - 4.1) b^4 d^4 y}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, dx^4} + \frac{(4^5 - 4.3^5 + 6.2^5 - 4.1) b^5 d^5 y}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, dx^5} + \text{etc.}$$

§. 246.

Formulam pro $\Delta^n y$ univerſalem eſſe ſic patet. Sumo eandem veram eſſe pro $\Delta^n y$, atque exinde concludo eandem quoque pro $\Delta^{n+1} y$ eſſe veram. Sit itaque

$$\Delta^n y = y^{N} - \frac{n}{1} y^{N-I} + \frac{n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2} y^{N-II} - \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} y^{N-III} + \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} y^{N-IV} - \text{etc.}$$

erit terminus hujus ſeriei generalis indicis r non connumerato primo $= \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \,.\, . \,.\, n-r+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, . \,.\, . \,.\, r} y^{N-R}$,

quod

quod facile patet. Oritur vero $\Delta^n y + \Delta^{n+1} y$ ex $\Delta^n y$ ſi ubique loco y^N ſcribatur y^{N+1}, y^N loco y^{N-I}, y^{N-I} loco y^{N-II}, et ſic porro. Quo facto duae orientur ſeries

$$\text{I. } \Delta^n y = y^N - \frac{n}{1} y^{N-I} + \frac{n.n-1}{1.2} y^{N-II} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} y^{N-III}$$

$$\text{II. } \Delta^n y + \Delta^{n+1} y = y^{N+1} - \frac{n}{1} y^N + \frac{n.n-1}{1.2} y^{N-I} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} y^{N-II} +$$

etc. ubi prior ſeries a poſteriori ſubtracta dabit ſeriem, quae eſt $= \Delta^{n+1} y$. Eſt igitur terminus $(r+1)$tus ſeriei II — term. $r$to ſeriei I $=$ termino $(r+1)$to ſeriei $\Delta^{n+1} y$. Eſt vero terminus $(r+1)$tus ſeriei II $=$

$$\frac{n.n-1.n-2 \;.\;.\;.\;.\; n-r}{1.2.3.4 \;.\;.\;.\;.\; r+1} y^{N-R}$$

et terminus $r$tus ſeriei I $=$

$$-\frac{n.n-1.n-2.n-4 \;.\;.\;.\; n-r+1}{1.2.3.4 \;.\;.\;.\; r} y^{N-R}$$

Ideo $(r+1)$tus ſeriei $\Delta^{n+1} y$ erit

$$\frac{n.n-1.n-2 \ldots n-r}{1.2.3.4 \ldots r+1} + \frac{n.n-1.n-2 \ldots n-r+1}{1.2.3 \ldots r} y^{N-R}$$

$$= \frac{n+1.n.n-1.n-2.n-3 \;.\;.\; n-r+1}{1.2.3.4 \;.\;.\;.\; r.r+1} y^{N-R}. \text{ conf. 242.}$$

Quodſi vero in formula termini $(r+1)$ti ſeriei $\Delta^n y$ ubique ſubſtituatur $r+1$ loco n; eadem invenitur formula. Proinde ſi formula inventa pro $\Delta^n y$ vera ſit, eadem quoque pro $\Delta^{n+1} y$ eſt vera. Sed valet pro Δy et $\Delta^2 y$, ergo pro $\Delta^3 y$, pro $\Delta^4 y$ et ſequentibus omnibus.

Ideo generaliter eſt

$$: \frac{\left(n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n.n-1}{1.2}(n-2)^n - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-3)^n + \text{etc.}\right) b^n d_n y}{1.2.3.4.5 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; n.dx^n}$$

$$\frac{\ldots^{n+1} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+1} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-2)^{n+1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-3)^{n+1} + \text{etc.}\Big) b^{n+1} d^{n+1} y}{1.2.3.4.5 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; n+1.dx^{n+1}}$$

tc.

§. 247.

Ratio determinandi valorem functionis cuius Numerator et Denominator certo caſu evaneſcunt.

Quia functionis y unius variabilis x differentia, quam capit poſito $x+\Delta x$ loco x, inventa eſt $\Delta y = \frac{\Delta x dy}{1.dx} + \frac{\Delta x^2 ddy}{1.2.dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4y}{1.2.3.4.dx^4} +$ etc; erit ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x ddy}{1.2.dx^2} + \frac{\Delta x^2 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^3 d^4y}{1.2.3.4.dx^4} +$ etc. Accidit vero interdum, ut valore quodam determinato pro x ſubſtituendo fiat $\frac{dy}{dx} = 0$; tum itaque fit $\Delta y = \frac{\Delta x^2 ddy}{1.2.dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4y}{1.2.3.4.dx^4}$ + etc, et proinde ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x^2} = \frac{ddy}{1.2.dx^2} + \frac{\Delta x d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4y}{1.2.3.4.dx^4}$ + etc, hujusque rationis ultima $\frac{dy}{dx^2} = \frac{ddy}{2dx^2}$. Unde porro concluditur, caſu $\frac{dy}{dx} = 0$ et $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ fore $\frac{dy}{dx^3} = \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3}$, et ſi præterea $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, eſſe $\frac{dy}{dx^4} = \frac{d^4y}{1.2.3.4.dx^4}$. Generatim itaque ſi omnes coefficientes $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ . . . $\frac{d^m y}{dx^m}$ fuerint $= 0$, erit $\frac{dy}{dx^{m+1}} = \frac{d^{m+1}y}{1.2.3\ldots m+1.dx^{m+1}}$. Si itaque ſit functio $\frac{d^{m+1}y}{1.2.3\ldots m+1.dx^{m+1}} = p$, ut habea-

tur

tur $\frac{dy}{dx^{m+1}} = p$; hæc æquatio ſic quoque exprimi poteſt $dy = pdx^{m+1}$ (§. 229. 230.).

§. 248.

His poſitis propoſita ſit fractio quæcunque $y = \frac{P}{Q}$ exiſtentibus P et Q functionibus ipſius x, atque fieri poteſt, ut valore quodam determinato $= a$ pro x ſubſtituto P et Q ſimul evaneſcant, quo caſu fit $y = \frac{0}{0}$, quem valorem finitum eſſe poſſe ex antecedentibus manifeſtum eſt. Ipſe vero iſte valor $= \frac{0}{0}$ eſt limes rationis $\frac{P}{Q}$, ad quem iſta ratio perpetuo adpropinquat functionibus P et Q ſimul ad valorem $= 0$ adpropinquantibus, dum variabilis x ad valorem $= a$ accederet. Valor variabilis x ante erat $a + \Delta x$, quam evaneſcente Δx attingebat valorem $= a$; proinde valores functionum P et Q ante erant $0 + \Delta P$ et $0 + \Delta Q$, quam evaneſcente Δx et cum ea ſimul ΔP et ΔQ factae erant $= 0$. Unde patet, ipſum functionis $\frac{P}{Q}$, caſu $x = a$, valorem eſſe $\frac{0 + dP}{0 + dQ}$, id eſt functio y, caſu $x = a$ evadit $= \frac{dP}{dQ}$. Omnia manifeſta fient ex facili exemplo, quod ſequitur. Si ſit $y = \frac{aa - xx}{a - x}$, caſu $x = a$, erit $y = \frac{aa - aa}{a - a} = \frac{0}{0}$. Sed ante erat $x = a + \Delta x$, quam evaneſcente Δx fieret $x = a$, atque ideo ante erat $y = \frac{aa - (a + \Delta x)^2}{a - a - \Delta x}$, quam caſu $x = a$ evaderet $y = \frac{0}{0}$.

 Unde

Unde patet, quia pro valore $x = a + \Delta x$ erat $y = \frac{aa - aa - 2a\Delta x - \Delta x^2}{a - a - \Delta x}$, evaneſcente Δx eſſe $y = \frac{aa - aa - 2adx - dx^2}{a - a - dx} = \frac{-2adx - dx^2}{-dx} = 2a = \frac{d.(aa - xx)}{dx} : \frac{d.(a - x)}{dx} = \frac{d(aa - xx)}{d.(a - x)}$.

§. 249.

Quoties itaque fractio hujus formæ $\frac{P}{Q}$ occurrit, cujus numerator et denominator certo caſu, ut $x = a$ evaneſcunt; valor fractionis $\frac{P}{Q}$ per ſequentem regulam invenitur. *Quærantur quantitatum P et Q differentialia caſu x = a, eaque loco ipſarum P et Q ſubſtituantur, quo facto erit $\frac{dP}{dQ}$ valor fractionis quæſitus.*

Si itaque hoc caſu $x = a$ foret $\frac{dP}{dx} = p$ et $\frac{dQ}{dx} = q$; fiet $\frac{dP}{dQ} = \frac{p}{q}$. Si vero ſit $\frac{dP}{dx^m} = R$, atque $\frac{dQ}{dx^n} = S$, vel $dP = Rdx^m$ et $dQ = Sdx^n$, erit fractionis $\frac{P}{Q}$ caſu $x = a$ valor $= \frac{Rdx^m}{Sdx^n}$, qui finitus erit, ſi $m = n$, infinite magnus ſi $m < n$, infinite parvus ſeu nullus, ſi $m > n$. Si propoſitæ fractionis termini P et Q poſito $x = a$ evaderent infiniti, quia $\frac{P}{Q} = \frac{1 : Q}{1 : P}$, eadem methodo caſu $x = a$ valor fractionis $\frac{P}{Q}$ caſu $x = a$ invenitur

qui

quia coincidit cum valore fractionis $\frac{1:Q}{1:P}$, cujus numerator et denominator tum caſu $x = a$ evaneſcunt. Eodem modo invenitur valor producti $0.\infty$, qui cum valore $0 : \frac{1}{\infty} = \frac{0}{0}$ coincidit.

SECTIO XVI.

DE VSV CALCVLI DIFFERENTIALIS IN DOCTRINA SERIERVM.

§. 250.

Sit $y = x^n$, exiſtente n numero fracto poſitivo vel negativo, vel etiam integro negativo; atque poſito $(x+b)$ loco x, fiet $(x+b)^n = y + \frac{b.dy}{1.dx} + \frac{bb.ddy}{1.2.dx^2} + \frac{b^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{b^4d^4y}{1.2.3.4.dx^4} +$ etc. Eſt vero $y = x^n$, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, $\frac{ddy}{dx^2} = n.n-1.x^{n-2}$, et generaliter $\frac{d^ry}{dx^r} = n.n-1.n-2 \ldots n-r+1.x^{n-r}$. Eſt itaque terminus ſeriei $(x+b)^n$ generalis indicis r, $\frac{b^rd^ry}{1.2.3 \ldots r.dx^r} = \frac{n.n-1.n-2 \ldots n-r+1}{1.2.3 \ldots r}x^{n-r}b^r$; ex quo integra ſeries iſtam recipit formam $(x+b)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}b^3 + \ldots$

$\dfrac{n.n-1.n-2.n-3\ldots n-r+1}{1.2.3.4\ldots r}x^{n-r}b^{r}$. Formula igitur pro elevando binomio quocunque ad quamlibet potentiam exponentis integri in §. 143. expoſita adeo univerſalis eſt, ut vera quoque ſit pro binomio ad dignitatem quamcunque exponentis integri negativi, ut et fracti vel poſitivi vel negativi elevando. Iſta vero ſeries perpetuo in infinitum excurrit, niſi exponens ſit integer poſitivus.

§. 251.

Perſpecta forma dignitatis cujuscunque radicis binomiæ, trinomiæ etiam radicis dignitas ejusdem gradus formabitur, et quadrinomiæ et generatim polynomiæ cujuscunque, ut $a+b+c+d+e+$ etc, ſumtis ſucceſſive a, $a+b$, $a+b+c$, etc, pro nomine primo et littera has ſequente pro altero. Poteſt vero hic quoque formula generalis indagari pro infinitinomio ſequentem in modum. Sit data ſeries $1+\alpha x 1+\beta x^{2}+\gamma x^{3}+\delta x^{4}+\epsilon x^{5}+$ etc, cujus potentia gradus m quæritur. Ponatur $\alpha x+\beta x^{2}+\gamma x^{3}+\delta x^{4}+\epsilon x^{5}+$ etc. $=y$, ſitque ipſa ſeries quæſita $1+Ax+Bx^{2}+Cx^{3}+Dx^{4}+Ex^{5}+$ etc. $=z$; eſſe igitur debet $(1+y)^{m}=z$, atque proinde $m(1+y)^{m-1}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}$, vel $mz\dfrac{dy}{dx}=(1+y)\dfrac{dz}{dx}$.

Jam $\dfrac{dy}{dx}=\alpha+2\beta x+3\gamma x^{2}+4\delta x^{3}+5\epsilon x^{4}+$ etc.

$\dfrac{dz}{dx}=A+2Bx+3Cx^{2}+4Dx^{3}+5Ex^{4}+$ etc. Ergo

$$\begin{array}{llllll}(1+y)\dfrac{dz}{dx}=A & +A\alpha x & +A\beta x^{2} & +A\gamma x^{3} & +A\delta x^{4} & +A\epsilon x^{5}+\ldots\\ & +2B & +2B\alpha & +2B\beta & +2B\gamma & +2B\delta\\ & & +3C & +3C\alpha & +3C\beta & +3C\gamma\\ & & & +4D & +4D\alpha & +4D\beta\\ & & & & +5E & +5E\alpha\\ & & & & & +6F\end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
mz\dfrac{dy}{dx} = m\alpha + 2m\beta x + 3m\gamma x^2 + 4m\delta x^3 + 5m\epsilon x^4 + \dots \\
+ mA\alpha + 2mA\beta + 3mA\gamma + 4mA\delta \\
+ mB\alpha + 2mB\beta + 3mB\gamma \\
+ mC\alpha + 2mC\beta \\
+ mD\alpha \dots
\end{array}
$$

Aequando jam terminos homogeneos invenitur

$$A = m\alpha;\quad B = \frac{(m-1)A\alpha + 2m\beta}{2};$$

$$C = \frac{(m-2)B\alpha + (2m-1)A\beta + 3m\gamma}{3};$$

$$D = \frac{(m-3)C\alpha + (2m-2)B\beta + (3m-1)A\gamma + 4m\delta}{4}$$

$$E = \frac{(m-4)D\alpha + (2m-3)C\beta + (3m-2)B\gamma + (4m-1)A\delta + 5m\epsilon}{5}$$

§. 252.

Ut formula generalis pro coefficiente potentiae x^n commode inveſtigari queat; ſeriei $1+y$ coefficiens quivis dicatur λ addito ejus numero ut ſit $\lambda 1; = \alpha$, $\lambda 2; = \beta$; atque $\lambda n;$ ſit, qui pertinet ad x^n, $\lambda n-1;$ vero, qui pertinet ad x^{n-1}, ſicque porro. Pari modo ſit L coefficiens quivis ſeriei z, addito numero, ut ſit $L1; = A$, $L2;\ B$, $Ln;$ vero et $Ln-1;$ pertineant ad x^n et x^{n-1}. Hoc poſito erit

$$1+y = 1 + \lambda 1;\, x \dots + \lambda r;\, x^r \dots + \lambda n;\, x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda 1; \dots + r.\lambda r;\, x^{r-1} \dots + n.\lambda n;\, x^{n-1}$$

$$z = 1 + L1;\, x \dots + Lr;\, x^r \dots + Ln;\, x^n$$

$$\frac{dz}{dx} = L1; \dots + r.Lr;\, x^{r-1} \dots + n.Ln;\, x^{n-1}$$

Quodſi jam primo quaeratur coefficiens producti $(1+y)\dfrac{dz}{dx}$ ad x^n, ſic concludendum eſt. Termini ſeriei $\dfrac{dz}{dx}$,

in quibus variabilis elevata eſt ad potentiam n; $n-1$; $n-2$; . . . $n-r$; . . . 1; ducti reſpective in terminos ſeriei $1+y$, qui habent variabilem elevatam ad potentiam 0; 1; 2; 3; . . . r . . . n; præbent facta continentia x^n. Summa igitur coefficientium eorum factorum eſt coefficiens quæſitus, qui ideo fit

$$1.L1;.\lambda n + 2.L2;.\lambda n-1; + 3.L3;.\lambda n-2; \ldots + (n-r+1).Ln-r+1;.\lambda r \ldots + n.Ln;.\lambda 1; + (n+1).Ln+1;.1.$$

Deinde quæratur coefficiens producti $z\frac{dy}{dx}$ ad x^n, qui eodem modo componitur ex ſeriei $\frac{dy}{dx}$ coefficientibus, qui pertinent ad potentias n; $n-1$; . . . $n-r$ . . . 0 ductis in eos ſeriei z, qui pertinent ad 0; 1; 2; . . . r . . . n; atque proinde invenitur

$$(n+1).\lambda n+1;.1 + n.\lambda n;.L1 + (n-1).\lambda n-2;.L2 \ldots + r.\lambda r;.Ln-r+1; \ldots + 2.\lambda 2;.Ln-1; + \lambda 1;.Ln;$$

Denique ſingulæ partes coefficientis poſterioris multiplicentur per m; quod prodit ponatur priori coefficienti æquale, unde ſi eruatur $Ln+1$; fiet

$$(n+1).Ln+1; = (m-n).Ln;.\lambda 1 + (2m-n+1).Ln-1;.\lambda 2 \ldots + (m.r-n+r-1).Ln-r+1;.\lambda r; \ldots + (m.n-1).L1;.\lambda n; + m.(n+1).\lambda n+1.$$

Utrinque itaque per $n+1$ diviſo habetur $Ln+1$; per coefficientes datos ab initio ſeriei $1+y$, et jam inventos præcedentes ſeriei z.

Hujus ipſius coefficientis generalis *pars generalis* eſt $\frac{(mr-n+r-1).Ln-r+1;.\lambda r}{m}$, quæ ſubſtituendo ſucceſſive 1. 2. 3. . . . $n+1$ in locum ipſius r, præbet partes coefficientis primam, ſecundam . . . .

uſque

uſque ad ultimam. Nam $\lambda o;$ eſt $= 1$ ſi $L1; = A$, quia 1 præcedit coefficientem A, qui ſeriei z primus eſt appellatus, coefficientes vero hanc unitatem præcedentis cum nulli ſint, erit $L - 1; = 0$, $L - 2; = 0$, et ſic porro

§. 253.

Detur nunc ſeries $kx^e + \alpha x^{e+d} + \beta x^{e+2d} + \gamma x^{e+3d}$ . . . ; ea reſolvitur in $kx^e. (1 + \frac{\alpha}{k} x^d + \frac{\beta}{k} x^{2d} + \frac{\gamma}{k} x^{3d} \ldots) = kz^{\frac{e}{d}}. (1 + \frac{\alpha}{k} z + \frac{\beta}{k} z^2 + \frac{\gamma}{k} z^3 \ldots)$ ſi ponatur $x^d = z$, atque proinde $x = z^{\frac{1}{d}}$. Data vero potentia indefinita ſerie $1 + \frac{\alpha}{k} z + \frac{\beta}{k} z^2 + \frac{\gamma}{k} z^3 \ldots$ quam vocavimus $1 + y$; datur eadem potentia ipſius $kz^{\frac{e}{d}}. (1 + y)$. Proinde hæc methodus complectitur ſeries omnes, in quibus exponentes potentiarum variabilis conſtituunt progreſſionem arithmeticam. Si ſeriei $kx^e + kx^{e+d} + \beta x^{e+2d}$ . . . exponentium unus vel plures ſint negativi, erunt e, d, ambo, vel alteruter horum numerorum negativi, et hinc determinabitur $x^{\frac{e}{d}}$; ſed ſeries $1 + y$ hac negativi conditione non adficietur, ut nec illa univerſalitati methodi noceat.

Ad caſus particulares hæc facile adplicantur. Ita pro quadrato trinomii, ubi $\gamma = \delta = \varepsilon \ldots = 0$, coefficiens inventus generalis abit in $\frac{(2-n).Ln;.\alpha + (5-n)Ln-1;\beta}{n+1}$. Qui in locum ipſius n poſitis ſucceſſive $0; 1; 2; 3; 4; 5;$ dat $A = 2\alpha$; $B = \frac{A\alpha + 4\beta}{2} = \alpha^2 + 2\beta$; $C = \frac{0 + 3A\beta}{2} = 2\alpha\beta$; $D = \frac{-C\alpha + 2B\beta}{4} = \beta^2$; $E = \frac{-2D\alpha + C\beta}{5} = 0$

F =

$F = \frac{-3.E + 0.D}{6} = c.$ Pro $n > 5$ evaneſcunt tam Ln, quam $Ln-1$, unde apparet, quod pro mulinomio definito ſcripto integro poſitivo loco m, ſeries tandem abrumpatur, coëfficientibus evaneſcentibus.

§. 254.

Differentia cujusvis ordinis $\Delta^n y$ functionis y unius variabilis x datur per ſeriem hujus formæ $\Delta^n y = P\Delta x^n + Q\Delta x^{n+1} + R\Delta x^{n+2} + S\Delta x^{n+3} +$ etc, eſtque ultima ratio $\frac{d^n y}{dx^n} = P$. Habetur præterea $\Delta^n y^m = P^m (\Delta x^n)^m + \frac{m}{1} P^{m-1} Q (\Delta x^n)^{m+1} + \frac{m.m-1}{1.2} P^{m-2} Q^2 + \frac{m}{1} P^{m-1} R) (\Delta x^n)^{m+1} +$ etc, et exinde concluditur ultima ratio $\frac{(d^n y)^m}{(dx^n)^m} = P^m$. Data igitur ultima ratione $\frac{d^n y}{dx^n}$, quæ expreſſio non aliud ſignificat, niſi certam ipſius x functionem, ex functione y per explicatas differentiationis regulas deducendam, ſimul habetur ejus dignitas quæcunque per conſuetas Algebræ operationes. Si enim v. g. fuerit $\frac{dy}{dx} = P$, eſt $\frac{dy^2}{dx^2} = P^2$, $\frac{dy^3}{dx^3} = P^3$, $\frac{dy^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} = P^{\frac{1}{2}}$, $\frac{dy^{-1}}{dx^{-1}} = P^{-1}$, et ita porro.

§. 252.

Reverſio ſerierum.

Data formula generali pro potentia indefinite polynomii vel infinitinomii cujuscunque ſolvi poſſunt problemata reverſionis ſerierum. Eſt enim *reverſio ſerierum* illud negotium, quo data variabili y per ſeriem infinitam per omnes potentias ipſius x, quarum exponentes conſtituunt datam progreſſionem arithmeticam; vel quoque datis duabus ejusmodi ſeriebus, quarum una continet variabilem y et altera variabilem x, per potentias expo-

exponentium in progreſſione arithmetica progredientium; invenitur altera variabilis x per ejusmodi ſeriem. Explicabimus hic ipſam methodum in formula quadam generali, præcipuos, qui occurrere poſſunt, caſus ſpeciales ſub ſe complectente; ipſa problemata, quæ alias per reverſionem ſerierum ſolvi ſolent, infra brevioribus methodis ſoluturi. Sit itaque $ax^t + bx^{t+1} + cx^{t+2} + ex^{t+3}$ etc. $= ky^t + my^{t+1} + ny^{t+2} + py^{t+3}$ etc. Compendii cauſſa poſitus eſt denominator $= 1$. Poteſt pro lubitu aſſumi alius denominator, et methodus eadem manet, cujus regulæ ſunt ſequentes. Aſſumitur $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4 +$ etc, et coefficientes A, B, C, D, etc, determinantur ex æquatione data $ax^t + bx^{t+1} + cx^{t+2} + ex^{t+3} +$ etc. $- ky^t - my^{t+1} - ny^{t+2} - py^{t+3} -$ etc. $= 0$, ſubſtituendo valores ipſarum x^t, x^{t+1}, x^{t+2}, etc; erit

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} ax^t = aA^t y^t + \frac{t}{1} aA^{t-1} B y^{t+1} + \frac{t.t-1}{1.2} aA^{t-2} B^2 y^{t+2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{t}{1} aA^{t-1} C y^{t+2} \text{ etc.} \\ + bx^{t+1} = \ldots + bA^{t+1} y^{t+1} \ldots + \frac{t+1}{1} bA^{t-2} B y^{t+2} \text{ etc.} \\ + cx^{t+2} = \quad . \quad . \quad . \quad + cA^{t+2} y^{t+2} \text{ etc.} \\ - ky^t - my^{t+1} - \text{etc.} = - ky^t - my^{t+1} - ny^{t+2} \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Quia hic ſinguli coefficientes ſunt $= 0$ (§. 235.) invenitur $A = \sqrt[t]{\frac{k}{a}}$; $B = \frac{m - bA^{t+1}}{taA^{t-1}}$;

$$C = \frac{n - cA^{t+2} - \frac{t+1}{1} bA^{t-2}B - \frac{t.t-1}{1.2} aA^{t-2} B^2}{taA^{t-1}};$$

etc.

Si fuerit $y = ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 +$ etc. et quæritur x per ſeriem $Ay + By^2 + Cy^3 +$ etc; erit $t = 1$,

$t = 1$, $k = 1$, $m = 0 = n = p$, etc. Atque ſi $y = ax + cx^3 + fx^5 +$ etc, ſimul eſt $b = 0 = e$ etc.

§. 256.

transmutatio functionis y, posito in ea 1) x = 0

Demonſtravimus §. 243, quod functio y variabilis x loco x poſito $x \pm b$, ſequentem recipiat valorem

$$y \pm \frac{bdy}{1.dx} + \frac{b^2ddy}{1.2.dx^2} \pm \frac{b^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{b^4d^4y}{1.2.3.4.dx^4} \pm \frac{b^5d^5y}{1.2.3.4.5.dx^5} + \text{etc.}$$

Hæc vero expreſſio locum habere debet, ſive pro b quantitas quæcunque conſtans aſſumatur, ſive etiam variabilis, ab ipſa x pendens. Inventis enim per differentiationem valoribus functionum $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc, in factoribus b, b^2, b^3, etc, variabilitas non ſpectatur, et ideo perinde eſt, ſive b denotet quantitatem conſtantem, ſive variabilem ab x pendentem. Sit itaque $b = x$, atque ſi in functione y loco x ſcribatur $x - x$, vel quod idem eſt, ſi ponatur $x = 0$, valor functionis erit $y - \frac{xdy}{1.dx} + \frac{x^2ddy}{1.2.dx^2} - \frac{x^3ddy}{1.2.3.dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} -$ etc. Ex his itaque concludi poteſt, ſi y ejusmodi fuerit variabilis x functio, ut ipſa evaneſcat, poſito $x = 0$, fore $y - \frac{xdy}{1.dx} + \frac{xxddy}{1.2.dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4.dx^4} -$ etc. $= 0$. Quodſi y autem ſit talis variabilis x functio, quæ poſito $x = 0$ recipit valorem datum $= A$; erit $y - \frac{xdy}{1.dx} + \frac{x^2ddy}{1.2.dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4.dx^4} -$ etc $= A$. Si loco x ponatur nx, hoc eſt

2) nx loco x

$x +$

$x+(n-1)x$, functio y iſtum habet valorem $y+\frac{(n-1)x\,dy}{1.dx}$ $+\frac{(n-2)^2x^2\,ddy}{1.2.dx^2}+\frac{(n-1)^3x^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3}+$ etc. Si denique in functione y loco x ponatur quæcunque ipſius functio, quæ ſit t; ipſa functio y; ob $t=x+t-x$, in formam ſequentem $y+\frac{(t-x)\,dy}{1.dx}+\frac{(t-x)^2\,ddy}{1.2\,dx^2}+$ $\frac{(t-x)^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3}+$ etc. transmutabitur.

b) quacunque functione — ipſius x loco x.

SECTIO XVII.

DE MAXIMIS ET MINIMIS FVNCTIONVM VNIVS VARIABILIS.

§. 257.

Quando functio quædam y quantitatis variabilis x ita eſt comparata, ut creſcente variabili x ejus functio y continuo creſcat et decreſcat; ipſa hæc functio ad valorem quendam ipſius x determinatum habebit valorem maximum vel minimum, hoc eſt ejusmodi valorem, qui ſit major vel minor, quam antecedentes et ſequentes. Habebit vero functio y *valorem maximum abſolutum*, ſi poſita $x=f$ valor ipſius x major ſit quam omnes antecedentes et conſequentes, ita ut poſito vel $x>f$, vel $x<f$, utcunque ſemper minor inveniatur ipſius x valor eo, qui prodit, ſi ſit $x=f$. Pari ratione functio ipſius y habebit *valorem minimum abſolutum*, ſi poſito $x>f$ vel $x<f$ valor ipſius y reſpondens ſemper ma-

De Maximo et Minimo in genere.

major ſit eo, qui prodit poſito $x = f$. Præterea autem quoque functio y maximum valorem recipere dicitur, poſito verbi gratia $x = f$ ſi iſte valor major fuerit, quam proximi antecedentes et conſequentes, qui oriuntur, ſi $x = f$ quantitate quadam exigua augeatur vel minuatur; etiamſi aliis valoribus loco x ſubſtitutis functio y majores forte valores recipiat. Atque ſimili modo functio y minimum valorem habere dicitur poſito $x = f$, ſi iſte valor minor fuerit, quam proximi antecedentes et conſequentes, qui oriuntur, ſi $x = f$ quantitate quadam exigua augeatur, vel minuatur, licet aliis valoribus loco x ſubſtitutis functio y minores forte habeat valores. Hi valores functionis y vocari poſſunt *maximi vel minimi relativi*, atque de iisdem in ſequentibus tantum ſermo erit. Ante autem, quam ipſa methodus hæc maxima et minima inveniendi explicetur, notari convenit, hanc inveſtigationem proprie in iis tantum caſibus locum habere, quando functio y ipſius x, quae proponitur, eſt uniformis. Quando enim y eſt functio ipſius x multiformis, proprie dici nequit, eam poſito $x = f$ valorem habere maximum vel minimum. Quia enim poſito $x = f$ functio y plures valores ſimul obtinet, atque præcedentes æque ac ſequentes ſint numero plures, dijudicatio maximi et minimi aliis innititur principiis poſtea explicandis, niſi omnes functionis y valores, qui ſingulis ipſius x valoribus reſpondent, ſint præter unum imaginarii, quo caſu hujusmodi functiones ut uniformes conſiderari poſſunt. Primo igitur loco functiones uniformes, et quae pro talibus haberi poſſunt contemplabimur, deinde ad functiones multiformes ea, quae explicanda erunt, applicaturi.

§. 258.

…ciatim De maximo et minimo I) In functionibus uniformibus

Quodſi igitur ſit y functio variabilis x uniformis quæ pro quolibet valore ipſius x determinato ſemper unum habet valorem realem, is valor qui efficit, ut habeat valorem maximum vel minimum, ipſa littera

denotetur. In caſu itaque maximi ſive loco x ſubſtituatur $x+\alpha$, ſive $x-\alpha$, valor ipſius y minor erit, quam ſi $\alpha=0$, et major in caſu minimi. Poſito autem $x+\alpha$ loco x, functio y eam accipit formam

tum quod valores poſitivos

$$y+\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\alpha^3 d^3y}{2.3.dx^3}+\frac{\alpha^4 d^4y}{2.3.4.dx^4}+\frac{\alpha^5 d^5y}{2.3.4.5.dx^5}+\text{etc.}$$

ex qua poſito $x-\alpha$ loco x fit

$$y-\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2}-\frac{\alpha^3 d^3y}{2.3.dx^3}+\frac{\alpha^4 d^4y}{2.3.4.dx^4}-\frac{\alpha^5 d^5y}{2.3.4.5.dx^5}+\text{etc.}$$

Proinde in caſu maximi eſſe debet

$$y>y+\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\alpha^3 d^3y}{2.3.dx^3}+\frac{\alpha^4 d^4y}{2.3.4.dx^4}+\frac{\alpha^5 d^5y}{2.3.4.5.dx^5}+\text{etc.}$$

$$y>y-\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2.dx^2}-\frac{\alpha^3 d^3y}{2.3.dx^3}+\frac{\alpha^4 d^4y}{2.3.4.dx^4}-\frac{\alpha^5 d^5y}{2.3.4.5.dx^5}+\text{etc.}$$

In caſu vero, quo valor ipſius y fit minimus, erit

$$y<y+\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2.dx^2}+\frac{\alpha^3 d^3y}{2.3.dx^3}+\frac{\alpha^4 d^4y}{2.3.4.dx^4}+\frac{\alpha^5 d^5y}{2.3.4.5.dx^5}+\text{etc.}$$

$$y<y-\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2.dx^2}-\frac{\alpha^3 d^3y}{2.3.dx^3}+\frac{\alpha^4 d^4y}{2.3.4.dx^4}-\frac{\alpha^5 d^5y}{2.3.4.5.dx^5}+\text{etc.}$$

Quia hæ ſeries ſunt convergentes, ſeu quilibet conſequens terminus minor antecedente, poſita pro α fractione valde parva; patet, ea quæ hic ſupponuntur, locum habere non poſſe, niſi ſecundus ſeriei terminus $\frac{\alpha dy}{dx}$ ſit $=$ o. Poſitis enim $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc, non eſſe $=$ o, ſive præterea iſtæ quantitates poſitivæ fuerint ſive negativæ, in duabus ſeriebus pro variato ipſius y valore inventis termini ſecundi, quarti, ſexti, ſeptimi, etc; ſemper habent contraria ſigna, proinde niſi ſit $\frac{\alpha dy}{dx} = 0$, valor ipſius y neque maximus eſſe poteſt, neque minimus. Sint enim primo omnes ſeriei pro $x + \alpha$ termini poſitivi, et erunt ſeriei pro $x - \alpha$ termini alternatim negativi et poſitivi ita, ut ſumma negativorum excedat ſummam poſitivorum. Proinde prima ſeries eſt $> y$ altera $< y$ et ideo nec maximum locum habet, nec minimum. Deinde ſint omnes prioris pro $x + \alpha$ ſeriei termini negativi, erit hæc ſeries $< y$, altera vero $> y$. Tertio autem quocunque modo ſigna prioris ſeriei varient, tamen ſi ſumma negativorum prioris ſeriei terminorum excedat ſummam poſitivorum; ſumma poſitivorum alterius ſeriei excedet ſummam negativorum et vice verſa. Nullo igitur plane modo maximum vel minimum habere poteſt locum, niſi ſit $\frac{\alpha dy}{dx} = 0$. Quare cum non ſit $\alpha =$ o, debet eſſe $\frac{dy}{dx} = 0$. Demonſtravimus itaque, ſi y habet valorem maximum vel minimum, debet eſſe $\frac{dy}{dx} = 0$; Non autem viciſſim concludere licet: quo-

tics

ties eſt $\frac{dy}{dx} = 0$, toties valor ipſius y eſt maximus vel minimus. Fieri enim poteſt, ut valor ipſius y neque maximus evadat, neque minimus. Interim tamen criteria, ex quibus in caſu $\frac{dy}{dx} = 0$ ad valorem pro y maximum vel minimum concludi poteſt, ipſa earum ſerierum natura ſuppeditat: eaque invenire poſſumus, ſi adtendamus ad ſequentia.

§. 259.

Ex functione y variabilis x data quaeratur valor ipſius $\frac{dy}{dx}$. Ponatur $\frac{dy}{dx} = 0$, atque ex hac æquatione quaerantur radices ſeu valores ipſius x reales. Sit f unus ex valoribus ipſius x, qui ex æquatione $\frac{dy}{dx} = 0$ inventus eſt, atque hic valor ſubſtituatur in functionibus $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, etc, atque hac ſubſtitutione fiat $\frac{ddy}{dx^2} = p$, $\frac{d^3y}{dx^3} = q$, $\frac{d^4y}{dx^4} = r$, etc. ipſa vero functio y poſito f loco x habeat valorem F. Proinde, ſi loco x ponatur $f + \alpha$, iſta functio abit in

$$F + \tfrac{1}{2}\alpha^2 p + \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r \text{ etc.}$$

loco x vero poſito $f - \alpha$ prodibit

$$F + \tfrac{1}{2}\alpha^2 p - \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r - \text{etc.}$$

atque hinc patet, ſi p ſit quantitas poſitiva, utrumque valorem eſſe $>$ F ideoque F eſſe minimum, ſi vero ſit p quantitas negativa, ſcripto f loco x, functio y habet valorem maximum. Poteſt vero quoque eſſe $p = 0$. Si hoc accidat, ſpectari debet valor ipſius q, qui ſi non fuerit $= 0$, valor ipſius y neque maximus erit, neque minimus, quia poſito $x = f + \alpha$ fit $F + \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r$

$+$ etc $>$ F et poſito $x = f - \alpha$ prodit $F - \frac{1}{6}\alpha^3 q + \frac{1}{24}\alpha^4 r$ $-$ etc. $<$ F. Sin etiam fuerit $q = 0$, ſpectandus erit valor ipſius r, qui ſi fuerit poſitivus, caſu $x = f$ valor functionis F erit minimus, et ſi valor ipſius r ſit negativus, habebit y valorem maximum. Si etiam $r = 0$, in judicando ulterius eſt progrediendum, atque eodem modo, quo ante concludendum. Atque hac ratione de qualibet radice æquationis $\frac{dy}{dx} = 0$ inveſtigabitur, utrum pro ea functio y habeat valorem maximum an minimum, an neutrum, ſicque omnia maxima et minima, quæ functio y recipere poteſt, invenientur. Quodſi itaque æquatio $\frac{dy}{dx} = 0$ duas radices habeat æquales, ita ut factorem habeat quadratum $(x - f)^2$; poſito $x = f$ ſimul erit $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, non autem $\frac{d^3y}{dx^3}$. Proinde hoc caſu functio y poſito $x = f$ neque valorem maximum habet, neque minimum. Quando autem æquatio $\frac{dy}{dx} = 0$, tres radices habet æquales, et proinde factorem agnoſcit cubicum $(x - f)^3$, poſito $x = f$ erit $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ et $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, non vero $\frac{d^4y}{dx^4}$. Functio igitur y poſito $x = f$ habebit valorem maximum, ſi $\frac{d^4y}{dx^4}$ eſt quantitas negativa et minimum, ſi $\frac{d\,y}{dx^4}$ quantitas poſitiva eſſe deprehenditur. Proinde ex his concludere poſſumus generaliter regulam ſequentem. Si æquatio $\frac{dy}{dx} = 0$ facto-

rem

rem habet $(x-f)^n$ exiſtente n numero impari, functio y, ſi in ea ponitur $x=f$, valorem recipiet maximum vel minimum: ſi vero n ſit numerus par, functio y a ſubſtituto f loco x neque maximum recipiet valorem, neque minimum.

§. 260.

Cæterum maximi et minimi valorum poſitivorum diſtinguendi ſunt in hoc negotio a maximis et minimis valorum negativorum. Quae §. *praec.* explicata ſunt, veritati ſunt conſentanea, ſi functio y a ſubſtituto f habeat valorem poſitivum $+F$. Explicata itaque de maximis vel minimis valorum poſitivorum ſunt intelligenda. Si fuerit F quantitas negativa, et loco x ponatur $f+\alpha$, functio y abit in

$$-F+\tfrac{1}{2}\alpha^2 p+\tfrac{1}{6}\alpha^3 q+\tfrac{1}{24}\alpha^4 r+\text{etc.}$$

atque $f-\alpha$ loco x poſito, prodibit

$$-F+\tfrac{1}{2}\alpha^2 p-\tfrac{1}{6}\alpha^3 q+\tfrac{1}{24}\alpha^4 r-\text{etc.}$$

Unde ſi p eſt quantitas poſitiva, functio y habet valorem negativum maximum; ſi vero p ſit quantitas negativa, y habet valorem negativum minimum a ſubſtituto f loco x. Si cum Analyſtis quibusdam quantitates negativas conſideremus, ut nihilo minores, et minores valores negativos ut majores illis, quæ proprie majores dici deberent, ut dicatur verbi gratia $-5 < -3$, quia minores negativi ad poſitivos valores propius accedunt, quam majores negativi: ut caſum hujus §. caſu præcedentis diſtinguamus, opus non eſt, quod cuivis adtendenti facile patet. Solet autem valor negativus eam ob cauſam *nihilo minor* vocari, quia ſi valor poſitivus eidem abſolute ſpectatus æqualis addatur, producitur nihilum; atque valore poſitivo a nihilo ſubtracto, valor negativus priori abſolute ſpectatus æqualis invenitur. Qui uſus loquendi licet in rigore veritati non ſit conſentaneus; tolerari tamen hic poteſt, quia ſic omne negotium ad regulas quasdam generales revocatur, ut opus non ſit, utrumque caſum perpetuo diſtinguere.

§. 261.

et quidem in functionibus uniformibus rationalibus integris.

Adplicemus hæc primo ad ſunctiones ipſius x rationales et integras, quarum forma generalis eſt $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} +$ etc. $= y$, atque ejus maxima et minima determinantur per radices hujus æquationis $nx^{n-1} + (n-1) Ax^{n-2} + (n-2) Bx^{n-3} + (n-3) Cx^{n-4} +$ etc. $= 0$, quæ ſint α, β, γ, δ, etc. Si iſtæ radices omnes fuerint inæquales, unaquæque pro x ſubſtituta efficit, ut y habeat valorem maximum vel minimum, et proinde functio y tot habet valores maximos vel minimos, quot æquatio $\frac{dy}{dx} = 0$ habet radices reales inæquales. Quando autem duæ vel plures radices inter ſe ſunt æquales; generatim ſi numerus radicum æqualium ſit par, nullum pro iis invenietur maximum vel minimum; unus vero valor vel maximus vel minimus pro functione y invenietur, ſi numerus radicum æqualium ſit impar. Quaenam vero radices maxima et quæ minima producant, etiam ſine ſubſidio regulæ ante traditæ ita poterit definiri. Diſponantur radices æquationis $\frac{dy}{dx} = 0$ reales ſecundum ordinem quantitatis, α, β, γ, δ, etc, ita ut α ſit radix maxima $\beta < \alpha$, $\gamma < \beta$, ſicque porro, ubi de radicibus negativis id obſervandum eſt, quod §. *praec.* eſt monitum. Atque cum functio y poſito $x = \infty$ fiat pariter infinita, neque valores ipſius x intra limites ∞ et α ullum producere poſſint ſive maximum ſive minimum; perſpicuum eſt, valores functionis y, dum loco x ſucceſſive valores ab ∞ uſque ad α ſubſtituantur, continuo decreſcere debere. Proinde valor $x = \alpha + \omega$ functioni y majorem inducit valorem, quam valor $x = \alpha$. Quia autem poſito $x = \alpha$ valor ipſius y fiat vel maximus, vel minimus, neceſſe eſt, ut caſu $x = \alpha$, hic valor ſit minimus. Quando jam variabilis x ulterius diminuitur et v. g. ponitur $x - \omega$ loco x; valor fun-

ctionis y iterum creſcit, donec ſit $x = \beta$, quæ eſt ſecunda æquationis $\frac{dy}{dx} = 0$ radix functioni y valorem vel maximum inducens vel minimum, et proinde caſu $x = \beta$ functio y valorem habet maximum, ita ut valor $x = \beta - \omega$ minorem efficiat functionem y, quam $x = \beta$, donec perveniatur ad $x = \gamma$, quæ iterum minimum generabit. Aequationis igitur $\frac{dy}{dx} = 0$ radix prima, tertia, quinta, etc, valorem ipſius y exhibent minimos; ſecunda vero quarta, ſexta, etc, valores maximos. Simul intelligitur, in caſu duarum radicum æqualium maximum et minimum coaleſcere et proinde neutrum locum habere. Quodſi itaque in functione $y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-1} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} +$ etc. maximus exponens ſit numerus par; æquatio $\frac{dy}{dx} = x^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3}$ etc. $= 0$ erit gradus imparis, quæ proinde vel unam, vel tres vel quinque et generatim numero impares habet radices reales. Quarum ſi una ſit realis, ea dabit minimum, ſi tres ſint reales, maxima præbet minimum, media maximum, et minima iterum minimum. Si quinque radices reales ſunt, functio y tria habet minima et duo maxima; ſicque porro. Quando exponens n eſt numerus impar, æquatio $\frac{dy}{dx} = 0$ ad gradum parem pertinet, et proinde vel nullam habet radicem realem, vel duas, vel quatuor; vel ſex, vel generatim numerum radicum realium parem. Primo caſu functio y neque maximum habet, neque minimum: ſecundo caſu, quo duae adſunt radices et quidem inæquales earum major minimum, minor autem maximum indicabit: quatuor vero radicum prima et tertia minimum, ſecunda et quarta maximum producunt, ſicque porro, ut

quotcunque radices fuerint reales, maxima et minima ſe mutuo alternatim inſequantur.

§. 262.

2) in functionibus rationalibus uniformibus fractis

Eadem adplicari poſſunt ad functiones rationales fractas. Sit enim $y = \frac{P}{Q}$, exiſtentibus P et Q functionibus ipſius x, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{QdP - PdQ}{QQdx}$; et proinde poſito $\frac{dy}{dx} = 0$, radices æquationis $\frac{QdP - PdQ}{dx} = 0$ indicabunt caſus maximi vel minimi, de quibus, utrum maximum locum habeat, vel minimum, eodem modo ut ante judicandum eſt. Præterea etiam dantur functiones irrationales et tranſcendentes, quæ proprietatem functionum uniformium habent, quorum igitur maxima et minima eodem modo inveniri poſſunt conceſſis regulis differentiandi functiones tranſcendentes poſtea explicandis. Radices cubicæ et omnium imparium poteſtatum conſiderari poſſunt, ut functiones uniformes, cum nonniſi unicum valorem realem exhibeant. Radices autem quadratæ atque omnium poteſtatum parium etſi revera, quoties ſunt reales, geminum valorem indicant, alterum affirmativum, alterum negativum, tamen unusquisque ſeorſim ſpectari poteſt, atque hoc ſenſu etiam maxima et minima inveſtigari poſſunt. Sic ſi y fuerit functio quæcunque ipſius x, etſi $\sqrt{y}$ geminum habet valorem, tamen uterque ſeorſim conſiderari poterit. Habebit enim $+\sqrt{y}$ maximum vel minimum valorem, ſi y talem habuerit, dummodo fuerit poſitivus, quia alioquin $\sqrt{y}$ eſſet imaginarium. Vice verſa autem $-\sqrt{y}$ fiet minimum vel maximum iisdem caſibus, quibus $+\sqrt{y}$ fit maximum vel minimum. Poteſtas autem quæcunque $y^{m:n}$ iisdem caſibus fiet maximum vel minimum, ſiquidem n fuerit numerus impar. Si vero n fuerit par, ii tantum

3) in functionibus irrationalibus et transcendentibus, quae proprietatem functionum uniformium habent.

caſus

caſus valent, quibus y induit valorem poſitivum hisque caſibus ob duplicem valorem gemina prodibunt maxima vel minima.

§. 263.

Quia æquatio differentialis, quæ ex functione y^m naſcitur, eſt $\frac{y^{m-1}dy}{dx} = 0$, cujus radices ſimul caſus, quibus functio $y^{\frac{m}{n}}$ fit maximum vel minimum, indicant; ad hoc indagandum duplex habetur æquatio, altera $y^{m-1} = 0$, altera $\frac{dy}{dx} = 0$, quarum illa abit in $y = 0$, atque tum ſolum maxima et minima exhibet, ſi $m - 1$ fuerit numerus impar, ſive m numerus par, ob rationes §. 259. allegatas. Quare cum n ſit numerus impar, ſi m fuerit numerus par, ſi numeros pares per $2m$, et impares per $2n+1$ indicemus, functio $y^{(2m:2n+1)}$ evadet maxima vel minima, tribuendis ipſis x valoribus, quos tam ex æquatione $y = 0$, quam $\frac{dy}{dx} = 0$ adipiſcitur. Sin autem m ſit numerus impar, functio $y^{(2m+1):2n}$ tum ſolum fit maxima vel minima, cum loco x ſubſtituitur valor ex hac æquatione $\frac{dy}{dx} = 0$. Ac poſteriori quidem caſu $y^{(2m+1):2n}$ maxima et minima tantum invenientur, ſi y ab inventis ex æquatione $\frac{dy}{dx} = 0$ valoribus poſitivos recipiat valores. Sic $x^{\frac{2}{3}}$ fit minimum ponendo $x = 0$, quia hoc caſu x^2 fit minimum. Niſi autem formula $x^{\frac{2}{3}}$ ad formam x^2 fuiſſet reducta, methodus ante explicata idem non indicaret, quia caſu $x = 0$ omnes termini ſeriei $y + \frac{\omega dy}{1.dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2.dx^2}$

$+ \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3.dx^3} +$ etc, fiunt infiniti. Facto enim $y = x^{\frac{2}{3}}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = + \frac{2.4}{27x^{\frac{7}{3}}}$; etc. Hoc ita caſu ſeries $y = \frac{\omega dy}{1.dx} = \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2}$ $\frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3.dx^3} +$ etc. fit divergens, quam aſſumſimus fieri convergentem, ſi ſtatuatur ω quantitas valde parva. His itaque caſibus ea reductione, qua uſi ſumus, opus erit, qua expreſſio propoſita ad aliam formam revocatur, quæ huic incommodo non ſit ſubjecta. Hoc autem tantum pauciſſimis caſibus evenit, qui in formula $y^{2m:(2n+1)}$ continentur, vel ad eam facile reducuntur. Sic ſi quærantur maxima et minima formulæ $zy^{2m:(2n+1)}$ exiſtente z functione ipſius x, inveſtigabitur hæc forma $y^{2m}z^{2n+1}$, quæ iisdem caſibus, quibus ipſa propoſita, fit maximum vel minimum.

§. 264.

II) In functionibus multiformibus.

Si y fuerit functio multiformis ipſius x, ita ut pro unoquoque valore ipſius x ea plures obtineat valores reales; tum variato x, plures illi ipſius y valores ita inter ſe connectentur, ut plures ſeries valorum ſucceſſivorum repræſentent. Si enim y tanquam applicatam lineæ curvæ conſideremus, x exiſtente abſciſſa, quot y habuerit valores reales diverſos, tot diverſi ejusdem curvæ rami eidem abſciſſae x reſpondebunt, et proinde illi ipſius y valores ſucceſſivi, qui eundem ramum conſtituunt, cohærere cenſendi ſunt; valores autem ad diverſos ramos relati erunt inter ſe disjuncti. Tot igitur ſeries valorum cohærentium ipſius y habentur, quot diverſos valores reales functio y pro quovis ipſius x valore receperit; atque in qualibet ſeriei valores ipſius y, dum x creſce

ſcens aſſumitur, vel creſcent, vel decreſcent, vel p(quam creyerint iterum decreſcent, vel vice verſa. U de perſpicuum eſt, in unaquaque valorum cohærenti ſeriei æque dari maxima vel minima, atque in funct nibus uniformibus. Pro his vero maximis et mi minimis determinandis eadem methodus valet, qu pro functionibus uniformibus demonſtravimus. C enim, ſi variabilis x incremento a augeatur, functi perpetuo hanc recipiat formam $y + \frac{a\,dy}{1.dx} + \frac{a^2\,d\!\!}{1.2.dx}$ $+ \frac{a^3 d^3 y}{1.2.3.dx^3} +$ etc; neceſſe eſt, ut caſu maximi minimi terminus $\frac{a\,dy}{dx}$, et proinde $\frac{dy}{dx}$ evadat $=0$. I dices itaque hujus æquationis $\frac{dy}{dx} = 0$ eos ipſius x, lores indicabunt, quibus in ſingulis valorum functio y cohærentium ſeriebus maxima vel minima reſponde Neque vero ambiguum erit, in quanam valorum col rentium ſerie detur maximum vel minimum. C enim in æquatione $\frac{dy}{dx} = 0$ ambæ inſint variabile et y; valores ipſius x definiri nequeunt, niſi ope æqua nis, qua relatio functionis y ad x exprimitur, variab y eliminetur. Antequam autem hoc fit, pervenitur æquationem, qua valor ipſius y per functionem unif mem ipſius x exprimitur. Ideo inventis valoribus ipſ x cuique reſpondens valor ipſius y reperietur, qui maximus vel minimus in ſerie valorum ſucceſſivor cohærentium, ad quam pertinet. Judicium aut utrum iſti valores ſint maximi an minimi, inſtitue eodem modo, quem ante explicavimus.

§. 2

§. 265.

De Maximis et Minimis secundae speciei.

Præter maxima et minima, de quibus huc uſque ſermo fuit, in functionibus multiformibus alia ſpecies maximorum et minimorum eſt notatu digna, quorum natura ex functionibus biformibus optime explicari poteſt. Sit y functio quaecunque biformis ipſius x, ita ut pro unoquoque ipſius x valore y habeat binos valores vel reales vel impoſſibiles, atque ponamus hos valores fieri impoſſibiles, ſi ponatur $x > f$, reales caſu $x < f$, atque æquales $= g$, ſi $x = f$. Cum ergo caſu $x > f$ functio y nullum habeat valorem realem, ſi eveniat, ut poſito $x < f$, ambo ipſius y valores fiant vel majores quam g, vel minores quam g; priori caſu valor $y = g$ erit minimus poſteriori maximus, quia illo caſu minor eſt, quam ambo præcedentes, poſteriori vero major. Poſſunt hæc *maxima et minima ſecundæ ſpeciei* vocari, cum talia non ſint ratione valorum autecedentium et conſequentium in ſeriei cohærentium, ſed ratione binorum valorum disjunctorum vel antecedentium vel ſequentium tantum. Evenit hoc, ſi propoſita fuerit æquatio hujus formæ $y =$ [p] $y \pm (f-x)\sqrt{(f-x)q}$, exiſtentibus p et q functionibus ipſius x per $f-x$ non diviſibilibus; obtineatque q valorem poſitivum, ſi ponatur $x = f$ vel aliquanto majus minusve. Fiat $p = q$ poſito $x = f$, ac manifeſtum eſt, quod caſu $x = f$ ambo ipſius y valores in unum $y = g$ coaleſcant: poſito autem $x > f$ ambo valores fiunt impoſſibiles. Si igitur ponatur x aliquanto minus quam f, v. g. $x = f - \omega$, functio p abit in $g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} -$ etc, q vero abit in $q - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} -$ etc, unde hoc caſu erit $y = g - \frac{\omega dp}{dx}$

$+$

$+ \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} + \text{etc} \pm \omega\sqrt{\omega}(q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx} -$ etc.). Quia hic utraque ſeries, in quas p et q abeunt, fiunt convergentes, eodem modo ut §. 259. concludendo, perſpicitur, utrumque hunc valorem eſſe $< g$, ſi $\frac{dp}{dx}$ ſit poſitiva, ſed utrumque valorem $> g$, ſi $\frac{dp}{dx}$ ſit negativa quantitas. Unde valor duplex ipſius $y = a$ illo caſu erit *maximus* hoc vero *minimus ſecundæ ſpeciei.* Idem locum habet in æquationibus hujus formæ $y = p \pm (f-x)^{\frac{2n+1}{2m}}$, ſi $2n+1 > 2m$. Quodſi his caſibus invenitur $\frac{dp}{dx} = 0$, judicium ex ſequentibus ſeriei $g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} -$ etc, terminis erit deſumendum modo ei ſimili, quo id de maximis et minimis *primae ſpeciei* §. 259. oſtenſum fuit.

SECTIO XVIII.

DE VSV CALCVLI DIFFERENTIALIS IN AEQVATIONIBVS RESOLVENDIS.

§. 266.

Denotante y functionem quamcunque ipſius x, ſi ponatur $y = 0$, in hac forma omnes omnino aequationes finitæ, ſive algebraicæ ſint, ſive tranſcendentes comprehenduntur. Aequatio autem $y = 0$ reſolvi dici-

Investigatio 1) Radicum aequationis alicuius realium a) inaequalium!

dicitur, ſi is ipſius x valor definiatur, qui in functione y ſubſtitutus eam reddit nihilo æqualem. Plerumque plures ejusmodi valores pro x dari, æquationis $y=0$ radices vocatas, jam cognitum eſt. Quodſi igitur f, g, h, etc, ſint radices æquationis $y=0$, functio y ita erit comparata, ut ſi in ea loco x ſubſtituatur f, vel g, vel h, etc, fiat $y=0$. Quoniam igitur functio y evaneſcit, ſi in ea loco x ponatur f, ſeu $x+(f-x)$, exiſtente f radice æquationis $y=0$, erit $0 = y + \frac{(f-x)dy}{1.dx}$

$$+ \frac{(f-x)^2 ddy}{1.2.dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \text{etc}, \quad (\S.\ 243.)$$

ex qua æquatione valor radicis f ita definitur, ut quidquid pro x fuerit poſitum, indeque valores quantitatum y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{2.dx^2}$, etc, ſubſtituti, ſemper reſultet æquatio verum valorem ipſius f exhibens. Sit exempli gratia $y = x^3 - 2xx + 3x - 4$; erit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3$; $\frac{ddy}{2.dx^2} = 3x - 2$, et $\frac{d^3y}{6\,dx^3} = 1$. Quibus valoribus ſubſtitutis habetur $0 = x^3 - 2xx + 3x - 4 + (f-x)(3xx-4x+3) + (f-x)^2(3x-2) + (f-x)^3$, ſeu multiplicationibus actu inſtitutis $f^3 - 2ff + 3f - 4 = 0$. Oritur nimirum æquatio ipſi propoſitæ ſimilis, quæque ideo easdem continet radices.

§. 267.

Licet hoc modo ad novam æquationem non perveniatur, ex qua valor ipſius f facilius definiri queat; poteſt tamen exinde deduci methodus, radicem æquationis realem irrationalem quantumvis adcuratam exhibendi. Si enim pro x aſſumtus fuerit valor jam proxime ad radicem æquationis accedens ex §. 115. determinandus, ita ut $f-x$ ſit quantitas valde parva; termini æquatio-

quationis $0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2 . dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3 y}{6 . dx^3} +$ etc; valde convergent, et proinde non multum a veritate aberrabitur, ſi præter binos terminos initiales reliqui rejiciantur. Erit itaque, ſi pro x jam valor cuidam æquationis $y = 0$ radici prope æqualis fuerit aſſumtus, quamproxime $0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx}$, ſive $f = x - \frac{ydx}{dy}$. Ex qua formula etſi non verus, tamen admodum propinquus radicis f valor reperietur, qui deinceps, denuo loco x ſubſtitutus, multo propiorem valorem pro f ſuppeditabit; ſicque continuo vero propinquior ipſius f valor reperietur. Citiores autem approximationes ex ipſa ſerie generali deduci poſſunt ſic ratiocinando.

§. 268.

Propoſita æquatione $y = 0$, exiſtente y functione quacunque ipſius x, quæſtio huc redit, ut valor ipſius x definiatur, qui loco x ſubſtitutus functionem y reddet nihilo æqualem. Cum autem y ſit functio ipſius x, viciſſim erit x functio ipſius y, atque ſic quæſtio eo redit, ut quærendus ſit valor ipſius functionis x, quem induit, ſi variabilis y evaneſcit. Sit igitur f iſte ipſius x valor, qui erit radix æquationis $y = 0$, ex §. 256. erit $f = x - \frac{ydx}{1 . dy} + \frac{y^2 ddx}{1 . 2 . dy^2} - \frac{y^3 d^3 x}{1 . 2 . 3 . dy^3} + \frac{y^4 d^4 x}{1 . 2 . 3 . 4 . dy^4} -$ etc. ubi eſt dy conſtans. Si igitur ponatur $\frac{dx}{dy} = p$; $\frac{dp}{dy} = q$; $\frac{dq}{dy} = r$; $\frac{dr}{dy} = s$, etc;

erit

erit $f = x - py + \frac{1}{2}qyy - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 +$ etc. Series haec ſiet convergens, ſi pro x ſtatuatur valor, jam proxime ad valorem ejus radicis, quae quaeritur, accedens. Hoc enim modo valor ipſius y ſiet admodum parvus, atque ſeriei termini valde decreſcent, ita ut paucis terminis ſumendis jam ſatis juſtus valor pro f inveniatur. Atque hic valor ſi deinceps loco x ſubſtituatur, quantitas y multo minor evadet, ac ſeries multo magis converget, ut eo modo radix quæſita errore quantumvis parvo exacta inveniatur.

§. 269.

b) aequalium. Si aequatio $y = 0$, habeat quasdam radices aequales, ita ut functio y agnoſcat factorem $(x-f)^n$ exiſtente $y = (x-f)^n X$ ubi eſt X functio variabilis x; functio $\frac{dy}{dx}$ habet factorem $(x-f)^{n-1}$, $\frac{ddy}{dx^2}$ factorem $(x-f)^{n-2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ factorem $(x-f)^{n-3}$, ſicque porro. Hinc ſequentia fluunt conſectaria. Si duae propoſitae aequationis radices aequales ſunt, erit $\frac{dy}{dx} = 0$; atque tum duas aequationes $y = 0$, et $\frac{dy}{dx} = 0$ conjunctae per methodum eliminationis præbent valorem ipſius x, cui binae radices ſunt aequales. Vnde viciſſim concluditur, ſi ambae aequationes $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$ communem habent radicem, ea erit duplex aequationis $y = 0$ propoſitae radix. Si igitur propoſita ſit aequatio algebraica quarumcunque dimenſionum $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} +$ etc, $= 0$, quae duas habeat radices aequales, erit quoque $nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} +$ etc. $= 0$. Prioris nimirum aequationis radix duplex ſimul erit radix poſterioris aequatio-

quationis. A priori per n multiplicata ſi poſterior per x multiplicata ſubtrahatur, oritur $Ax^{n-1} + 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} + 4Dx^{n-4} +$ etc $= 0$. Priori nunc per a multiplicatae addatur hæc per b multiplicata, eritque $ax^n + (a+b) + Ax^{n-1} + (a+2b) Bx^{n-1} + (a+3b) Cx^{n-3} +$ etc $= 0$. Ex qua æquatione cum ipſa propoſita conjuncta deducuntur radices æquales, ſi quas habeat propoſita. Quia quantitates a et b pro lubitu aſſumi poſſunt, coefficientes a, $a+b$, $a+2b$, etc, progreſſionem quamcunque arithmeticam repræſentant. Quodſi itaque aequatio quæcunque habeat duas radices æquales, illæ inveniemtur, ſi ſinguli æquationis propoſitæ termini multiplicentur per terminos cujusvis progreſſionis arithmeticæ reſpective. Nova enim æquatio hoc modo inventa eam radicem, quæ in propoſita bis ineſt, pariter continebit.

§. 270.

Si æquatio $y = 0$ tres habeat radices æquales, non ſolum erit $\frac{dy}{dx} = 0$, ſed et $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, ſi quidem pro x ſtatuatur ejus radicis valor, quæ in æquatione $y = 0$ ter ineſt. Hinc porro concluduntur ſequentia corollaria. Si æquatio $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} +$ etc. $= 0$ tres contineat radices æquales f, f, f, ſi ejus termini per terminos progreſſionis arithmeticæ cujusvis multiplicentur: æquatio reſultans binas habebit radices æquales f et f; et proinde eadem denuo per progreſſionem arithmeticam quamcunque multiplicari poterit, ut prodeat æquatio, eandem radicem f ſemel complectens. Obtinebuntur itaque tres æquationes communem radicem f habentes, ex quarum combinatione hæc ipſa radix facile elicitur. Si enim ejusmodi progreſſiones arithmeticæ eligantur, quarum vel primus vel ultimus ſit $= 0$; prodibit æquatio uno gradu inferior, ſicque eliminatio eo facilior evadet. Similibus opus eſt ratiociniis, ſi æquatio quatuor vel plures contineat radices æquales.

§. 271.

III) Criteriorum radicum impoſſibilium.

Supra §. 94-96. indicata jam ſunt criteria quaedam, ex quibus dijudicari poteſt, utrum æquatio propoſita radices habeat impoſſibiles, an ſecus. Huic inveſtigationi conſideratio maximorum et minimorum valde inſervit. Propoſita ſit aequatio ordinis cujuscunque $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc} = 0$, ejusque radices ſint p, q, r, s, t, etc, quas primo omnes reales et inaequales, atque ſecundum ordinem quantitatis diſpoſitas eſſe aſſumamus, ut ſit p minima, q ea quæ ratione magnitudinis ſequitur, ſicque porro (§. 257.). Caſus quarundam radicum æqualium huc quoque revocatur, ponendo earundem differentiam $= 0$. Quia expreſſio $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{etc}$, tum ſolum fit nihilo aequalis, ſi loco x aliquis valorum p, q, r, s, etc, ſubſtituatur, reliquis vero caſibus omnibus non evaneſcit; ponamus $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc}, = z$, erit z functio ipſius x. Hoc facto pro x ſucceſſive ſubſtituantur valores determinati reales incipiendo a minimo $-\infty$ (§. 257.); atque perſpicuum eſt, pro x prodituros eſſe valores vel nihilo majores vel minores, neque prius futuram eſſe $z = 0$, quam ponatur $x = p$. Augeantur valores ipſius x ultra p, atque valores ipſius z vel poſitivi, vel negativi fient, donec perveniatur ad valorem $x = q$, quo caſu iterum fit $z = 0$. Ideo neceſſe eſt, ut valoribus ipſius z ab 0 iterum ad 0 accedentibus interea z recipiat valorem vel maximum vel minimum; maximum, ſi valores ipſius z, dum x intra limites p et q verſabatur, fuerint poſitivi; minimum, ſi fuerint negativi. Simili modo, dum x ultra q ad r usque creſcit, functio z tranſit per maximum vel minimum; per maximum, ſi ante fuerit minimum, et contra, quia maxima et minima ſe mutuo alternatim excipiunt. Cum itaque inter binas quasvis radices ipſius z exiſtat caſus, quo functio z fit maximum vel minimum; numerus maximorum et minimorum functionis z unitate

tate minor erit numero radicum realium, atque maximi et minimi valores ita alternatim ſe excipient, ut maximi ipſius z valores ſint poſitivi, minimi negativi. Viciſſimitaque, ſi functio z habeat maximum vel ſaltem poſitivum valorem caſu $x=f$, et minimum vel ſaltem negativum caſu $x=g$, dabitur radix aequationis intra limites f et g contenta, quia functione z e ſtatu poſitivo in negativum abeunte, neceſſe eſt, ut per o tranſeat, dum per ∞ tranſire non potuit. Ex propoſitis ſimul intelligitur, licet aequationis propoſitae radices non omnes ſint reales, tamen ſemper inter binas quasque dari maximum vel minimum. Converſim itaque generatim concludi non poteſt, quod inter bina quaevis maxima vel minima radix realis contineatur; licet iſta concluſio valeat adjecta conditione, ſi alter valor ipſius z fuerit affirmativus, alter negativus.

§ 272.

Valores ipſius x, a quibus ſubſtitutis functio $z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} -$ etc fit maximum vel minimum, ſunt radices aequationis $\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} - \text{etc.} = 0$. Si itaque omnes radices aequationis $z = 0$, quarum numerus eſt n, reales ſunt; omnes quoque aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ radices reales erunt. Habet enim functio z tot maxima vel minima, quot numerus $n-1$ continet unitates. Ergo neceſſe eſt, ut aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ agnoſcat $n-1$ radices reales; unde ſimul concluditur functionem z plura maxima vel minima, quam $n-1$, habere non poſſe. Atque exinde regulam concludimus ſequentem. Si omnes aequationis

$z = 0$ radices reales ſunt; æquationis quoque $\frac{dz}{dx} = 0$ radices omnes reales erunt. Ergo ſi non omnes æquationis $\frac{dz}{dx} = 0$ radices reales ſunt; etiam æquationis $z = 0$ radices non ſunt omnes reales. Praeterea, quia inter binas quasvis aequationis $z = 0$ radices reales datur unus caſus, quo functio fit maximum vel minimum, ſequitur, æquationem $\frac{dz}{dx} = 0$ neceſſario unam habere radicem realem, ſi aequatio $z = 0$ duas habet radices reales. Atque generatim, ſi aequatio $z = 0$ habet m radices reales; æquatio $\frac{dz}{dx} = 0$ ad minimum $m - 1$ radices habet reales. Unde porro concluditur: Si æquatio $\frac{dz}{dx} = 0$ pauciores habet radices reales, quam $m - 1$; etiam aequatio $z = 0$ habebit pauciores quam m radices reales.

§. 273.

Ex numero radicum realium aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ numerus radicum aequationis $z = 0$ realium certo cognoſci nequit, niſi ſub conditione adjecta, ſi maxima et minima alternatim ſunt poſitiva et negativa. Sic a, b, c, d, e, etc. ſunt radices aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ reales, quarum a eſt maxima et reliquae ordine magnitudinis ſe invicem ſequuntur; his valoribus loco x ſubſtitutis, functio z obtinebit valores maximos vel minimos alternatim. Functio autem z fiet ∞, ſi ponatur $x = \infty$; proinde ejus valores continuo decreſcere debent, valoribus ipſius x ab ∞ usque ad a decreſcentibus, unde caſu x

$= a$ fiet

$=a$ fiet z minimum. Si itaque caſu $x=a$ habeat z valorem negativum; neceſſe eſt, ut ante per 0 tranſierit, unde aequatio $z=0$ habet aliquam radicem realem quanto a majorem. Quodſi autem caſu $x=a$ functio z habeat valorem poſitivum; aequatio $z=0$ nullam radicem quanto a majorem habere poteſt. Ponamus

caſu	fieri
$x = a$	$z = A$
$x = b$	$z = B$
$x = c$	$z = C$
$x = d$	$z = D$
$x = e$	$z = E$
etc.	etc.

ac patet, ſi A ſit poſitivum, æquationem $z=0$ nullam habere radicem realem quanto a majorem, ſin vero A ſit negativum, æquationem $z=0$ unam quoque habere radicem realem ipſo a majorem. Quoniam A fuit minimum, erit B maximum, et quidem ſi A fuit poſitivum, etiam B poſitivum erit, quare inter limites a et b nulla radix æquationis $z=0$ dari poteſt. Atque ſi hæc æquatio nullam habeat radicem realem quanto a majorem, ea quoque nullam habere poteſt radicem quanto b majorem. Quanto A vero exiſtente negativo, quo caſu unam æquatio $z=0$ habet radicem realem $x > a$, ſi B ſit poſitivum; dabitur radix realis $x > b$: ſin vero B ſit negativum, nulla radix realis intra limites a et b continebitur. Cum jam B fuerit maximum erit C minimum, et proinde ſi B fuerit negativum, erit quoque C negativum (§. 256.) atque hoc caſu intra limites b et c nulla contenta eſt radix realis: caſu autem quo B eſt poſitivum, intra b et c radix realis cadit pro C negativo, ac nulla exiſtente C poſitivo.

§. 274.

Hæc ratiocinia facili continuantur negotio. Aequatio nimirum $z=0$ unam habet radicem realem, quæ continetur

 intra

intra limites	ſi habet ſignum		ſignum
∞ et a	A . . . −		
a et b	A . . . −	et	B . . . +
b et c	B . . . +	et	C . . . −
c et d	C . . . −	et	D . . . +
d et e	D . . . +	et	E . . . −
etc.		etc.	

Atque ex hiſce viciſſim concluditur, æquationem $z = 0$ radicem habere nullam realem contentam

intra limites	ſi non habeat ſignum		ſignum
∞ et a	A . . . −		
a et b	A . . . −	et	B . . . +
b et c	B . . . +	et	C . . . −
c et d	C . . . −	et	D . . . +
d et e	D . . . +	et	E . . . −
etc.		etc.	

Harum itaque regularum ope ex cognitis æquationis $\frac{dz}{dx} = 0$ radicibus realibus non ſolum numerus radicum realium æquationis $z = 0$ colligitur, ſed etiam limites innoteſcunt, intra quos ſingulæ iſtæ radices continentur. Evaneſcente aliquo valorum A, B, C, D, E, etc, eo loco æquatio $z = 0$ duas habet radices æquales. Caſu A $= 0$ duæ adſunt radices $= a$, caſu B $= 0$ duæ ſunt $= b$, etc. Si numerus radicum æquationis $\frac{dz}{dx} = 0$ eſt par, neque maximum neque minimum indicatur, unde radices æquales numero pari pro præſenti inſtituto negligi poſſunt. Sin vero earum radicum æqualium numerus impar fuerit, omnes præter unam rejici poſſunt, niſi forte hoc quoque caſu functio $z = 0$ evaneſcat. Hoc enim ſi contingat, aequatio $z = 0$ quoque habebit radices aequales et quidem numero $n + 1$,

ſi numerus radicum æqualium æquationis $\frac{dz}{dx} = 0$ ſit n.

§. 275.

Ex omnibus hiſce conjunctim ſumtis id concludi poteſt, ſi æquatio differentialis $\frac{dz}{dx} = 0$ habet radices impoſſibiles, æquatio $z = 0$ ad minimum totidem radices habet impoſſibiles. Aequatio propoſita $z = 0$ multiplicetur per poteſtatem x^m, denotante m numerum integrum poſitivum; atque hæc nova, quae producitur, aequatio omnes radices habere debet reales, ſi propoſitæ $z = 0$ radices omnes reales ſunt. Ergo quoque productæ æquationis differentialis, poſtquam per x^{m-1} fuit diviſa, radices omnes reales erunt, id eſt caſu radicum omnium æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc}, = 0$ realium etiam omnes æquationis $(m+n)x^n - (m+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)Bx^{n-2} - \text{etc.} = 0$ radices ſunt reales. Similem ob rationem ſi hæc multiplicetur per x^k et denuo differentietur, æquatio $(m+n)(k+n)x^n - (m+n-1)(k+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)(k+n-1)Bx^{n-2} - \text{etc.} = 0$ pariter omnes radices habet reales, atque ſic concludendo ulterius progredi licet. Quodſi hujusmodi æquatio radices adgnoſcat impoſſibiles, etiam propoſita æquatio $z = 0$ pariter atque ad minimum totidem radices habebit impoſſibiles. Aequationis $z = 0$ radices omnes ſi reales ſint, etiam ejus differentiales omnium ordinum

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{etc} = 0$$

$$n.(n-1)x^{n-2} - (n-1)(n-2)Ax^{n-3} + (n-2)(n-3)Bx^{n-4} - (n-3)(n-4)Cx^{n-5} + \text{etc.} = 0$$

$$n.(n-1)(n-2)x^{n-3} - (n-1)(n-2)(n-3)Ax^{n-4} + n.(n-2).(n-3)(n-4)Bx^{n-5} - \text{etc.} = 0$$

radices ſuas omnes reales habent, quæ æquationes ad ſequentes formas revocantur.

$$x^{n-1} - \frac{n-1}{n}Ax^{n-2} + \frac{n-1.n-2}{n.n-1}Bx^{n-3} - \frac{n-1.n-2.n-3}{n.n-1.n-2}Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

$$x^{n-2} - \frac{n-2}{n}Ax^{n-3} + \frac{n-2.n-3}{n.n-1}Bx^{n-4} - \frac{n-2.n-3.n-4}{n.n-1.n-2}Cx^{n-5} + \text{etc.} = 0$$

$$x^{n-3} - \frac{n-3}{n}Ax^{n-4} + \frac{n-3.n-4}{n.n-1}Bx^{n-5} - \frac{n-3.n-4.n-5}{n.n-1.n-2}Cx^{n-6} + \text{etc.} = 0$$

$$x^{n-4} - \frac{n-4}{n}Ax^{n-5} + \frac{n-4.n-5}{n.n-1}Bx^{n-6} - \frac{n-4.n-5.n-6}{n.n-1.n-2}Cx^{n-7} + \text{etc.} = 0$$

etc.

Atque hoc modo judicium ad æquationem dati gradus inferioris, quam eſt ipſa propoſita, reduci poteſt. Ita ſi m fuerit numerus quicunque minor, quam n, atque propoſita æquatio omnes radices habeat reales; hujus quoque æquationis gradus m

$$x^m - \frac{m}{n}Ax^{m-1} + \frac{m.m-1}{n.n-1}Bx^{m-2} - \frac{m.m-1.m-2}{n.n-1.n-2}Cx^{m-3} + \text{etc} = 0$$

radices omnes reales erunt. Poſito itaque $m = 2$, hujus aequationis $x^2 - \frac{2}{n}Ax + \frac{2.1}{n.n-1}B = 0$ radices eſſe debent reales, ſi aequationis $z = 0$ omnes radices reales ſunt. Sed iſta æquatio quadratica radices reales habere nequit, niſi ſit $\frac{AA}{nn} > \frac{2.1}{n.n-1}B$. Ergo ſi fuerit $AA < \frac{2n}{n-1}B$, propoſita æquatio ad minimum duas radices habet impoſſibiles, licet caſu $AA > \frac{2n}{n-1}B$ certo concludi nequeat, omnes æquationis $z = 0$ radices reales eſſe.

§. 276

§. 276.

Poſito $x = \frac{1}{y}$, aequatio $z = 0$ in ſequentem $1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - Ey^5 +$ etc. $= 0$ transformatur, cujus radices ſunt prioris reciprocæ, et proinde omnes reales ſunt, ſi radices æquationis $z = 0$ omnes reales ſunt. Hoc itaque caſu etiam reciprocæ differentialis $- A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - 5Ey^4 +$ etc. $= 0$ radices omnes poſſibiles ſunt. Reſtituto itaque valore x pro $\frac{1}{y}$ etiam æquatio $Ax^{n-1} + 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + 5Dx^{n-5} -$ etc $= 0$ radices omnes poſſibiles adgnoſcit. Unde patet caſu $n = 3$ neceſſe eſſe, ut ſit $BB > 3AC$. Differentiatione continuata prodibunt æquationes

$$Ax^{n-2} - \frac{n.n-2}{n-1}Bx^{n-3} + \frac{3.n-2.n-3}{n-1.n-2}Cx^{n-4} - \text{etc.} = 0$$

$$Ax^{n-3} - \frac{n.n-3}{n-1}Bx^{n-4} + \frac{3.n-3.n-4}{n-1.n-2}Cx^{n-5} - \text{etc.} = 0$$

$$Ax^{n-4} - \frac{2.n-4}{n-1}Bx^{n-5} - \frac{3.n-4.n-5}{n-1.n-2}Cx^{n-6} - \text{etc.} = 0$$

etc.

Generatim itaque, ſi m ſit numerus minor quam n, erit

$$Ax^{m} - \frac{2m}{n-1}Bx^{m-1} + \frac{3m.m-1}{n-1.n-2}Cx^{m-2} - \text{etc.} = 0.$$ Atque

caſu $m = 2$ fit $Ax^2 - \frac{4}{n-1}Bx + \frac{6}{n-1.n-2}C = 0$, cujus radices ut ſint reales, debet eſſe $\frac{4BB}{(n-1)^2} > \frac{6AC}{n-1.n-2}$.

Ergo ſi fuerit $BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$, iterum propoſita æquatio $z = 0$ ad minimum duas radices habet impoſſibi-

 les.

les. Idem criterium ad ſequentes coefficientes traduci poteſt. Aequatio differentialis

$$-A+2By-3Cy^2+4Dy^3-5Ey^4+\text{etc.}=0$$

denuo differentiata dat,

$$2B-6Cy+12Dy^2-20Ey^3+\text{etc.}=0$$

ex qua reſtituta $\frac{1}{x}$ loco y habetur

$$Bx^{n-2}-3Cx^{n-3}+6Dx^{n-4}-10Ex^{n-5}+\text{etc.}=0$$

ex cujus ulteriori differentiatione deducuntur aequationes

$$Bx^{n-3}-\frac{3.n-3}{n-2}Cx^{n-4}+\frac{6.n-3.n-4}{n-2.n-3}Dx^{n-5}-\text{etc.}=0$$

et generaliter

$$Bx^m-\frac{3m}{n-2}Cx^{m-1}+\frac{6m(m-1)}{n-2.n-3}Dx^{m-2}-\text{etc.}=0$$

ex qua ſi $m=2$ fit

$$Bx^2-\frac{2.3}{n-2}Cx+\frac{6.2}{n-1.n-2}D=0.$$

Unde ſi fuerit $CC<\frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$ iterum concluditur, æquationem $z=0$ ad minimum duas habere radices impoſſibiles. Hiſce ratiociniis per omnes coefficientes continuatis invenitur, quod caſu omnium radicum realium æquationis $x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-Ex^{n-5}+\text{etc.}=0$, eſſe debeat $AA>\frac{2n}{1(n-1)}AC$; $BB>\frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$; $CC>\frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$; $DD>\frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE$; $EE>\frac{6(n-4)}{4(n-4)}DF$; etc. Quarum conditionum ſi una deſit, æquatio ad minimum duas habet radices impoſſibiles. Atque ſi iſta criteria ſe invicem non pendent

dent, quodlibet eorum duas radices impoſſibiles a reliquis diverſas indicat. Quando autem iſtae coefficientium conditiones omnes adſunt, concludere non licet, omnes æquationis propoſitæ radices reales eſſe. Fieri enim utique poteſt, ut radices impoſſibiles adſint. Si criteria radicum impoſſibilium adſint, eaque a ſe invicem pendeant, ut duo contigua iſta $AA < \frac{2n}{1(n-1)} B$ et $BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AB$, exinde non neceſſario quatuor radices impoſſibiles diverſæ concludi poſſunt, quia utrumque criterium fortaſſe easdem binas indicat. Quodſi vero iſta criteria non ſint contigua, et proinde a ſe invicem non pendeant, ut $AA < \frac{2n}{1(n-1)} B$ et $CC < \frac{4(n-2)}{3(n-n)} BE$, exiſtente $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC$; quatuor radices impoſſibiles indicantur.

SECTIO XIX.

DE METHODO TANGENTIVM DIRECTA.

§. 277.

Ex data aequatione pro curva algebraica quacunque elicitur aequatio differentialis formae $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$ ſecundum ea, quae expoſita ſunt §. 242. Atque

que ex ipſa hac æquatione differentiali multæ deduci poſſunt curvæ proprietates, quae ex aequatione integrali vel plane non, vel ſaltem pluribus invenirentur ambagibus. Propoſita ſit curva AM algebraica quaecunque ad axem Ap relata, cujus æquatio data eſt inter coordinatas orthogonales x et y. *Datum eſt punctum M in curva, per quod ducenda eſt recta curvam tangens.* Atque hujus problematis ſolutio via analytica ſic inveſtiganda erit.

F.273. Tangens quæſita ſit TMt ſecans axem curvae in puncto T. Præterea ex puncto M ad axem ducatur applicata normalis MP et cognita PT, quae *Subtangens* vocatur, poſitio tangentis TMt determinata erit. Haec vero ſubtangens invenitur ſequentem in modum. Abſciſſa AP $= x$ creſcat uſque ad p, erit P$p = \Delta x$. Per punctum p ducatur applicata normalis pm, quae erit $= y + \Delta y$, ſi PM $= y$. Si itaque per punctum M ducatur MR axi parallela erit R$m = \Delta y$. Per puncta M et m ducatur recta SMs ſecans curvam in punctis M et m, et axi occurrens in puncto S, atque poſitio hujus rectæ ſecantis reſpectu axis innoteſcet, data recta PS, quam *Subſecantem* vocabimus. Jam triangula MmR atque SMP ſimilia ſunt, ob angulos apud P et R rectos, et angulos apud M et S æquales. (§. 99. *Geom. Elem.*). Ideo eſt Rm : RM $=$ PM : PS, id eſt $\Delta y : \Delta x = y$: PS, atque PS $= y \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$. Manentibus nunc AP et PM id eſt x et y conſtantibus varientur Δx et Δy, ita quidem, ut Δx decreſcat; atque cum ea ſimul decreſcet Δy, punctum m ad punctum M adpropinquat, ſecans SMs revolvitur circa punctum M fixum, punctum S adpropinquat ad punctum T; angulus SMT decreſcit. Quando tandem punctum p coincidit cum P, id eſt, quando fit $\Delta x = 0 = dx$, Δy abit in dy, punctum m coincidit cum puncto M, punctum S cum puncto T, angulus SMT evaneſcit,

eit, recta SMr habet poſitionem TMr, atque PS eadem eſt cum PT; quare ex aequatione $PS = y \frac{\Delta x}{\Delta y}$ fit $PT = y \frac{dx}{dy}$. Cum itaque ultima ratio $\frac{dx}{dy}$ innoteſcat ex aequatione pro curva propoſita; ſolutio problematis generalis inventa eſt.

§. 278.

Adplicabimus hoc ad ſectiones conicas, et cum his conjugamus explicationem reliquarum hujus generis curvarum proprietatum, ab inventione tangentis pendentium, ob inſignem earum curvarum in univerſa Analyſi uſum, completam de tangentibus curvarum theoriam uſque ad Geometriam Subliniorem reſervaturi. Sit itaque curva AM ellipſis, cujus axis transverſus eſt AB, F et G foci, centrum C, a quo computentur abſciſſæ $CP = x$, PM coordinata orthogonalis $= y$, erit æquatio pro curva $aayy = aabb - bbxx$ (§. 159.) ex qua differentiando elicitur $2aay \frac{dy}{dx} = -2bbx$, et $\frac{dy}{dx} = -\frac{bbx}{aay}$, vel $\frac{dx}{dy} = -\frac{aay}{bbx}$. Quia jam ſubtangens $PT = y \frac{dx}{dy}$; erit pro ellipſi $PT = \frac{aayy}{bbx} = \frac{(aa-xx)bb}{bbx} = \frac{aa-xx}{x}$, ob $aayy = aabb - bbxx$. Eſt itaque $CT = CP + PT = x + \frac{aa-xx}{x} = \frac{xx+aa-xx}{x} = \frac{aa}{x}$, id eſt $CP : CA = CA : CT$. Habemus præterea $FT = CT - CF = \frac{aa}{x} - \sqrt{(aa-bb)} = \frac{aa - x\sqrt{(aa-bb)}}{x}$, atque $FM = a - \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$ (§. 162.) $= \frac{aa - x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$

Applicatio ad ſectiones conicas.

Ellipſis. F. 274.

Proinde

Proinde FT : FM $= a : x$. Simili modo eſt GT $=$ CG $+$ CT $= \frac{aa}{x} + \surd(aa - bb) = \frac{aa + x\surd(aa - bb)}{x}$ et GM $= a + \frac{x\surd(aa - bb)}{a}$ (§. 162.) $=$ $\frac{aa + x\surd(aa - bb)}{a}$. Ideo GT : GM $= a : x$, et proinde FT : FM $=$ GT : GM. At eſt FT : FM $=$ *ſin* FMT : *ſin* CTM, et GT : GM $=$ (*ſin* GMF vel *ſin* GMt) : *ſin* CTM (§. 9. *Calc. Ext.*), ergo *ſin* FMT : *ſin* CTM $=$ *ſin* GMt : *ſin* CTM, atque *ſin* FMT $=$ *ſin* GMt, ex quo patet, angulos FMT et GMt aequales eſſe. *Ambae itaque roctae ex focis ad punctum ellipſis quodcunque ductae aequali ad tangentem curvae in illo puncto inclinatae ſunt angulo.*

§. 279.

Ex formula CT $= \frac{aa}{x}$ porro concluditur AT $=$ CT $-$ AC $= \frac{aa}{x} - a = \frac{aa - ax}{x} = \frac{a}{x}(a - x)$, BT $=$ CT $+$ CB $= \frac{aa}{x} + a = \frac{aa + ax}{x} = \frac{a}{x}(a + x)$. Unde deducitur analogia $\frac{a}{x}(a + x) : \frac{a}{x}(a - x) = a + x : a - x$, id eſt BT : AT $=$ BP : AP. Recta igitur BT in punctis A et P ſic diviſa eſt, ut ſit tota, BT ad unam partium extremarum AT, ut altera pars extrema BP ad mediam AP, quæ *ſectio harmonica* vocari ſolet. Quodſi jam ex vertice A ad axem erigatur perpendicularis AV occurrens tangenti in V; eadem rati[o] $a + x : a - x$ æqualis deprehenditur rationi bb : AV². Nam anguli CTM tangens eſt $= \frac{PM}{PT} = \frac{ybbx}{aayy} = \frac{bbx}{aay}$

atqu[e]

atque in triangulo AVT eſt AV = AT × tang. CTM (§. 42.) $= \frac{a(a-x)}{x} \times \frac{bbx}{aay} = \frac{a(a-x)bbx}{xaay} = \frac{aabbx - axbbx}{xaay} = \frac{abb - bbx}{ay} = \frac{bb(a-x)}{b\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{b(a-x)}{\sqrt{(aa-xx)}}$

Ideo $AV^2 = \frac{bb(a-x)(a-x)}{(a-x)(a+x)} = \frac{bb(a-x)}{a+x}$, id eſt $a+x : a-x = bb : AV^2$; eſt itaque $AV = b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

§. 280.

Rectae CS et CZ ex centro ellipſis C ita ad tangentem TM ductae, ut ſint rectis FM et GM ex focis ad punctum contactus M ductis parallelae ſibi invicem et ſemiaxi transverſo AC aequales ſunt. Quia enim CT : CA = $a : x$, atque GT : GM = $a : x$ (§. 278.) erit GT : GM = CT : CA. Si itaque CS ſit ipſi GM parallela, erit GT : GM = CT : CS, proinde CT : CS = CT : CA, et CS = CA = a. Si deinde CZ ipſi FM fuerit parallela; erit CT : CA = $a : x$, FT : TM = $a : x$ (§. 278.), ergo FT : FM = CT : CA, præterea FT : FM = CT : CZ, ideo CT : CZ = CT : CA, atque CZ = CA = CS. *Quodſi jam ex focis F et G ducantur recta FS et GZ, ad puncta* S *atque Z in tangente per rectas CS atque CZ determinata; erunt hæ rectae FS et GZ ad tangentem normales.* Ex formula enim pro ſubtangente PT habetur formula pro tangente TM, quia $TM^2 = PT^2 + PM^2 = \frac{y^4a^4}{b^4x^4} + yy = \frac{y^4a^4 + b^4x^2y^2}{b^4xx} = \frac{y^2(a^4y^2 + b^4x^2)}{b^4xx}$, et proinde $TM = \frac{y\sqrt{(a^4y^2+b^4x^2)}}{bbx} = \frac{y}{bbx}\sqrt{b^4x^2 + a^2 a^2y^2)} = \frac{y}{bbx}\sqrt{(b^4xx + aa(aabb - bbxx))} = \frac{y}{bbx}\sqrt{(b^4}$

$x^2 +$

$x^2 + a^4b^2 - a^2b^2x^2) = \frac{y}{bbx} b\sqrt{(bbxx + a^4 - aaxx)} =$

$\frac{y}{bx}\sqrt{(a^4 - (xx(aa-bb))}$. At eſt FT $= \frac{aa - x\sqrt{(aa-bb)}}{x}$,

et GT $= \frac{aa + x\sqrt{(aa-bb)}}{x}$, proinde FT $\times$ GT $=$

$\frac{a^4 - xx(aa-bb)}{xx}$, unde TM $= \frac{y}{b}\sqrt{\frac{a^4 - xx(aa-bb)}{xx}} =$

$\frac{y}{b}\sqrt{FT \times GT}$. Jam TG : TC $=$ TM : TS, ergo

$TS = \frac{TM \times TC}{TG} = \frac{y}{b}\sqrt{(FT \times GT)}\,\frac{TC}{TG} = \frac{y}{b}$

$\times \frac{TC}{TG} \times \sqrt{FT\,.\,GT} = \frac{y\,.\,TC}{b}\sqrt{\frac{FT\,.\,GT}{GT^2}} =$

$\frac{y\,.\,TC}{b}\sqrt{\frac{FT}{GT}} = \frac{y\,.\,CT}{b} \times \frac{\sqrt{FT}}{\sqrt{GT}} \times \frac{\sqrt{FT}}{\sqrt{FT}} =$

$\frac{y\,.\,CT\,.\,FT}{b\,.\sqrt{(GT\,.\,FT)}} = \frac{yy\,.\,CT\,.\,FT}{bb} : \frac{y\sqrt{(GT\,.\,FT)}}{b} =$

$\frac{yy\,.\,CT\,.\,FT}{bb\,.\,TM}$. Deinde eſt PT $= \frac{aayy}{bbx} = \frac{yy}{bb} \times \frac{aa}{x}$

$= \frac{CT\,.\,yy}{bb}$. Hoc itaque valore PT in priori formula ſubſtituto, erit TS $= \frac{PT \times FT}{TM}$. Ideo TM : PT $=$ FT : TS. In triangulis TMP et TFS vero præter hæc latera proportionalia angulus interceptus T idem eſt, proinde ΔTMP ∽ ΔTFS et angulus TSF $=$ TPM $=$ recto. (*q. e.* 1) Deinde MS : CG $=$ CS : GM; et FC : MZ $=$ FM : CZ, ex quibus proportionibus ſequitur fore MS : CS $=$ CG : MG et CZ : MZ $=$ FM : EC. Sed CS $=$ CZ et CG $=$ FC, ideo MS : MZ $=$ FM : MG.

Prae-

Præterea in triangulis FMS et GMZ praeter haec latera proportionalia angulus interceptus FMS = GMZ (§. 278.). Ideo $\Delta FMS \backsim \Delta GMZ$, atque angulus GZM = FSM = recto. (*q. e. d.*)

§. 281.

Quodſi ergo ex alterutro foco F ad tangentem ducatur perpendiculum FS, atque ad punctum S ex centro C recta CS; *haec CS erit ſemiaxi minori aequalis.* Quia jam $TM : y = FT : FS$, fiet $FS = \frac{y.FT}{TM} = y.FT : \frac{y\sqrt{FT.GT}}{b} = \frac{by\,FT}{y\sqrt{FT.GT}} = \frac{b.FT}{\sqrt{FT.GT}}$. Proinde $FS^2 = \frac{bb.FT^2}{FT.GT} = \frac{bb.FT}{GT}$, atque $FS = b\sqrt{\frac{FT}{GT}}$. Eſt itaque $GT : FT = GM : FM$ (§.278) $= CD^2 : FS^2$. Demiſſo quoque ex altero foco G ad tangentem perpendiculo GZ, *erit ſemiaxis conjugata CD = b inter duo haec perpendicula ex focis in tangentem media proportionalis.* Nam $TM : y = TG : GZ$ proinde $GZ = \frac{y.GF}{TM} = y.GT : \frac{y\sqrt{FT.GT}}{b} = \frac{by\,GT}{y\sqrt{FT.GT}} = \frac{b.GT}{\sqrt{FT.GT}}$; $GZ^2 = \frac{bb.GT^2}{FT.GT} = \frac{bb.GT}{FT}$; $GZ = b\sqrt{\frac{GT}{FT}}$. Ergo $FT : GT = CD^2 : GZ^2$ ſive $GT : FT = GZ^2 : CD^2$, quae proportio cum ſuperiori $GT : FT = CD^2 : FS^2$ collata dat $GZ^2 : CD^2 = CD^2 : FS^2$, et proinde $GZ : CD = CD : FS$. Demiſſo denique ex centro C tertio perpendiculo CQ in tangentem, erit $FT : FS = CT : CQ$, et proinde $CQ = \frac{FS.CT}{FT} = \frac{CT}{FT} \times \frac{b.FT}{\sqrt{FT.GT}}$. Ergo

go $CQ^2 = \frac{bb FT^2 CT^2}{FT^2 . FT . GT} = \frac{bb . CT^2}{FT . GT}$, atque CQ $= \frac{b . CT}{\surd(FT . GT)}$. Per focum F ducatur FX tangenti parallela, occurrens perpendiculo CQ in puncto X; erit $CX = CQ - FS = \frac{b . CT - b . FT}{\surd FT . GT} = \frac{b(CT - FT)}{\surd FT . GT} = \frac{b . CF}{\surd FT . GT}$. Ideo $CQ - CX = \frac{b . CT - b . CF}{\surd FT . GT} = \frac{b(CT - CF)}{\surd FT . GT} = \frac{b . FT}{\surd FT . GT}$, et $CQ + CX = \frac{b . CT + b . CF}{\surd FT . GT} = \frac{b . GT}{\surd FT . GT}$. Proinde $CQ^2 - CX^2 = bb$, atque $CX = \surd(CQ^2 - bb)$. *Dato igitur axe minori in perpendiculo CQ reperitur punctum X, unde normalis educta per focum F tranſibit.*

§. 282.

Ducta jam ſit in ellipſi ſemidiameter CM, cujus conjugata reperitur ducta CK tangenti parallela. Ex puncto K ad axem transverſum AB cadat perpendicularis KR; erit $AP \times PB : AR \times RB = PM^2 : KR^2$, et poſito $CR = u$, inde concluditur $aa - xx : aa - uu = PM^2 : KR^2$. Quia jam $\Delta TPM \backsim \Delta CRK$, habetur $PM^2 : KR^2 = PT^2 : CR^2$, unde concluditur $aa - xx : aa - uu = \frac{(aa - xx)^2}{xx} : uu$; $uu = \frac{(aa - uu)(aa - xx)}{xx}$; $uuxx = a^4 - aaxx + aauu + uuxx$; ergo $uu = aa - xx$, id eſt $CR^2 = AP \times PB$. Praeterea $xx = aa - uu$, id eſt $CP^2 = AR \times RB$. Porro ex §. 158. ſequentem habemus analogiam $aa : bb = AR \times RB : KR^2$, unde $aa : bb = CP^2 : KR^2$, atque $KR^2 = \frac{bbxx}{aa}$. Denique eſt $CM^2 = CP^2$

+

$+ PM^2 = xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$, atque $CK^2 = CR^2 + RK^2 = aa - xx + \frac{bbxx}{aa}$; ergo $CM^2 + CK^2 = bb + aa$. *In eadem igitur ellipſi ſumma quadratorum binarum diametrorum conjugatarum ſemper eſt conſtans.*

§. 283.

In triangulis PTM et CKR porro eſt $MT : PM = CK : KR$. Sed $MT : PM = \frac{y}{b}\sqrt{FT . GT} : y = \frac{ay}{bx}\sqrt{FM . GM} : y$. Eſt enim $FT \times GT = \frac{a^4 - xx(aa - bb)}{xx}$, et $FM . GM = \frac{a^4 - xx(aa - bb)}{aa}$. Proinde $FT . GT : FM . GM = aa : xx$, et $FT . GT = \frac{aa FM . GM}{xx}$. Eſt itaque $CK : KR = \frac{ay}{bx}\sqrt{FM . GM} : y = \frac{a}{bx}\sqrt{FM . GM} : 1$. Iam $CM^2 = xx + yy = bb - \frac{bbxx}{aa} + xx = \frac{bbaa - bbxx + aaxx}{aa} = bb + \frac{xx(aa - bb)}{aa}$. Ideo $CK^2 = aa + bb - CM^2 = aa + bb - bb - \frac{xx(aa - bb)}{aa} = aa - \frac{xx(aa - bb)}{aa} = FM . GM$, et proinde $CK = \sqrt{FM . GM}$. Ex analogia igitur $CK : KR = \frac{ay}{bx}\sqrt{FM . GM} : 1$ fit $CK : KR = \frac{a}{bx} CK : 1$; atque ex eadem deducitur $KR = \frac{bx}{a}$. Ex centro in tangentem ducatur perpendiculum CQ, et

poſito angulo CMT = MCK = s, erit CQ = CM $\mathit{ſin.}\,s$. Eſt vero CT : CQ = CK : KR, id eſt $\frac{aa}{x}$: CM. $\mathit{ſin.}\,s$ $=$ CK : $\frac{bx}{a}$, unde deducitur $ab =$ CM . CK . $\mathit{ſin.}\,s$.

Ex §. 283. habemus $aa + bb = pp + qq$, poſito CM $= p$ et CK $= q$. Proinde $aa + 2ab + bb = pp + 2ab + qq = pp + 2pq\,\mathit{ſin.}\,s + qq$, atque $a + b = \surd(pp + 2pq\,\mathit{ſin.}\,s + qq)$. Deinde quoque eſt $aa - 2ab + bb = pp - 2ab + qq = pp - 2pq\,\mathit{ſin.}\,s + qq$, ideoque $a - b = \surd(pp - 2pq\,\mathit{ſin.}\,s + qq)$. Ergo eſt $a = \frac{1}{2}\surd(pp + 2pq\,\mathit{ſin.}\,s + qq) + \frac{1}{2}\surd(pp - 2pq\,\mathit{ſin.}\,s + qq)$, atque $b = \frac{1}{2}\surd(pp + 2pq\,\mathit{ſin.}\,s + qq) - \frac{1}{2}\surd(pp - 2pq\,\mathit{ſin.}\,s + qq)$ Ex quo patet, quomodo ex datis duabus ſemidiametris conjugatis obliquangulis cum angulo, quem comprehendunt, duae ſemidiametri principales inveniantur.

§. 284.

Simili ratione ex datis duabus ſemidiametris principalibus inveniuntur duae ſemidiametri obliquangulae conjugatae quaecunque dato ſimul angulo coordinationis s. Quia enim $pp + qq = aa + bb$ et $2pq = \frac{2ab}{\mathit{ſin.}\,s}$, erit $pp + 2pq + qq = aa + \frac{2ab}{\mathit{ſin.}\,s} + bb$ atque $pp - 2pq + qq = aa - \frac{2ab}{\mathit{ſin.}\,s} + bb$. Proinde $p + q = \surd(aa + \frac{2ab}{\mathit{ſin.}\,s} + bb)$ et $p - q = \surd(aa - \frac{2ab}{\mathit{ſin.}\,s} + bb)$ ex quibus eodem modo ut ante valores ipſarum p et q concluduntur. Quia jam eſt $a - b = \surd(pp - 2pq\,\mathit{ſin.}\,s + qq)$ et $p - q = \surd(aa - \frac{2ab}{\mathit{ſin.}\,s} + bb)$ praeterea vero $pp + qq = aa + bb$, et $2pq =$

$\frac{2ab}{\mathit{ſin.}\,s}$

$\frac{2ab}{\text{ſin.}\,s}$, erit $2pq\,\text{ſin.}\,s < \frac{2ab}{\text{ſin.}\,s}$, hincque $pp - 2pq\,\text{ſin.}\,s + qq > aa - \frac{2ab}{\text{ſin.}\,s} + bb$, et $a - b > p - q$. Inter omnes igitur diametros conjugatas illae, quae ſunt orthogonales, maxime a ſe invicem differunt. Præterea, ſi fieri poſſit $\text{ſin.}\,s = \frac{2ab}{aa+bb}$, ut ſit $\frac{2ab}{\text{ſin.}\,s} = aa + bb$, fiet $p = q$; inquiramus itaque in hujus hypotheſeos poſſibilitatem. Si fuerit $\text{ſin.}\,s = \frac{2ab}{aa+bb}$, et proinde $p = q$, erit $pp = qq = \frac{aa+bb}{2}$, et $p = q = \sqrt{\frac{(aa+bb)}{2}}$. Præterea $\text{ſin.}\,s^2 = \frac{4\,aabb}{(aa+bb)^2}$, $\text{ſin.}\,s^2 + \text{coſ.}\,s^2 = \frac{4aabb}{(aa+bb)^2} + cos^2 = 1$, atque $\text{coſ.}\,s^2 = 1 - \frac{4\,aabb}{(aa+bb)^2} = \frac{(aa+bb)^2 - 4aabb)}{(aa+bb)^2} = \frac{a^4 + 2aabb + b^4 - 4aabb}{(aa+bb)^2} = \frac{a^4 - 2aabb + b^4}{(aa+bb)}$. Proinde $\text{coſ.}\,s = \frac{aa-bb}{aa+bb}$, qui negative ſumtus ob angulum MCK obtuſum eſt $= \frac{-aa+bb}{aa+bb}$. Porro eſt $\text{ſin}\,\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{1-\text{coſ.}\,s}{2}} = \sqrt{(1 - \frac{-aa+bb}{(aa+bb)}):2)} = \sqrt{\frac{aa}{aa+bb}}$, atque $cos\,\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{1+\text{coſ.}\,s}{2}} = \sqrt{((1 + \frac{-aa+bb}{aa+bb}):2)} = \sqrt{\frac{bb}{aa+bb}}$. Ergo $tang\,\frac{1}{2}s = \frac{\text{ſin}\,\frac{1}{2}s}{cos\,\frac{1}{2}s} = \frac{a}{b}$, atque ideo $\frac{1}{2}s$, id eſt $\frac{1}{2}$MCK $=$ CEB, et MCK $=$ 2CEB $=$ AEB. Dantur

tur itaque in ellipſi duæ ſemidiametri conjugatæ æquales, quarum angulus coordinationis eſt $= AEB$. Quia porro eſt $pp = xx + yy = xx + bb - \frac{bb}{aa}xx$, fiet $pp - bb = \frac{aaxx - bbxx}{aa}$, et $xx = CP^2 = \frac{aa(pp - bb)}{aa - bb}$. Deinde $2pp = aa + bb$, ideo $2pp - 2bb = aa - bb$, atque $CP^2 = \frac{aa(pp - bb)}{2(pp - bb)} = \frac{aa}{2}$; ergo $CP = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Tandem hoc valore loco x ſubſtituto invenitur $PM^2 = bb - \frac{bbaa}{2aa} = bb - \frac{bb}{2} = \frac{bb}{2}$, et $PM = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Proinde fit tang $PCM = \frac{PM}{CP} = \frac{b}{a}$, et tang $MCD = \cot. PCM = \frac{1}{tang. PCM} = \frac{a}{b}$. Quare poſita ſub hypotheſi eſt angulus $MCD = AEC = CEB$, atque ſemidiametri conjugatæ CM, CK, inter ſe æquales, erunt parallelæ chordis EA et EB.

§. 285.

ad Parabolam. f. 275. Propoſita jam ſit parabola MAN, cujus axis transverſus eſt AC, focus F, ſemilatus rectum $FH = c$; ſitque invenienda recta TM curvam in puncto T tangens. Quodſi ~~ex dato~~ puncto M ad latus transverſum ducatur applicata orthogonalis $MP = y$, exiſtente $AP = x$, habetur æquatio pro curva $yy = 2cx$ (§. 157.), cujus differentialis eſt $y\frac{dy}{dx} = c$ atque $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{c}$. Proinde ſubtangens PT $= y\frac{dx}{dy} = \frac{yy}{c} = 2x$. Hinc portio ſubtangentis AT inter tangentem et verticem intercepta $= x = AP$. Quia jam recta $FM = AP + AF$, ob $AP = AT$, erit quo-

quoque $FM = AT + AF = FT$, et proinde triangulum FMT æquicrurum, et angulus $MFP = 2MTP$. Præterea ſi ex vertice A erigatur AS ad axem normalis, occurrens tangenti in S, erit $PT : AT = PM : AS$, et proinde $AS = \frac{1}{2}PM$. Si itaque per punctum M ducatur recta Mt axi AC parallela, erit angulus $tMS = SMT = FMT$.

§. 286.

Quodſi jam deſideretur formula pro ipſa tangente MT; erit $MT^2 = PM^2 + PT^2 = 4x^2 + 2cx = 4x(x + \frac{1}{2}c)$, et proinde $MT = 2\sqrt{(x(x+\frac{1}{2}c))} = 2\sqrt{AP \cdot FM}$. *Demiſſo nunc perpendiculo FS ex foco F in tangentem, erit punctum occurſus S in recta SA ad axem in vertice normali.* Eſt enim $MS = TS = \frac{1}{2}MT = \sqrt{AP \cdot FM} = \sqrt{AT \cdot FT}$, unde $TS^2 = AT \cdot FT$, et $AT : TS = TS : FT$, ex qua analogia perſpicitur, eſſe $\Delta ATS \backsim \Delta FTS$, quia angulus T utrique eſt communis, et proinde ang. $FST = R = SAT$. *Ipſum vero perpendiculum FS ex foco in tangentem eſt media proportionalis inter diſtantiam foci a vertice AF et rectam FM ex foco ad punctum contactus M ducta.* Quia enim $\Delta AFS \backsim \Delta FTS$, erit quoque ang. $AFS =$ ang. AST, atque $\Delta AFS \backsim \Delta AST$. Proinde $AS : TS = AF : FS$, ergo $FS = \frac{AF \cdot TS}{AS} = \frac{AF \cdot TS}{\frac{1}{2}PM} = \frac{2AF \cdot TS}{PM}$. Sed $TS = \sqrt{AP \cdot FM}$, ergo $FS = \frac{2AF \cdot \sqrt{AP \cdot FM}}{PM}$ et $FS^2 = \frac{4AF^2 \cdot AP \cdot FM}{PM^2} = AF \cdot FM$, ob $PM^2 = 4AF \cdot AP$. Ideo $AF : FS = FS : FM$. Eſt itaque $FS = \sqrt{AF \cdot FM}$, unde ſequentes deducuntur concluſiones. $AS : MS = AS : TS$, ob $MS = TS$, $AS : TS = AF : FS$, ergo $AS : MS = AF : FS$, $AF : FS = FS : FM$, ergo $AS : MS = FS : FM$. Praeterea eſt $FS : FM = FS : FM$, ſive $FS : FM = \sqrt{AF \cdot FM} : FM$, ideo $FS^2 : FM^2 = AF \cdot FM : FM^2$, $FS^2 :$

$FM^2 = AF : FM$, $FS : FM = \sqrt{AF} : \sqrt{FM}$, ergo $AS : MS = \sqrt{AF} : \sqrt{FM}$.

§. 287.

Si curvam quamcunque MAN in puncto M tangat recta TM, ea quæ per punctum contactus ducitur recta MR tangenti MT perpendicularis, ipſi *curvæ normalis* ſive *perpendicularis* eſſe dicitur. Atque ſi ex puncto M ad axem curvæ cadat applicata MP, et normalis axem ſecet in puncto quodam R; portio axis inter applicatam et normalem intercepta dicitur *Subnormalis*. Si applicata PM ad axem ſit normalis, eadem perpetuo inter ſubtangentem et ſubnormalem proportione media eſt, ita ut ſit $yy = PR \times PT$, atque $PR = \frac{yy}{PT}$. Quare cum pro coordinatis orthogonalibus ſit $PT = y\frac{dx}{dy}$ ſub eadem hypotheſi formulà pro ſubnormali generalis eſt $PR = y\frac{dy}{dx}$. Data ſubnormali, quæ ſecundum formulam ex æquatione pro curva datà differentiando deducitur, determinata eſt poſitio normalis RM, et proinde ſimul poſitio tangentis MT faciendo angulum RMT rectum.

Pro parabola MAN habetur $\frac{dy}{dx} = \frac{c}{y}$, hinc $PR = y\frac{dy}{dx} = c =$ ſemilateri recto $=$ conſtanti. Ipſa normalis MR pro parabola eſt $= 2FS = 2\sqrt{AF \cdot FM}$ ob $TS : SM = FS : MR$.

§. 288.

Quodſi ex quocunque ellipſeos puncto M ad centrum curvæ ducatur recta, ea erit diameter omnes ordinatas tangenti in puncto M parallelas biſariam ſecans. Poſito vero ſemilatere transverſo infinito, curva ſit parabola

rabola, ideò ſi ex quocunque parabolæ puncto M (tur recta MC axi transverſo AP parallela, hæc erit meter parabolæ obliquangula, omnes ordinatas tan ti MT parallelas ſecans biſariam. Idem etiam per culum invenitur ſequentem in modum. Ducta ſit ipſi AP parallela, et ordinata mn ſit ipſi MT para Sit $Mp = t$, et $pm = u$, atque ducatur ex m ad transverſum normalis mr, quæ etiam ipſi MC a normaliter inſiſtet. Erit $PT = 2x$, $MT = \sqrt{(4}$ $2cx)$, $MT : PT = mp : ps$, quia angulus $mps = t$ MTP. Proinde $ps = \frac{2xu}{\sqrt{(4xx + 2cx)}}$, $ps^2 = \frac{4x}{4xx}$ $= \frac{2xuu}{2x+c}$, atque $ps = u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$. Porro $2x :$ $= ps : ms$, et $4xx : 2cx = ps^2 : ms^2$ ſive $4xx : 2$ $\frac{2xuu}{2x+c} : ms^2$; ergo $ms^2 = \frac{4cxxuu}{2x+c} : 4xx = \frac{4cx}{8x^3+}$ $= \frac{uuc}{2x+c}$, et $ms = u\sqrt{\frac{c}{2x+c}}$. Eſt itaque

$AP + Mp + ps = x + t + u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$, et $mr = P$

$ms = \sqrt{2cx} + u\sqrt{\frac{c}{2x+c}}$. Per naturam vero

bolæ eſt $mr^2 = 2c . Ar$; ideo fit $(\sqrt{2cx} + u\sqrt{\frac{c}{2x+}}$

$= 2cx + 2ct + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$, id eſt $2cx + 2cu\sqrt{}$

$+ \frac{uuc}{2x+c} = 2cx + 2ct + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$. Ergo $\frac{u}{2x}$ $= 2ct$, et $uu = (4x + 2c)t$. Unde patet cuilibet abſ poſitivæ duas reſpondere applicatas reales abſ pectatas æquales. Eſt vero $x + \frac{1}{2}c = FM$, et pr

de $4x + 2c = 4FM$. Proinde hujus diametri obliquangulæ parameter eſt $= 4FM$.

§. 289.

Pro hyperbola MAN abſciſſis a centro in latere tranſverſo computatis habetur æquatio $aayy = bbxx - aabb$ unde concluditur differentiando $aay \frac{dy}{dx} = bbx$, atque $\frac{dx}{dy} = \frac{aay}{bbx}$. Proinde eſt ſubtangens $PT = \frac{aayy}{bbx} = \frac{bbxx - bbaa}{bbx} = \frac{xx - aa}{x} = x - \frac{aa}{x}$. Ideo hic quoque $CT = CP - PT = \frac{aa}{x}$. Præterea eſt $MT^2 = PT^2 + PM^2 = \frac{y^4 a^4}{b^4 xx} + yy = \frac{y^4 a^4 + b^4 yyxx}{b^4 xx} = \frac{yy(b^4 xx + yya^4)}{b^4 xx}$ Ergo $MT = \frac{y\surd(b^4 xx + yya^4)}{bbx}$ $= \frac{y\surd(b^4 x^2 + aa \cdot aayy)}{bbx}$. Eſt vero $aayy = bbxx - bbaa$ ideoque eſt $MT = \frac{y}{bbx}\surd(b^4 xx + aa \cdot (bbxx - bbaa) = \frac{y}{bbx}\surd(b^4 xx + bbaaxx - bba^4) = \frac{y}{bx}\surd(bbxx - a^4 + aaxx)$ $= \frac{ya}{bx}, \frac{\surd(bbxx + aaxx - a^4)}{a}$.

Sed $\frac{aaxx + bbxx - a^4}{aa} = \left(\frac{x\surd(aa + bb)}{a} - a\right) \left(\frac{x\surd(aa + bb)}{a} + a\right) = FM \cdot GM$ (§. 162.) Ergo tangens $MT = \frac{ya}{bx}\surd FM \cdot GM$.

§ 290.

§. 290.

Ambae rectae ex focis FM et GM ad punctum hyperbolae quodvis M ductae aequaliter inclinantur ad tangentem curvae in illo puncto M, ſive angulus FMT erit = GMT.

Quia eſt $FT = \sqrt{(aa+bb)} - \frac{aa}{x} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)} - aa}{x}$

et $FM = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} - a = \frac{x\sqrt{(aa+bb)} - aa}{a}$ erit

$FT : FM = a : x$. Deinde ob $GT = \sqrt{(aa+bb)} + \frac{aa}{x}$

$= \frac{x\sqrt{(aa+bb)} + aa}{x}$ et $GM = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} + a =$

$\frac{x\sqrt{(aa+bb)} + aa}{a}$,

erit quoque $GT : GM = a : x$

ideo $FT : FM = GT : GM$

et $FT : GT = FM : GM$.

Ergo ſin. FMT : ſin. GMT = ſin. FTM : ſin GTM.

Sed ſin. FTM = ſin. GTM

Ergo et ſin. FMT = ſin GMT, ideoque

angulus FMT = angulo GMT.

§. 291.

Si ex focis F et G ad tangentem MT ducantur perpendicula FS et Gs erit uti in ellipſi FS × Gs = bb.

Ducto enim ex foco F in tangentem perpendiculo FS, erit

$TM : PT = FT : TS$

(quia tr. PMT ∽ tr. FST ob angulos ad S et P rectos et angulum T utrique communem.) ideo $\frac{ay}{bx} \sqrt{FM}$.

$GM : \frac{aayy}{bbx} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)} - aa}{x} : FS$. Sed $\frac{x\sqrt{(aa+bb)} - aa}{x}$

$=$

$= \frac{x\sqrt{(aa+bb)}-aa}{a} \cdot \frac{a}{x}$. Ergo $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM \cdot GM} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}-aa}{a} \cdot \frac{a}{x} : TS$. Eſt vero $\frac{x\sqrt{(aa+bb)}-aa}{a} = FM$. Ergo $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM \cdot GM} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{a \cdot FM}{x} : TS$ et $TS = \frac{a^3yyFM}{bbxx} : \frac{ay}{bx}\sqrt{FM \cdot GM} = \frac{bxa^3yy\,FM}{bbxxay\sqrt{FM \cdot GM}} = \frac{aay \cdot FM}{bx\sqrt{FM \cdot GM}}$. Deinde eſt $PT : PM = TS : FS$ ideoque $\frac{aayy}{bbx} : y = \frac{aay \cdot FM}{bx\sqrt{FM \cdot GM}} : FS$. et hinc $FS = \frac{aayy \cdot FM}{bx\sqrt{FM \cdot GM}} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{aayybbx\,FM}{aayybx\sqrt{FM \cdot GM}} = \frac{b \cdot FM}{\sqrt{FM \cdot GM}}$.

Pariter ſi ex altero foco G in tangentem ducatur perpendicularis Gſ, erit $MT : PT = GT : T$ſ, id eſt $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM \cdot GM} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}+aa}{x}$:Tſ. Sed $\frac{x\sqrt{(aa+bb)}+aa}{x} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}+aa}{a} \cdot \frac{a}{x}$. Ergo $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM \cdot GM} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}+aa}{a} \cdot \frac{a}{x}$:Tſ. Jam $\frac{x\sqrt{(aa+bb)}+aa}{a} = GM$, Ergo $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM \cdot GM} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{a \cdot GM}{x}$: Tſ, ideoque Tſ $= \frac{a^3yy \cdot GM}{bbxx} : \frac{ay\sqrt{FM \cdot GM}}{bx} = \frac{a^3yybx \cdot GM}{bbxxay\sqrt{FM \cdot GM}} = \frac{aay \cdot GM}{bx\sqrt{FM \cdot GM}}$.

Deinde

Deinde eſt PT : PM = Tſ : Gſ, id eſt $\frac{aayy}{bbx} : y = \frac{aay \cdot GM}{bx\sqrt{FM \cdot GM}} : Gs$, ergo $Gs = \frac{aayy \cdot GM}{bx\sqrt{FM \cdot GM}} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{aayybbx \cdot GM}{aayybx\sqrt{FM \cdot GM}} = \frac{b \cdot GM}{\sqrt{FM \cdot GM}}$. Ex quibus fit $FS \cdot GS = \frac{b \cdot FM}{\sqrt{FM \cdot GM}} \cdot \frac{b \cdot GM}{\sqrt{FM \cdot GM}} = \frac{bb \cdot FM \cdot GM}{FM \cdot GM} = bb$.

Ex demonſtratione præcedentis theorematis quoque habetur $TS \cdot Ts = \frac{aay \cdot FM}{bx\sqrt{FM \cdot GM}} \cdot \frac{aay \cdot GM}{bx\sqrt{FM \cdot GM}} = \frac{a^4yy\, FM \cdot GM}{bbxx\, FM \cdot GM} = \frac{a^4yy}{bbxx} = \frac{aayy}{bbx} \cdot \frac{aa}{x} = PT \cdot CT$. Quæ facta aequalia $TS \cdot Ts = PT \cdot CT$ dant proportionem ſequentem; $TS : CT = PT : Ts$.

§. 292.

Ducto tertio perpendiculo CQ ex centro ad tangentem, erit $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM \cdot GM}}$. Eſt enim $MT : PT = CT : TQ$ ſive $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM \cdot GM} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{aa}{x} : TQ$ et $TQ = \frac{a^4yy}{bbxy} : \frac{ay\sqrt{FM \cdot GM}}{bx} = \frac{a^4yybx}{bbxxay\sqrt{FM \cdot FM}} = \frac{a^3y}{bx\sqrt{FM \cdot GM}}$. Porro eſt $PT : PM = TQ : CQ$, ſive $\frac{aayy}{bbx} : y = \frac{a^3y}{bx\sqrt{FM \cdot GM}} : CQ$. Hinc CQ =

$= \frac{a^3yy}{bx\surd FM.GM} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{a^3yybbx}{aayybx\surd FM.GM} = \frac{ab}{\surd FM.GM}$

§. 293.

Quodſi ex alterutro foco F ad tangentem ducatur perpendicularis FS, et ad punctum S ex centro C recta CS, erit haec CS perpetuo ſemiaxi majori aequalis. Ducatur ex foco F tangenti parallela FX ſecans perpendiculum CQ productum in X,

$$\begin{aligned} \text{et erit } CT : TQ &= CF : FX \\ \text{et } CT : TQ &= CG : Qs \\ \text{Ergo } CF : FX &= CG : Qs \\ \text{et } GF : CG &= FX : Qs \end{aligned}$$

Sed $FX = Qs$, quia $CF = CG$. Praeterea $FX = QS$. Ergo $QS = Qs$. Hinc erit $QS = \frac{TS + Ts}{2} = \left(\frac{aay.FM}{bx\surd FM.GM} + \frac{aay.GM}{bx\surd FM.GM}\right) : 2 = \frac{aay.FM + aay.GM}{2bx\surd FM.GM} = \frac{aay(FM + GM)}{2bx\surd FM.GM}$;

Eſt vero $FM + GM = \frac{2x\surd(aa + bb)}{a}$. Ergo QS $= \frac{aay.\frac{2x\surd(aa+bb)}{a}}{2bx\surd FM.GM} = \frac{ay2x\surd(aa + bb)}{2bx\surd FM.GM} = \frac{ay\surd(aa + bb)}{b\surd FM.GM} = Qs$. Unde ſequitur $CS^2 = CQ^2 + QS^2 = \frac{aabb}{FM.GM} + \frac{aayy(aa + bb)}{bb.FM.GM}$

=

$$= \frac{aab^4 + a^4yy + aayybb}{bb.FM.GM} = \frac{aab^4 + aayy(aa+bb)}{bb\,FM.GM}$$

Sed $aayy = bb(xx - aa)$. Ergo $CS^2 =$

$$\frac{aab^4 + bb(xx-aa)(aa+bb)}{bb\,FM.GM} = \frac{aabb + (xx-aa)(aa+bb)}{FM.GM}$$

$$= \frac{aabb + aaxx + bbxx - aabb - a^4}{FM.GM} = \frac{aaxx + bbxx - a^4}{FM.GM}$$

$$= \frac{(aa+bb)xx - a^4}{FM.GM}.$$ At eſt $FM.GM = \frac{aaxx + bbxx - a^4}{aa}$.

Ergo $FM.GM.aa = aaxx + bbxx - a^4$ ideoque $aa = \frac{aaxx + bbxx - a^4}{FM.GM}$. Eſt itaque $CS^2 = aa$. Erit ergo uti in ellipſi recta $CS = a = AC$.

§. 294.

Quodſi ducatur ex foco F tangenti parallela FX, ſecans perpendiculum ex centro CQ productum in X, erit $CX = \sqrt{(bb + CQ^2)}$. Quia (§ 291) $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$ et (§ 291) $FS = \frac{b.FM}{\sqrt{FM.GM}}$ erit $CQ + FS = \frac{ab + b.FM}{\sqrt{FM.GM}}$. Sed $FM = \frac{x\sqrt{(aa+bb)} - aa}{a}$. Ergo $CQ + FS =$

$$\frac{ab + \frac{x\sqrt{(aa+bb)} - aa}{a}\,b}{\sqrt{FM.GM}} = \frac{aab + bx\sqrt{(aa+bb)} - aab}{a};$$

$$\sqrt{FM.FM} = \frac{aab + bx\sqrt{(aa+bb)} - aab}{a\sqrt{FM.GM}} = \frac{bx\sqrt{(aa+bb)}}{a\sqrt{FM.GM}}.$$

Quare $(CQ + FS)^2 - CQ^2 = \frac{bbxx(aa+bb)}{aa.FM.GN} - \frac{aabb}{FM.GM}$

$$= \frac{bbxx(aa+bb) - a^4bb}{aa.FM.GM} = \frac{(xx(aa+bb) - a^4)bb}{aa\,FM.GM}$$

At

At eſt $aa . FM . GM = xx(aa+bb) - a^4$ ideo eſt $(CQ + FS)^2 - CQ^2 = bb$. Si jam ducatur ex foco F tangenti parallela FX, ſecans perpendiculum productum in X, erit FS = QX ideoque CQ + QX = CX = CQ + FS. Eſt vero $(CQ + FS)^2 - CQ^2 = bb$ (*per dem.*) et hinc $(CQ + FS)^2 = bb + CQ^2$ atque $CX = CQ + FS = \sqrt{(bb + CQ^2)}$.

§. 295.

Si in verticibus A et B ad axem perpendiculares erigantur, donec tangenti occurrant in V et u; *erit perpendiculum AV ex vertice A ad perpendiculum FS ex foco reſpondente F ad tangentem, uti inverſim perpendiculum* Gs *ex altero foco G, ad tangentem, ad perpendiculum* Bu *ex vertice oppoſito B.* Ductis enim hiſce perpendiculis ex verticibus A et B ad axem, erit PT : PM = AT : AV, eſt vero $AT = a - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x} = \frac{a(x-a)}{x}$, ideo erit $\frac{aayy}{bbx} : y = \frac{a(x-a)}{x} : AV$. Ergo $AV = \frac{ay(x-a)}{x} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{bbxay(x-a)}{aayyx} = \frac{bb(x-a)}{ay}$.

Deinde PT : PM = BT : Bu; eſt vero $BT = a + \frac{aa}{x} = \frac{ax + aa}{x} = \frac{a(x+a)}{x}$ ideo $\frac{aayy}{bbx} : y = \frac{a(x+a)}{x} : Bu$ et $Bu = \frac{ay(x+a)}{x} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{bbxay(x+a)}{aayyx} = \frac{bb(x+a)}{ay}$.

Ergo $AV . Bu = \frac{bb(x-a)}{ay} . \frac{bb(x+a)}{ay} = \frac{b^4(xx-aa)}{aayy} = \frac{bb(xx-aa)bb}{aayy}$. Sed $(xx-aa)bb = aayy$ Ergo $AV . Bu = bb$, ſed $bb = FS . Gs$. Ergo $AV . Bu = FS . Gs$, et hinc $AV : FS = Gs : Bu$.

§. 296.

§. 296.

Praeterea rectae GF et Vu ita in T ſectae ſunt, ut ſegmenta ſint in reciproca proportione. Nam PT : TM = AT : TV F. 276.

i. e. $\frac{aayy}{bbx} : \frac{ay\sqrt{FM.GM}}{bx} = \frac{a(x-a)}{x}$: TV hinc

$TV = \frac{aay(x-a)\sqrt{FM.GM}}{bxx} : \frac{aayy}{bbx} =$

$\frac{aaybbx(x-a)\sqrt{FM.GM}}{aayybxx} = \frac{b(x-a)}{yx}\sqrt{FM.GM}.$

Deinde PT : TM = BT : Tu ſ. $\frac{aayy}{bbx} : \frac{ay\sqrt{FM.GM}}{bx}$

$= \frac{a(x+a)}{x}$: Tu. Hinc $Tv = \frac{aay(x+a)\sqrt{FM.GM}}{bxx}$:

$\frac{aayy}{bbx} = \frac{aaybbx(x+a)\sqrt{FM.GM}}{aayybxx} = \frac{b(x+a)}{yx}\sqrt{FM.}$

$GM.$ Unde $TV.Tv = \frac{bb(xx-aa)}{yyxx}$ FM . GM.

$= \frac{bbxx-bbaa}{yyxx}FM.GM = \frac{aabbxx-bba^4}{yyxxaa}FM.GM.$

$= \frac{aa}{xx}$ FM . GM (quia $bbxx - bbaa = yyaa$). Sed FM.GM =

$\frac{aaxx+bbxx-a^4}{a^2}$. Ergo $TV.Tv = \frac{aa}{xx}$.

$\frac{aaxx+bbxx-a^4}{aa} = \frac{aaxx+bbxx-a^4}{xx} = \frac{(aa+bb)xx-a^4}{xx}$

$= aa+bb-\frac{a^4}{xx} = (\sqrt{(aa+bb)}-\frac{aa}{x})(\sqrt{(aa+}$

$bb)+\frac{aa}{x})$. Ergo TV . Tv = FT . GT. conſ. § 290.

 §. 297.

§. 297.

Recta MC in hyperbola eſt ſemidiameter ſecans omnes ordinatas tangenti MT parallelas bifariam, cujus itaque conjugata reperitur ducta CK tangenti MT parallela. Erit quidem hæc diameter imaginaria (§. 188.) ponendo autem $CK^2 = -bb$, et ducta KR ad axem transverſum normali, ſi $CR = u$; habemus $AP \times PB : CA^2 + CR^2 = PM^2 : KR^2$, id eſt $-aa + xx : aa + uu = PM^2 : KR^2$. Sep $\Delta PTM \backsim \Delta CKR$, ideo $PM^2 : KR^2 = PT^2 : CR^2$, atque $-aa + xx : aa + uu = -\frac{(-aa+xx)^2}{xx} : uu$, unde concluditur $uu = -aa + xx$ et $uu + aa = xx$. Præterea eſt $aa : bb = CA^2 + CR^2\ (xx) : KR^2 = \frac{bbxx}{aa}$; $CM^2 = CP^2 + PM^2 = xx - bb + \frac{bbxx}{aa}$ $CK^2 = CR^2 + KR^2 = xx - aa + \frac{bbxx}{aa}$. Proinde $CM^2 - CK^2 = aa - bb$. Ideo quoque in hyperbola eſt ſumma algebraica quadratorum duarum ſemidiametrorum conjugatarum conſtantis magnitudinis, ubi tamen notandum eſt, quadratum ſemidiametri conjugatæ hic eſſe negativum.

§. 298.

Quia eſt $yy = \frac{bb}{aa}xx - bb$, et proinde $\frac{y}{x} = \sqrt{\left(\frac{bb}{aa} - \frac{bb}{xx}\right)}$; patet, quo major capiatur abſciſſa $CP = x$, eo magis rationem $\frac{y}{x}$ accedere ad rationem $\frac{b}{a}$. Poſito autem $x = \infty$, quo caſu etiam fit $y = \infty$, eſſe $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ (§. 78.); id eſt limes, ad quem ratio $\frac{y}{x}$ variabilibus

x et y, creſcentibus perpetuo adpropinquat, eſt ratio $\frac{b}{a}$, licet ipſa hæc ratio $\frac{y'}{x}$, ponendo pro x quantitatem finitam quantumvis magnam, perpetuo ſit $< \frac{b}{a}$. Poſito ergo in vertice A ad axem normali AD $= b$; ſi ducatur recta CD eaque in infinitum utrinque producta intelligatur; curva continuo magis ad eam adpropinquabit. Tum enim æquatio pro hac recta eſt $y = \frac{b}{a} x$ ſeu $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, et capta abſciſſa CP $= x$ communi pro ramo hyperbolæ AM et recta CI, quia ſemper eſt ratio $\frac{b}{a} > \frac{y}{x}$, perpetuo erit adplicata hyperbolæ PM minor adplicata rectæ Pm, ſed earundem differentia Mm eo minor evadit, quo magis abſciſſa x creſcit. Hoc idem valebit de parte Ck; atque ſi ad alteram partem ſub eodem angulo ducatur recta KCi; ad eandem rami BK, et Ai pariter eo magis accedent quo major abſciſſa $-$ CP capiatur.

§. 299.

Ejusmodi linea recta, ad quam linea quædam curva continuo propius accedit, licet eandem nunquam attingat, *Aſymtota* curvæ vocatur.

Lineæ igitur rectæ ICk et KCi ſunt binæ aſymtotæ hyperbolæ, atque aſymtotæ hyperbolæ ſe mutuo in centro C interſecant, ad axem verò inclinantur angulo ACD $=$ ACd, cujus tangens $= \frac{b}{a}$, angulique dupli DCd tangens $= \frac{2b}{a} : \left(1 - \frac{bb}{aa}\right) = \frac{2b}{a} : \frac{aa - bb}{aa}$, $= \frac{2baa}{(aa-bb)a} = \frac{2ba}{aa - bb}$. Unde patet, ſi fuerit $b = a$,

 fore-

fore angulum, ſub quo aſymtotæ ſe interſecant DCd $=$ recto, quia ipſius tangens fit $= \frac{2ba}{0} = \infty$, quo caſu *hyperbola æquilatera* dicitur.

Ex his præterea concludendum eſt, quod pars hyperbolæ MAN tota intra angulum ICi et altera pars KBk tota intra angulum HCk contineatur, licet aſymtotæ ipſæ ſint limites, ad quos quatuor hyperbolae rami continuo propius accedunt, quos nunquam vero adtingunt. Omnis itaque hyperbolæ diameter realis intra angulum ICi cadit. Reliquæ omnes extra hunc angulum cadentes ſunt impoſſibiles, atque aſymtotæ ſunt limites, diametros reales ab impoſſibilibus ſeparantes.

§. 300.

Si ex alterutro foco G in utramvis aſymtotam perpendiculum GH demittatur, erit hocce perpendiculum $=$ b, *portio vero aſymtotæ CH inter centrum C, et hocce perpendiculum GH intercepta erit* $=$ a. Cum enim ſit AC $= a$, et AD $= b$, erit CD $=$ Cd $= \sqrt{}(AC^2 + AD^2) = \sqrt{}(aa + bb)$. Jam quoque CG $= \sqrt{}(aa+bb) = \sqrt{}(CH^2 + GH^2)$ Cum igitur in triangulis ACd et CHG ſit latus CG $=$ Cd, angulus HCG $=$ ACd, et H $=$ recto $=$ A, erit triang. ACd $=$ CHG ideoque et CH $=$ AC $= a$, et GH $=$ Ad $= b$.

§. 301.

Producatur ordinata MPN utrinque, donec aſymtotas ſecet in m *et* n; *erunt rectangula Mm.Nm, Mm.Mn, Nn.Nm, Nn.Mn quadrato ipſius AD, et omnia quoque inter ſe æqualia.* Producta enim ordinata MPN $= 2y$ utrinque, donec aſymtotas ſecet in m et n, erit Pm $=$ Pn $= \frac{bx}{a}$ (§. 298.) ideoque ob tr. CPm $=$ tr. CPn

$$Cm = Cn = \sqrt{}\left(xx + \frac{bbxx}{aa}\right) = \sqrt{}\left(\frac{aaxx + bbxx}{aa}\right)$$

$= \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} - a + a = \text{FM} +$ $\text{AC} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} + a - a = \text{GM} - \text{AC}$. Tum vero erit $\text{M}m = \text{N}n = \frac{bx}{a} - y = \frac{bx+ay}{a}$. Unde fit $\text{M}m \cdot \text{N}m = \text{M}m \cdot \text{M}n = \frac{bbxx - aayy}{aa}$. Sed $aayy = bbxx - aabb$. Ergo $\text{M}m \cdot \text{N}m = \text{M}m \cdot \text{M}n = \frac{bbxx - bbxx + aabb}{aa} = \frac{aabb}{aa} = bb = \text{AD}^2$. Erit ergo ubique $\text{M}m \cdot \text{N}m = \text{M}m \cdot \text{M}n = \text{N}n \cdot \text{N}m = \text{N}n \cdot \text{M}n = bb = \text{AD}^2$.

§. 302.

Si ex hyperbolæ puncto quovis M ducatur recta Mr *ad ejusdem rami in quo punctum M ſumitur aſymtotam CI alteri aſymtotæ* Ci *parallela, itidemque ex vertice A eidem aſymtotæ* Ci *parallela AE, donec priori aſymtotæ in E occurrat; erunt rectangula ex ejusmodi parallelis in portiones aſymtotæ inter centrum* C *et parallelas iſtas interceptas inter ſe æqualia; ſive* Mr . Cr = *AE*. CE. Ducatur ex M aſymtotæ C*i* parallela M*r*, et erit $(\text{N}m + \text{N}n) : \text{C}n = \text{M}m :$ $\text{M}r$ ſive $\left(\frac{bx+ay}{a} + \frac{bx-ay}{a}\right) : \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} = \frac{bx-ay}{a} : \text{M}r$ id eſt $\frac{2bx}{a} : \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} = \frac{bx-ay}{a} :$ $\text{M}r$. Hinc $\text{M}r = \frac{bxx\sqrt{(aa+bb)} - ayx\sqrt{(aa+bb)}}{aa} : \frac{2bx}{a} = \frac{abxx\sqrt{(aa+bb)} - aayx\sqrt{(aa+bb)}}{2aabx}$ $= \frac{bx\sqrt{(aa+bb)} - ay\sqrt{(aa+bb)}}{2ba} = \frac{(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab}$.

Deinde

Deinde quoque $mn : Cm = mM : mr$ ſive $\frac{2bx}{a}$: $\frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} = \frac{bx-ay}{a} : mr$; ideo quoque $mr = \frac{(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab} = Mr$; Cr vero $= Cm - mr = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} - \frac{(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab} = \frac{2bx\sqrt{(aa+bb)} - (bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab}$. Porro $Mm : Mn = mr : Cr$, ſeu $\frac{bx-ay}{a} : \frac{bx+ay}{a} = \frac{(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab} : Cr$. Hinc $Cr = \frac{(bx+ay)(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2aab} : \frac{bx-ay}{a} = \frac{a(bx+ay)(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2aab\,(bx-ay)} = \frac{(bx+ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab} = Cm - mr$. Hinc concluditur $Mr \,.\, Cr = \frac{(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab} \,.\, \frac{(bx+ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab} = \frac{(bbxx-aayy)(aa+bb)}{4aabb} = \frac{(aa+bb)}{4}$ (ob $aayy = bbxx - aabb$). Ducta jam ex vertice A aſymtotæ Cd parallela AE, erit $DA : Dd = DE : DC$. Ergo ob $DA = \frac{1}{2}Dd$, erit $DE = \frac{1}{2}DC = EC$. Porro $DE : EA = DC : Cd$ Ergo ob $DC = Cd$, erit $DE = EA = EC = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}\sqrt{(aa+bb)}$, ideoque $AE \,.\, CE = \frac{1}{2}\sqrt{(aa+bb)} \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{(aa+bb)} = \frac{1}{4}(aa+bb) = Mr \,.\, Cr$.

§. 303.

§. 303.

Quodſi ergo abſciſſae CP $= x$, in una aſymtota a F.277.
centro ſumantur, et adplicatae PM $= y$ alteri aſymtotæ parallelæ ſtatuantur, erit $yx = \frac{aa + bb}{4}$, exiſtente AC $=$ BC $= a$, et AD $=$ A$d = b$. Seu ſi ponatur AE $=$ CE $= b$, erit $yx =$ AE . CE $= bb$ et $y = \frac{bb}{x}$. Ducta igitur per punctum M recta MF aſymtotæ Ci parallela, quæ occurret alteri aſymtotæ CR in puncto quodam F, erit parallelogrammum CMPF *hyperbolæ inſcriptum*, quod etiam *potentia hyperbolæ* vocatur, ubique conſtantis magnitudinis. Nam latera duorum quorumvis horum parallelogrammorum æquales comprehendunt angulos, et præterea in reciproca ſunt proportione. Magnitudo cujusvis abſoluta habetur, multiplicando productum laterum per ſinum anguli aſymtotici. Sic erit CPMF $=$ CP . PM . *ſin* RCI. Agatur jam per punctum curvæ M recta quæcunque QMNR, quæ parallela ſit ductae pro lubitu rectae GH, ac ponatur CQ $= t$ et QM $= u$; erit GH : CH $= u$: PQ, ideoque PQ $= \frac{CH}{GH} u$. Porro CH : CG $=$ PQ : PM, ideoque CH : CG $= \frac{CH}{GH} u$: PM et PM $= \frac{CG.CH.u}{CH.GH} = \frac{CG}{GH} u$, unde $y = \frac{CG}{GH} u$ et $x = t -$ PQ $= t - \frac{CH}{GH} u$; quibus valoribus ſubſtitutis erit $\frac{CG}{GH} u . (t - \frac{CH}{GH} u) = bb$, ſive $\frac{t.CG.u}{GH} - \frac{CG.CH}{GH^2} uu = bb$ et $\frac{CG}{GH} tu - \frac{CG.CH}{GH^2} uu - bb = 0$

 ſive

ſive $\frac{CG \, . \, CH}{GH^2} uu - \frac{CG}{GH} tu + bb = 0$

$$uu - \left(\frac{CG \, . \, tu}{GH} : \frac{CG \, . \, CH}{GH^2}\right) + bb : \frac{CG \, . \, CG}{GH^2} = 0$$

$$uu - \frac{GH^2 \, . \, CG}{GH \, . \, CG \, . \, CH} tu + \frac{GH^2}{CG \, . \, CH} bb = 0$$

$$uu - \frac{GH}{CH} tu + \frac{GH^2}{CG \, . \, CH} bb = 0.$$

Habebit ergo adplicata u duplicem valorem, nempe QM et QN, quarum ſumma erit $= \frac{GH}{CH} t =$ QR, et rectangulum QM . QN erit $= \frac{GH^2}{CH \, . \, CG} bb$.

§. 304.

Cum igitur ſit QM + QN = QR, erit QM = RN, et QN = RM, quare ſi puncta M et N conveniant, quo caſu recta QR curvam tangit, tum ea in ipſo puncto contactus biſecabitur. Scilicet ſi recta XY tangat hyperbolam, punctum contactus Z in medio rectae XY erit poſitum. Unde, ſi ex Z alteri aſymtotae parallela ducatur ZV, erit CV = VY, hincque ad quodvis hyperbolae punctum Z expedite tangens ducetur. Si enim ex dato puncto Z ducatur ZV alteri aſymtotae parallela et capiatur VY = CV; recta per Y et curvae punctum Z ducta, hyperbolam in hoc puncto Z tanget. Cum ergo ſit $CV \, . \, ZV = bb = \frac{aa + bb}{4}$, erit $CX \, . \, CY = 2CV \, . \, 2ZV = 4CV \, . \, ZV = \frac{4(aa+bb)}{4} = aa + bb = CD = CD \, . \, Cd$. Quocirca, ſi rectae DX et dY ducerentur, eae inter ſe forent parallelae (quia CX : CD = Cd : CY). Unde facillimus oritur modus quotcunque curvae tangentes ducendi.

§. 305.

Quoniam deinde eſt rectangulum QM . QN $= \frac{GH^2}{CH . CG} bb$, patet, ubicunque recta QR ipſi GH parallela ducatur, fore ſemper rectangulum QM . QN conſtantis magnitudinis. Erit ergo etiam QM . QN = QM . MR = QN . NR $= \frac{GH^2}{CH . CG} bb$. Quodſi ergo concipiatur ducta tangens ipſi QR parallela, quia ea intra aſymtotas in puncto contactus biſecabitur, et tangentis ſemiſſis vocetur $= q$; erit ſemper QM . QN = QM . MR = RN . RM = RN . NQ $= qq$, quæ eſt proprietas hyperbolarum intra aſymtotas relatarum maxime notatu digna.

§. 306.

Quoniam hyperbola ex duabus partibus diametraliter oppoſitis IA*i* et KB*k* conſtat, iſtæ proprietates non ſolum ad eas rectas intra aſymtotas ductas pertinent, quæ eandem curvæ partem in duabus punctis interſecant; ſed etiam ad eas, quæ ad partes oppoſitas pertingunt. Ducatur enim per punctum M recta M*qrn* ad partem oppoſitam, eique ducatur parallela G*b*. Sit C$q = t$, et qM $= u$, erit ob triangula CG*b* et PM*q* ſimilia G*b* : CG $= q$M : PM, ideo $y = \frac{CG}{Gb} u$. Porro qP $= x - t$, et CG : C*b* $= y : q$P, proinde $q\text{P} = \frac{Cb . CG . u}{Gb . CG} = \frac{Cb}{Gb} u$. Unde concluditur $x = Cq + q\text{P} = t + \frac{Cb}{Gb} u$. Cum autem ſit $yx = bb$, erit $\frac{CG}{Gb} ut + \frac{CG . Cb}{Gb^2} uu = bb$ vel $\frac{CG . Cb}{Gb^2} uu + \frac{CG}{Gb} ut - bb = 0$, vel quoque uu

 +

$+ \frac{Gb}{Cb} ut - \frac{Gb^2}{CG.Cb} = 0$. Applicata igitur u duplicem habet valorem qM et $-qn$, atque harum binarum radicum ſumma $qM - qn$ erit $= - \frac{Gb}{Cb} = - qr$, ideoque $qn - qM = qr$; unde concluditur $qM = qn - qr = rn$, et $qn = qM + qr = rM$. Praeterea eſt productum binarum radicum $- qM . qn = - \frac{Gb^2}{CG.Cb} bb$, ſeu

$$qM . qn = qM . rM = rn . qn = rn . rM = \frac{Gb^2}{CG.Cb} bb.$$

Quare hæc rectangula, quotcunque rectae Mn ipſi Gb parallelæ ducantur, perpetuo ejusdem erunt magnitudinis.

SECTIO XX.

DE

INTEGRATIONE DIFFERENTIALIVM VNIVS VARIABILIS ALGEBRAICARVM INCOMPLEXARVM ET VSV SERIERVM IN CALCVLI INTEGRALI.

§. 307.

Ex data ultima ratione differentiarum evaneſcentium duarum quantitatum variabilium, quarum una ab altera pendet, invenire æquationem mutuam earum variabilium a ſe invicem dependentium exprimentem, eſt *integrare* eam functionem, quæ ultimam differentiarum rationem exprimit. Si ipſæ variabiles litteris x et y ſint denotatæ, ultima

ultima ratio differentiarum Δy et Δx eam habet formam $\frac{dy}{dx} = P$ exiſtente P functione vel unius variabilis x vel duarum variabilium x et y. Priori caſu æquatio differentialis $\frac{dy}{dx} = P$ vocari poſſet *explicita*, poſteriori *implicita*. Integratio æquationum differentialium explicitarum primo explicanda eſt: de implicitis, quæ vulgo ſimpliciter *aequationes differentiales* vocantur, poſtea ſermo erit. Quodſi vero data ſit æquatio differentialis explicita formæ $\frac{dy}{dx} = P$, exiſtente P functione ſolius variabilis x; ſemper dabitur æquatio quædam formæ $y =$ X, exiſtente X functione unius variabilis x, ex qua per differentiationem prior æquatio $\frac{dy}{dx} = P$ elicitur, atque tum ipſa aequatio $y = X$ iſta eſt, quæ per calculum integralem quæritur. Quia æquatio $\frac{dy}{dx} = P$ vulgo ſic ſcribi $dy = Pdx$ ac Pdx ipſius X differentiale vocari ſolet; viciſſim quoque functio X, ex qua Pdx per differentiationem oritur, ipſius Pdx integrale dicitur. Atque tum phraſis: *integrare differentiale propoſitum*, ſic explicatur: dati differentialis integrale invenire. Angli, qui differentialia fluxiones nominant, integralia vocant quantitates fluentes; eorumque loquendi more datæ fluxionis fluentem invenire idem eſt, ac dati differentialis integrale quaerere.

§. 308.

Uti differentialia charactere d deſignantur, ita ad integralia indicanda littera $\int$ recepta eſt, quæ ergo differentialibus præfixa eas notabit quantitates, quarum ſunt differentialia. Sic exiſtente $y = X$, atque $dy =$

Pdx;

P*dx*; ſi ſcribatur $\int dy = \int Pdx$, hoc idem erit ac $y = X$, quia $\int dy = y$ et $\int Pdx = X$. Quemadmodum autem ſignum differentiationis *d* ſolam quantitatem immediate ſequentem afficit, niſi puncto interpoſito ejus vis ad totam expreſſionem ſequentem extendatur; ita e contrario ſignum integrationis $\int$ ſemper totam expreſſionem, cui præfixum eſt, complectitur. Ita $\int xdx\,(aa-xx)^n$ denotat eam functionem, cujus differentiale eſt $xdx\,(aa-xx)^n$. Quodſi itaque velimus productum duorum integralium ſcilicet $\int Pdx$ atque $\int Qdx$ exprimere, id hoc modo $\int Pdx \int Qdx$ perperam fiet, intelligeretur enim integrale quantitatis $Pdx \int Qdx$. Hanc ob cauſſam iſta ambiguitas iterum puncto interpoſito tolli ſolet, idque productum ſic exprimi $\int Pdx \,.\, \int Qdx$. Propoſita jam formula differentiali $dy = Pdx$, cum P debeat eſſe functio ipſius *x*, poteſt eadem eſſe vel algèbraica, vel tranſcendens. Sed poſterior caſus huc nondum ſpectat. Supponimus in hac tractatione, P eſſe functionem unius variabilis *x* algebraicam, atque ſub hac hypotheſi quærimus ipſius P*dx* integrale.

§. 309.

Functio algebraica incomplexa unius variabilis *x* eſt productum ex quantitate conſtante in poteſtatem quandam variabilis *x* exponentis cujuscunque vel integri vel fracti, poſitivi vel negativi. Reliquæ functiones *complexæ* vocantur. Integratio differentialium algebraicarum unius variabilis *x* incomplexarum nulla prorſus laborat difficultate. Dico enim ſi ſit $dy = ax^n\,dx$; fore

$$y = \int ax^n\,dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}.$$

Id eſt, *integrale differentialis algebraici unius variabilis incomplexi cujuscunque invenitur dividendo per* dx *augendo exponentem variabilis unitate, atque quod prodit, per hunc exponentem unitate auctum diviſo.* Atque hæc eſt regula fundamentalis totius calculi integralis differentialium unius variabilis algebraicarum. Demonſtratio hujus regulæ in promtu eſt. Habemus

bemus enim per præcedentia $d. \frac{ax^{n+1}}{n+1} = ax^n dx$, proinde $\frac{ax^{n+1}}{n+1} = \int ax^n\, dx$. Pro n vero ſubſtitui poteſt numerus quicunque integer vel fractus, poſitivus vel negativus. Parum igitur difficultatis habet integratio, ſi differentiale propoſitum ſequentem habeat formam $(ax^e + bx^k + cx^m + fx^n + \text{etc.})\, dx$, vel $ax^e\, dx + bx^k\, dx + cx^m\, dx + fx^n\, dx +$ etc. Eſt enim hujus formulæ integrale $\frac{ax^{e+1}}{e+1} + \frac{bx^{k+1}}{k+1} + \frac{cx^{m+1}}{m+1} + \frac{fx^{n+1}}{n+1} +$ etc. quoscunque numeros denotent litteræ e, k, m, n, etc. poſitivos vel negativos, integros, vel fractos, Quodſi ejusmodi formula differentialis diviſa fuerit per conſtantem cujuscunque formæ, quæ ſit $= g$, v. g. ſi proponatur formula $\frac{ax^e + bx^k + cx^m + fx^n + \text{etc}}{g}$ iterum tantum opus eſt, ut quælibet partium ſeorſim integretur. Quia enim hæc formula eadem eſt cum ſequente $\frac{a}{g}x^e + \frac{b}{g}x^k + \frac{c}{g}x^m + \frac{f}{g}x^n +$ etc. erit ipſius integrale $= \frac{ax^{e+1}}{g(e+1)} + \frac{bx^{k+1}}{g(k+1)} + \frac{cx^{m+1}}{g(m+1)} + \frac{fx^{n+1}}{g(n+1)} +$ etc. Demonſtratione alia non opus eſt, niſi quod facta differentiatione integralis inventi iterum habeatur differentiale propoſitum.

§. 310.

Quando erit y functio ipſius x, atque hujus functionis differentiale eſt Pdx, exiſtente P pariter functione ipſius x, etiam functionis $y + C$, denotante C quantitatem

titatem conſtantem quamcunque, differentiale eſt Pdx. Proinde ſi differentiale hujus formae Pdx proponatur, ejus integrale erit $y + C$, quae conſtans eſſe poteſt quaecunque, quin et o æquata. Integratione igitur peracta ad integrale inventum addenda eſt quantitas conſtans, quae ex conditionibus problematis propoſiti, quod calculi integralis ope ſolvimus, determinanda eſt. Ex natura enim functionum conſtat, quod determinato valore variabilis x, functio hujus variabilis $y + C$ vel unum vel ſaltem aliquos obtineat valores conſtantes. Plerumque ex conditionibus problematis propoſiti cognoſci poteſt quantitas conſtans b, cui integrale quæſitum æquale eſt, quando variabilis x determinatum quendam habet valorem a. Quodſi hoc accidat, in integrali invento $y + C$ pro x ſubſtitui debet iſta conſtans a, cui ſecundum problema propoſitum reſpondet valor integralis $y + C = b$, ex qua æquatione conſtans C determinatur. Sit enim valor, quem functio y induit $= A$, ſi in eadem loco x ſcribatur a, erit ex hypotheſi $A + C = b$, proinde $C = b - A$. Quando vero ex conditionibus problematis non innoteſcit valor integralis, quem habet, ſi pro x conſtans a pariter ex conditionibus problematis eruenda ſubſtituatur; conſtans C manet indeterminata.

Sic invenitur $\int \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{3} z^{\frac{3}{2}}$. Atque proinde, ſi fuerit $z = aax + bxx$, ut ſit $dz = aadx + 2bxdx$, habetur $\int \frac{1}{2}(aadx + 2bxdx) \times (aax + bxx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(aax + bxx)^{\frac{3}{2}}$. Huic integrali addenda eſt conſtans indeterminata C, ita ut integrale completum ſit $\frac{1}{3}(aax + bxx)^{\frac{3}{2}} + C$. Ponamus ex conditionibus problematis propoſiti innoteſcere, quod integrale induat valorem g, ſi x habeat valorem f, erit ex his $\frac{1}{3}(aaf + bff)^{\frac{3}{2}} + C = g$, ex qua æquatione concludimus $C = g - \frac{1}{3}(aaf + bff)^{\frac{3}{2}}$, proinde ſub hac hypotheſi eſt $\int \frac{1}{2}(aadx + 2bxdx) \times (aax + bxx)^{\frac{1}{2}}$ =

$= \frac{1}{3}(aax + bxx)^{\frac{3}{2}} + g - \frac{1}{3}(aaf + bff)^{\frac{3}{2}}$. Quando ſecundum problematis conditiones valori $x = f$, reſpondet valor integralis $= 0$, ſit $\frac{1}{3}(aaf + bff)^{\frac{3}{2}} + C = 0$, proinde eſt conſtans addenda $C = -\frac{1}{3}(aaf - bff)^{\frac{3}{2}}$. Quodſi vero ſecundum problematis conditiones valori $x = 0$ reſpondeat valor integralis $= g$, erit $C = g$. Si denique valori $x = 0$ reſpondeat valor integralis $= 0$ erit in hoc caſu et ſub hac hypotheſi conſtans $C = 0$.

§. 311.

Cum formulæ differentiales unius variabilis, quarum integralia hic quærimus, ſequentem habeant formam $dy = Pdx$, exiſtente P functione ipſius x algebraica; atque ſi hæc functio P ſit rationalis integra, vel quoque per modum rationalis integræ expreſſa, integratio nulla laboret difficultate: omne negotium eo redit, ut functionum integrarum irrationalium, pariter ac functionum fractarum, tam rationalium, quam irrationalium integralia inveniendi methodos explicemus univerſales. Omnis functio rationalis integra unius variabilis z ſequentem habere poteſt formam $a + bz + czz + ez^3 + fz^4 +$ etc, quæ etiam, quando eſt $z = x^n$ ſic exprimi poteſt $a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n} +$ etc. Atque ſi ea denuo per x^r multiplicetur, forma ipſius generaliſſima hæc erit $ax^r + bx^{r+n} + cx^{r+2n} + ex^{r+3n} + fx^{r+4n} +$ etc. Denotante igitur p numero fracto quocunque poſitivo, erit $(ax^r + bx^{r+n} + cx^{r+2n} + ex^{r+3n}\ fx^{r+4n} + \text{etc.})^p$ vel $ax^m\ (a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n} + \text{etc.})^p$ forma functionis integrae irrationalis generaliſſima, ſcripto m loco rp, et g denotante conſtantem quamcunque. Omnis igitur functio, quæ conſtat ex factore irrationali in integrum rationalem factorem multiplicato, multiplicatione actu inſtituta in partes hujus formae reſolvetur. Quando p ſimul denotare ponitur numerum fractum negativum quemcunque, ſub eadem forma quoque compre-

prehenduntur functiones fractæ irrationales, ita ut omnes functiones irrationales fractae numeratorem habentes integrum in partes hujus formae reſolvi queant. Quin poſito p numero integro negativo, omnes quoque functiones fractæ rationales, quarum denominatores ſunt poteſtates exponentis integri cujuscunque, in partes hujus formæ facile reſolvuntur. Formulæ igitur differentialis, quæ ſequitur $\frac{dy}{dx} = (\alpha x^q + \beta x^r + \gamma x^s + \delta x^t$ + etc.) $(a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} +$ etc.$)^p$, vel $dy = (\alpha x^q + \beta x^r + \gamma x^s + \delta x^t +$ etc.) $dx\ (a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} +$ etc.$)^p$ integrale per partes habetur, multiplicatione ante actu inſtituta, dummodo hujus formulæ $gx^m\,dx\ (a + bx^n + cx^{2n} +$ etc.$)^p$ integrale in poteſtate ſit.

§. 312.

Variæ ad hujus formulæ integrale inveniendum excogitatæ ſunt methodi, quarum una eaque maxime generalis ea eſt, qua functio, quæ eſt ſub vinculo exponentis p, convertitur in ſeriem ſecundum §. 250. 253, et ſeries inventa per factorem extra vinculum multiplicatur. Hoc enim facto habebitur ſeries, cujus ſinguli termini ſunt differentialia incomplexa formæ $ax^m\,dx$; ideo integra ſeries per partes integrabitur ſecundum præcepta §. 309. Quando p eſt numerus integer poſitivus, hæc methodus merito commendanda eſt, quia tum ipſa ſeries, in quam functio ſub vinculo exponentis reſolvitur, finita eſt, atque proinde quoque integrale, quod hac methodo quæritur, ſerie finita invenietur expreſſum. Sic si quærendum ſit integrale formulæ $dx\,(a + bx)^2$, erit $(a + bx)^2 = aa + 2abx + bbxx$, et ideo $\int dx\,(a + bx)^2 = \int(aadx + 2abxdx + bbxxdx) = aax + abxx + \frac{bb}{3}x^3$.

Quando autem numerus p eſt integer negativus vel fractus quicunque, ſeries, in quam functio convertitur, excurr

in infinitum. Proinde integrale completum hac methodo inveniri nequit, ſed tantum per approximationem. Hac itaque methodo utendum non eſt, ſi alia via perveniri poteſt ad ſeriem, quæſitum integrale terminis finitis exprimentem. Ipſae vero methodi, quibus id præſtari poteſt, hic nondum explicari poſſunt; ſed peculiaris tractatio huic negotio eſt reſervanda.

§. 313.

Rectificare curvam eſt aſſignare rationem arcus F. 278.
curvæ propoſitæ ad rectam aliquam pro unitate ſumtam. Si data ſit curva Mm ad axem Ap et initium abſciſſarum A relata, cujus natura exprimitur æquatione inter coordinatas orthogonales $AP = x$ et $PM = y$; generalis methodus inveniendi longitudinem arcus CM inter duo data puncta C et M intercepti ſequentibus nititur ratiociniis. A datis punctis C et M ad axem curvae cadant adplicatae normales CB et MP, erit arcus CM functio abſciſſæ $AP = x$, quia magnitudo hujus arcus a magnitudine ipſius x pendet. Sit itaque arcus $CM = u$, exiſtente u functione ipſius x. Creſcat AP incremento $Pp = \Delta x$, atque arcus CM creſcet incremento $Mm = \Delta u$, tumque ſimul $PM = y$ incremento $Rm = \Delta y$, quod incrementum habetur ducta MR axi parallela. Erunt vero Δu et Δy functiones ipſius Δx, ſi x et y nunc maneant conſtantes. Cognito itaque limite rationis $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, ita ut ſit $\frac{du}{dx} = X$, exiſtente X functione ipſius x, habebitur arcus $u = \int X dx$ per calculum integralem. Sed ultima ratio $\frac{du}{dx}$ invenitur ſic ratiocinando. Ducta recta Mm, quae eſt chorda arcus curvæ Mm, erit recta $Mm = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$ functio ipſius Δx. Decreſcente jam Pp ſive Δx manentibus $AP = x$ et $PM = y$ conſtantibus, cum hac

variabili Δx ejus functiones Δu, Δy, $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, ſimul decreſcunt; atque variabili Δx evaneſcente ejus functiones Δu, Δy, $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, ſimul evaneſcunt. Ratio vero, quacum variabiles Δu et chorda $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$ evaneſcunt, eſt ratio æqualitatis, ita ut ſit $\frac{du}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = 1$, vel $\frac{du}{dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = 1$, et $\frac{du}{dx} = \sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Atque haec eſt ultima ratio quæſita, quia eſt $\frac{dy^2}{dx^2}$ functio variabilis x, ex æquatione pro curva data per calculum differenrialem quærenda. Eſt itaque generaliter $du = \int dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} + C$, ſeu uti vulgo ſcribi ſolet $du = \int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C$.

§. 314.

F. 279. Sit curva AMB circulus, cujus diameter eſt AB, et diametro AB in centro C perpendicularis ſit CD, datur punctum M et quaeritur arcus DM. Quodſi ex puncto M ad diametrum AB cadat perpendicularis MP, ſitque $CP = x$, $PM = y$, $CM = a$, erit æquatio pro circulo $yy = aa - xx$. Proinde $2y \frac{dy}{dx} = -2x$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, atque $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{xx}{aa-xx}$, $1 + \frac{dy^2}{dx^2} = 1 + \frac{xx}{aa-xx} = \frac{aa-xx+xx}{aa-xx} = \frac{aa}{aa-xx}$. Si itaque DM ſit $= u$, erit $\frac{du}{dx} = \frac{a}{\sqrt{(aa-xx)}}$, vel $du = \frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, et $u = \int\frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$. Abſciſſa CP eſt

eſt $= MN =$ ſinui arcus $MD = u$. Proinde formula $du = \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ exprimit differentiale arcus circularis cujus ſinus x eſt datus. Praeterea eſt $PM = \sqrt{(aa - xx)}$ $=$ coſinui arcus DM. Ideo *differentiale arcus, cujus ſinus proponitur, aequale eſt producto ex radio in differentiale ſinus per coſinum diviſum.* Arcus, cujus ſinus eſt x, in poſterum ſic exprimetur, A *ſin.* x. Atque pari ratione arcus, cujus coſinus eſt x, ita poteſt exprimi A *cos.* x. Arcus etiam, cujus tangens, vel cotangens, vel ſecans, vel coſecans, vel ſinus verſus eſt x, ſignis analyticis ſic exprimetur, A *tang.* x, vel A *cot.* x, vel A *ſec.* x, vel A *coſec.* x, vel A *ſv.* x, quae expreſſiones omnes erunt functiones ipſius x tranſcendentes. (§. 68.) Si itaque ſit $u =$ A *ſin.* x, atque radius, quo arcus iſte deſcriptus eſt, ſit a, erit $du = \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$.

§. 315.

Quodſi jam ſit $u =$ A *cos.* x, erit ejusdem arcus ſinus $= \sqrt{(aa - xx)}$, et proinde $y =$ A *ſin* $\sqrt{(aa - xx)}$. Sit $\sqrt{(aa - xx)} = p$, erit $y =$ A *ſin* p, atque $du = \frac{adp}{\sqrt{(aa - pp)}}$. Praeterea $dp = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, et $\sqrt{(aa - pp)} = x$; ex quibus habetur $du = \frac{-adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$. Unde regula: *Differentiale arcus, cujus coſinus proponitur aequale eſt producto radii in differentiale coſinus negative ſumtum per ſinum diviſum.*

Si fuerit $u =$ A *tang.* x, erit ſinus illius arcus, cujus tangens proponitur $= \frac{ax}{\sqrt{(aa + xx)}}$, et coſinus $= \frac{aa}{\sqrt{(aa + xx)}}$

$\frac{aa}{\surd(aa+xx)}$ proinde $y = A\,ſin\,\frac{ax}{\surd(aa+xx)}$. Sit $\frac{ax}{\surd(aa+xx)} = p$, erit $u = A\,ſin\,p$, $\surd(aa-pp) = \frac{aa}{\surd(aa+xx)}$, et $du = \frac{adp}{\surd(aa-pp)}$. Præterea eſt $dp = \frac{a^3dx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$, et proinde $du = \frac{a^4dx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$: $\frac{aa}{\surd(aa+xx)} = \frac{aadx}{(aa+xx)}$. Ideo *differentiale arcus, cujus tangens proponitur, æquale eſt facto ex quadrato radii in differentiale tangentis per quadratum ſecantis diviſum.*

Simili modo, ſi proponatur arcus, cujus cotangens eſt datus, ut ſit $u = A\,cot\,x$, quia ejusdem arcus tangens eſt $\frac{aa}{x}$, poſito $\frac{aa}{x} = p$, erit $u = A\,tang.\,p$, et $du = \frac{aadp}{aa+pp}$. Sed $dp = \frac{-aadx}{xx}$, quo ſubſtituto habetur $du = \frac{-a^4dx}{aaxx+a^4} = \frac{-aadx}{aa+xx}$, *quod eſt productum ex quadrato radii in differentiale cotangentis negative ſumtum per quadratum coſecantis diviſum.*

Porro ſi proponatur $u = A\,ſec.\,x$, quia eſt $u = A\,cos\,\frac{aa}{x}$, fiet $du = \frac{aadx}{x\surd(xx-aa)}$. Atque ſi ſit $u = A\,coſec.\,x$; erit $u = A\,ſin\,\frac{aa}{x}$, ideoque $du = \frac{-aadx}{x\surd(xx-aa)}$. Si denique fuerit $u = A\,ſv\,x$, quia eſt $u = A\,cos\,(a-x)$ ejusdemque arcus ſinus eſt $\surd(2ax-xx)$, fiet $du = \frac{adx}{\surd(2ax-xx)}$. Quan-

Quanquam igitur arcus u, cujus ſinus vel coſinus, vel tangens, vel cotangens, vel ſecans, vel coſecans, vel ſinus verſus datur, eſt functio tranſcendens; tamen ejus differentiale, ſeu potius ultima ratio $\frac{du}{dx}$ eſt functio algebraica. Ac propterea quoque, ſi capiantur differentialia ſecunda et altiora, erunt $\frac{ddu}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, $\frac{d^4u}{dx^4}$, etc, functiones algebraicae.

§. 316.

Rectificabitur itaque arcus circuli uniuscujusque formularum differentialium inventarum ope ac eum in finem quamcunque eligere licet. Eligi ſolet plerumque differentiale arcus per tangentem dati. Sit itaque arcus DM tertia pars quadrantis, ejusque tangens DT $= x$, quaerenda eſt longitudo arcus DM. Erit DM $= \int \frac{aadx}{aa+xx}$. Integrale hoc non habetur, niſi ſerierum ope. Erit vero $\frac{aadx}{aa+xx} = dx - \frac{xxdx}{aa} + \frac{x^4dx}{a^4} - \frac{x^6dx}{a^6} + \frac{x^8dx}{a^8} - \frac{x^{10}dx}{a^{10}} +$ etc. Proinde $\int \frac{aadx}{aa+xx} = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} - \frac{x^{11}}{11a^{10}}$ $+$ etc. $=$ DM. Poſito itaque $a = 1$, erit MN $= \frac{1}{2}$, CN $= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, et CN : NM $=$ CD : DT, id eſt $\frac{1}{2}\sqrt{3} : \frac{1}{2} = 1 : x = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Arcus itaque DM $= \sqrt{\frac{1}{3}}\,(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} -$ etc), cujus ſextuplum dabit ſemiperipheriam $= 2\sqrt{3} \times (1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} -$ etc), vel $\sqrt{12} \times (1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{3 \times 3 \times 5} -$

$-\frac{1}{3\times3\times3\times7}+\frac{1}{3\times3\times3\times3\times9}$ — etc, cui ſeriei ſuperſtruitur ſequens calculus, in cujus columna A continentur primo $\sqrt{12}=3.4641$ etc; deinde quotiens oriundus ex illius diviſione per 3, nec non ille, qui prodit ex quotientis inventi nova diviſione per 3, et ſic continuo. In columna B deſcribuntur ex diviſione præcedentium per numeros impares juxta loca alterna inventi quotientes, qui abſolvunt partem ſeriei poſitivam. In columna C vero ponuntur ſimiles quotientes ex reliquis columnae A terminis impares adſcriptos diviſis geniti, et conſtituunt partem ſeriei negativam

	A	B	C
1	3.464101615138(		$=\sqrt{12}$
3	1.154700538379	3.464101615138(	
5	384900179460(		0.384900179460
7	128300059820	769800035892(	
9	42766686607(		18328579974
11	14255562202	4751854072(	
13	4751254067(		1295960200
15	1583951356	365527236(	
17	527983785(		105596757
19	175994595	31057870(	
21	58664865(		9262873
23	19554955	2793565(	
25	6518318(		850215
27	2172773	260733(	
29	724258(		80473
31	241419	24974(	
33	80473(		7788
35	26824	2438(	
37	8941(		766
39	2980	242(	
41	993(		76
43	331	24(	
45	110(		8
47	37	2(	
			1
		+ 3.546233172181	0.404640518591
		− 0.404640518591	
		+ 3.141592653590	

Hoc

Hoc modo ulterius evolvendo γ12 invenitur, ſi radius ſit 1, fore ſemiperipheriam, atque ſi diameter ſit 1, fore peripheriam integram 3, 1415 9265 3589 7932 3846 2643 3832 7950 2884 1971 6936 9375 1058 2097 4944 5923 0751 6405 etc.

§. 317.

Data vero hac ratione radii ad ſemiperipheriam ſimul datur longitudo arcus cujuscunque z, cujus ratio ad ſemiperipheriam π datur, ſeu quod idem eſt, qui per gradus et minuta exprimitur, quocunque deſcriptus ſit radio $= r$. Habetur enim longitudo arcus, qui ad ſemiperipheriam habet rationem datam pro radio $= 1$ inferendo $\pi : z$, id eſt 180° ad numerum graduum et minutorum quem z continet, $= 3.141$ etc : $\frac{z \times 3.141 \text{ etc}}{\pi}$, qui numerus ſit $= N$; erit præterea $1 : r = N : N \times r =$ longitudini arcus quæſiti (§. 225. *Geom. Elem.*). Cæterum id notari meretur, quod ſeries inventa arcum DM ex ſua tangente exprimens ea gaudeat proprietate, ut quilibet terminus conſequens longe minor ſit antecedente. Atque hæc cauſſa eſt, quod priores termini valorem arcus quæſiti ſatis præbeant exactum, cum termini neglecti valde ſint parvi. Vocantur ejusmodi *ſeries convergentes*: ii vero, quorum termini conſequentes excedunt antecedentes, dici ſolent *ſeries divergentes*. Quia ultimarum ſumma nunquam veræ proxima inveniri poteſt, in negotio rectificationum, et huic ſimilibus, quando numerus quæſitus per ſeriem finitam exhiberi nequit, ſeries divergentes vitandae ſunt. Tum enim eo majoris uſus eſt ſeries, quo magis termini ipſius convergunt. Hoc itaque ſimul notari meretur in negotio quadraturarum mox explicando.

§. 318.

Angulum raro ingredi calculum algebraicum, ſupra §. 36. jam monitum fuit. Ejus loco plerunque ratio

tio ſinus, vel coſinus, vel tangentis, vel cotangentis, vel hujus generis rectae cujusvis ad radium data eſſe ſupponitur. Poteſt vero loco illius rationis quoque ratio arcus inter crura anguli dati radio quocunque deſcripti ad radium anguli loco adhiberi, quia et hac ratione data datus eſt angulus. Duo nimirum anguli W et w ſunt in ratione compoſita ex directa arcuum A : a, et inverſa radiorum r : R (§. 220. *Cor.* VI. *Geom. Elem.*) ita ut ſit W:

$w = \frac{A}{R} : \frac{a}{r}$. Data itaque ratione $\frac{A}{R}$ datur angulus W, ita ut poni poſſit W $= \frac{A}{R}$, et $w = \frac{a}{r}$, quae aequatio ſic explicanda eſt. Radio $= 1$ inter crura anguli w deſcribatur arcus α, erit $1 : r = \alpha : a$ (§. 225. *Cor. Geom. Elem.*) proinde $\frac{a}{r} = \alpha$. Data igitur ratione $\frac{a}{r}$ datur longitudo arcus α inter anguli w crura radio $= 1$ deſcripti, et proinde ratio hujus arcus ad ſemiperipheriam, atque ſimul ratio anguli w ad duos angulos rectos. Numerus itaque graduum anguli w habetur inferendo 3,14 etc : $\alpha = 180° : \frac{\alpha . 180°}{314 \text{etc.}}$ = numero graduum, quem angulus w continet. Quia igitur $w = \frac{a}{r}$; arcus ex angulo et radio ſic exprimetur $a = wr$, et radius erit $r = \frac{a}{w}$.

§. 319.

Quadrare figuram planam generatim eſt aſſignare rationem figurae planae propoſitae ad quadratum aliquod pro unitate ſumtum. *Quadrare lineam quandam curvam* idem eſt, ac quadrare figuram planam, quae vel integra illa curva, ſi in ſe ipſam redeat, vel arcu illius curvae

vae et lineis rectis poſitione datis terminatur. Si data F.278.
ſit curva AM ad axem Ap et initium abſciſſarum A relata, cujus natura exprimitur aequatione inter coordinatas orthogonales AP $= x$ et PM $= y$; generalis methodus, inveniendi quadraturam areae BPMC arcu CM, applicatis PM, BC, et portione BP abſciſſae AP terminatæ, ſequentibus nititur ratiociniis.

§. 320.

Area BPMC eſt functio variabilis AP $= x$, quia ejus magnitudo pendet a valore ipſius x. Sit itaque hæc area $= s$ erit s functio ipſius x, quæ ſi x augeatur incremento P$p = \Delta x$ pariter augetur incremento PMmp $= \Delta s$. Cognito itaque limite rationis $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, ſive $\frac{ds}{dx} = X$, ita ut ſit X ipſius x functio, habetur area $s = \int X dx$ per calculum integralem atque functione ipſius x expreſſa. Ultima vero ratio $\frac{ds}{dx}$ invenitur, ſic ratiocinando. Sumtis AP et PM pro conſtantibus, fiant P$p = \Delta x$, ipſiusque Δx functio R$m = \Delta y$ variabiles, erit area rectanguli M$p = y\Delta x$ functio variabilis Δx, quae decreſcit decreſcente Δx, atque una cum Δx ſimul evaneſcit. Praeterea eſt area PMmp pariter talis ipſius Δx functio, quae decreſcit decreſcente Δx et evaneſcit una cum Δx. Hinc decreſcente Δx, areæ Mp et PMmp ſimul decreſcunt. Decreſcentibus vero hoc modo ipſis Mp et PMmp earum differentia MmR ſimul decreſcit, atque evaneſcente Δx ſimul evaneſcit. Ideo ratio $\frac{\Delta s}{y\Delta x}$ ad rationem æqualitatis continuo tendit, ita ut evaneſcente Δx ſit ultima ratio $\frac{ds}{ydx} = 1$, et proinde ul-

tima ratio $\frac{ds}{dx} = y$; quæ ea eſt, quam quaerimus. Variabilis y ex æquatione pro curva data habetur per x et conſtantes definita, qua igitur functione loco y ſubſtituta, erit $s = \int y dx + C$.

§. 321.

F. 280. Ex æquatione inter coordinatas orthogonales $AP = x$ et $PM = y$ pro parabola AM, cujus vertex eſt A, latus transverſum AS et parameter p, quae erat $yy = px$ fluit $y = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$. Proinde eſt area $APMQ = \int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$

$$= \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}\, p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\, xp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}xy.$$

Conſtans nulla adjicitur, quia poſito $x = 0$, eſt $APMQ = 0$. Cum ſit rectangulum $APMN = xy$, erit trilineum $AQMN = APMN - APMQ = xy - \frac{2}{3}xy = \frac{1}{3}xy$. Præterea eſt ſegmentum $AQM = APMQ - APM = \frac{2}{3}xy - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{6}xy$. Adeo brevi via calculi integralis ope invenitur parabolae quadratura ab Archimede jam inventa et ſatis prolixe demonſtrata.

§. 322.

F. 281. Circuli quadratura jam habetur, inventa ejus rectificatione (§. 216.). Quae cum tantum ſit approximatoria; ipſa ejus quadratura inde pendens tantum approximatoria erit. Neque etiam ope formulæ $\int y dx$ circuli quadratura invenitur exacta. Idem etiam de reliquis coni ſectionibus dicendum eſt. Sit curva BDA ellipſis, cujus latus transverſum eſt $BA = 2a$, ſemilatus conjugatum $DC = b$, centrum C; erit æquatio pro curva inter coordinatas orthogonales $CP = x$, $PM = y$ iſta $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$; hinc $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$, area $CPMD = \int \frac{b}{a}\, dx \sqrt{(aa - xx)}$, quod integrale

non

non habetur, niſi $\sqrt{(aa - xx)}$ convertatur in ſeriem. Hoc autem ſacto fit $\int ydx = \int bdx - \frac{bx^2dx}{2a^2} - \frac{bx^4dx}{8a^4} - \frac{bx^6dx}{16a^6} - \frac{5bx^8dx}{12a^8}$ etc. $= bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ etc. Poſito nunc $x = a$, ſeries $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab$ etc, exprimit aream quartae partis CAD ellipſis integræ, quæ itaque per 4 multiplicata dabit aream ellipſis integræ. Fit hæc multiplicatio, ſi loco a ubique $2a$ et $2b$ loco b ſcribatur. Eſt vero $2a = AB$ et $2b = 2DC$. Ideo ipſa ſeries inventa exprimit aream ellipſis integræ, ſi a et b integros ellipſis axes denotent.

§. 323.

Poſito $b = a$, æquatio $yy = aa - xx$ eſt pro circulo BNA, et proinde ſeries $aa - \frac{1}{6}aa - \frac{1}{40}aa - \frac{1}{112}aa$ etc, exprimit aream quadrantis circuli, ſi a ſit radius, integri vero circuli aream, ſi a ſit diameter. *Eſt itaque area ellipſis ad aream circuli, cujus radius ſemilateri ellipſis transverſo æqualis eſt*, ut $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab$ — etc, ad $aa - \frac{1}{6}aa - \frac{1}{40}aa$ — etc, id eſt ut ab ad aa, vel ut b ad a ideoque, *ut axis conjugatus ad axem transverſum.* In eadem quoque ratione eſt area CPMD ad aream CPNF, quia eſt $CPMD = bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4}$ etc, atque $CPNF = ax - \frac{ax^3}{6aa} - \frac{ax^5}{40a^4}$ etc, et proinde etiam area PMA ad aream PNA. Ellipſis igitur quadratura pendet a circuli quadratura et viciſſim. Cæterum ſequentia ex his fluunt corollaria.

Ellipſis æqualis eſt circulo, cujus diameter eſt media proportionalis inter duos ellipſis axes principales. Si enim δ fuerit circuli diameter, axes ellipſis a et b, præterea a : δ =

$\partial = \delta : b$, erit $ab = \partial\partial$. Ideo area circuli $\partial\delta - \frac{1}{6}\partial\partial - \frac{1}{40}\partial\delta$ etc. $= ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab$ etc.

Ellipſes ſunt inter ſe in ratione compoſita ex rationibus axium transverſorum et axium conjugatorum. Si enim axes unius ſint a et b, alterius f et g; erit area prioris $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab -$ etc, et poſterioris $fg - \frac{1}{6}fg - \frac{1}{40}fg -$ etc, quae ſeries ſunt ut $ab : fg$.

Si radius circuli aequalis ſit ſemiaxi ellipſis conjugato, circulus eſt ad ellipſin ut axis minor ad majorem. Hoc permutando coordinatas x et y facili oſtenditur negotio.

Si ex puncto quocunque H unius axis ellipſeos, qui ſimul eſt diameter alicujus circuli ad puncta extrema M et N ordinatae communis PMN ducantur rectae HM, HN; *area ſectoris circuli ANH eſt ad aream ſectoris elliptici AMH, ut axis, quae eſt circuli diameter, quae ſit a ad alterum axem ellipſis, quae ſit* b. Eſt enim APN : APM $= a : b$, et PHN : PHM $=$ PN : PM $=$ CF : CD $= a : b$, quod ultimam ſic patet. Eſt $PN^2 : CF^2 = AP \times BP : AC \times CB$ et $PM^2 : CD^2 = AP \times BP : AC \times CB$. Proinde $PN^2 : CF^2 = PM^2 : CD^2$, et PN : CF $=$ PM : CD vel PN : PM $=$ CF : CD. Eſt itaque APN $+$ PHN : APM $+$ PHM, id eſt, ANH : AMH $= a : b$.

§. 324.

F. 282. Aequatio pro hyperbola AM eſt $yy = \frac{bb}{aa}(-aa + xx)$, quando $CA = a$, $CL = b\sqrt{-1}$, $CP = x$, $PM = y$. Permutentur coordinatae, et vocetur $CQ = x$, et $QM = y$, atque aequatio ita mutabitur $xx = \frac{bb}{aa}(-aa + yy)$, ex qua fit $xx = -bb + \frac{bbyy}{aa}$, $aaxx = -aabb + bbyy$, $yy - aa = \frac{aaxx}{bb}$, $yy = +aa + \frac{aaxx}{bb}$, $yy = \frac{aa}{bb}$ (bb +

$(bb + xx)$. Quodſi igitur jam vocetur CA $= b$, et CL $= a$; erit $yy = \frac{bb}{aa}(aa + xx)$ æquatio pro hyperbola inter coordinatas orthogonales abſciſſis in axe conjugato a centro computatis, ex qua ſit $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa+xx)}$, et $ydx = \frac{b}{a}dx\,(aa + xx)^{\frac{1}{2}}$, proinde area CQMA $=$ $\int ydx = \int \frac{b}{a}dx\,(aa + xx)^{\frac{1}{2}}$. Eſt vero $(aa + xx)^{\frac{1}{2}}$ $= a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ etc, proinde $\frac{b}{a}dx\,(aa + xx)^{\frac{1}{2}} = bdx + \frac{bx^2dx}{2a^2} - \frac{bx^4dx}{8a^4} + \frac{bx^6dx}{16a^6} - \frac{5bx^8dx}{128a^8}$ etc, et $\int \frac{b}{a}dx\,(aa + xx)^{\frac{1}{2}} =$ CQMA $= bx + \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} + \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ + etc. Si circa idem centrum C deſcriptae ſint duae hyperbolæ AM et AN, alteram diametrum CA communem habentes, et angulus conjugationis idem ſit in utraque hyperbola, ducatur vero a puncto in CL quovis ordinata QN hyperbolis occurrens in M et N; ſi CL $= a$ et CH $= \alpha$, erit CQMA $= \int \frac{b}{a}dx\sqrt{(aa + xx)}$ et CQNA $= \int \frac{b}{\alpha}dx\sqrt{(aa + xx)}$, hincque CQMA : CQNA $= \frac{b}{a}\int dx\sqrt{(aa+xx)} : \frac{b}{\alpha}\int dx\sqrt{(aa + xx)} =$ $\alpha : a$. Data igitur area CQMA datur ſimul CQNA, atque ſi fuerit CA $=$ CL, erit CQMA : CQNA $= \int dx$ $\sqrt{(aa +}$

$\surd(aa+xx) : \frac{b}{a}\int dx\surd(aa+xx) = 1 : \frac{b}{a} = a : b$, unde quadratura cujusvis hyperbolæ dependet a quadratura hyperbolæ æquilateræ.

§. 325.

F.283. Quodſi pro curva AM data ſit æquatio inter coordinatas obliquangulas AP $= x$ et PM $= y$, exiſtente angulo coordinationis $= \alpha$; poſito AM $= u$, limes rationis $\frac{du}{dx}$ ſic invenitur. Creſcente AP verſus p, et ducta adplicata pm, ſi per M tranſeat MR axi parallela ſecans applicatam pm in R; ex m ad MR cadat perpendicularis mQ. Erit igitur chorda M$m = \surd(\text{MQ}^2 + m\text{Q}^2)$. Sed MQ = MR + RQ, MR $= \Delta x$, RQ $= \Delta y \cos\alpha$, mQ $= \Delta y \sin\alpha$. Proinde chorda M$m = \surd(\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y\cos\alpha + \Delta y^2\cos\alpha^2 + \Delta y^2 \sin\alpha^2) = \surd(\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y\cos\alpha + \Delta y^2)$ poſito radio $= 1$. Jam evaneſcente Pp evaneſcit arcus Mm cum chorda ſua. Et quia hic quoque arcus et chorda continuo tendunt ad æqualitatem, eorum ratio ultima eſt æqualitatis, ita ut ſit $\frac{du}{\surd(dx^2+2dxdy\cos\alpha+dy^2)}$ $= 1$, vel $\frac{du}{dx\surd(1+2\frac{dy}{dx}\cos\alpha+\frac{dy^2}{dx^2})} = 1$, atque $\frac{du}{dx} = \surd(1+2\frac{dy}{dx}\cos\alpha+\frac{dy^2}{dx^2})$. Ratio vero ultima $\frac{ds}{dx}$, ſi ſit APM $= s$, et PM$mp = \Delta s$ ſic habetur. Ex puncto M ad pm cadat perpendicularis MN, quæ erit $= \Delta x \sin\alpha$. Proinde parallelogrammum PMR$p = y\Delta x \sin\alpha$, et quia hic quoque PMmp et PMRp cum ratione æqualitatis evaneſcunt, fit $\frac{ds}{ydx\sin\alpha} = 1$, atque $\frac{ds}{dx} = y\sin\alpha$.

§. 326.

§. 326.

Hæc ſunt ratiocinia, quibus innititur rectificatio et quadratura curvarum, ſi earum ſingula puncta ad duas rectas ſub angulo quocunque ſe invicem ſecantes referantur. Dantur et alii modi naturam curvæ propoſitæ exprimendi, et inter alios iſte, cujus mentio facta eſt §. 191; vi cujus nimirum ſingula curvæ puncta referuntur ad unum aliquod punctum fixum C, atque æquatio datur inter rectam variabilem CM $= z$, et angulum ACM $= p$. Denotet itaque p angulum ACM, atque z rectam variabilem CM; tumque rectificandus ſit arcus AM $= u$. Eum in finem concludo ſequentem in modum. Arcus AM eſt functio anguli p, atque angulo ACM incremento MCN $= \Delta p$ aucto arcus AM augetur incremento MN $= \Delta u$, et præterea eſt CN $= z \pm \Delta z$. Ducatur chorda MN, atque ex puncto M ad latus CN trianguli rectilinei MCN, ſi opus ſit productum, ducatur perpendicularis MQ, erit chorda MN $= r(MQ^2 + QN^2)$. Radio CM ex centro C deſcribatur arcus circularis MR $= z\Delta p$, erit MQ ſinus ipſius $z\Delta p$, atque QN $= \Delta z - ſv. z\Delta p$. Decreſcente jam angulo MCN decreſcit arcus MN et cum eo ſimul chorda MN praeterea quoque MQ vel $ſin.\, z\Delta p$, atque QN $= \Delta z - ſv.\, z\Delta p$. Evaneſcente tandem angulo MCN evaneſcunt arcus MN, chorda MN, præterea MQ vel $ſin\; z\Delta p$ et QN vel $\Delta z - ſv. z\Delta p$. Arcus vero Δu et chorda MN evaneſcunt in ratione æqualitatis pariter atque arcus MR cum ipſius ſinu MQ. F. 284.

Eſt itaque limes rationis $\dfrac{\Delta u}{r(MQ^2 + QN^2)} = 1$, id eſt

$$\frac{du}{r((ſin.\, zdp)^2 + (dz - ſv.\, zdp)^2)}$$

$$= \frac{du}{r((ſin.\, zdp)^2 + (dz - 1 + coſ.\, zdp)^2)}$$

$=$

$= 1 = \frac{du}{\sqrt{((\text{ſin.}\, zdp)^2 + dz^2)}}$ quia evaneſcente ſin $z\Delta p$ fit $\text{coſ.}\, z\Delta p = 1$. Proinde quoque

$$\frac{du : zdp}{\sqrt{((\text{ſin.}\, zdp)^2 + dz^2) : zdp}} = \frac{du : zdp}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{z^2 dp^2}\right)}}$$

$$= \frac{du}{zdp\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{zzdp^2}\right)}} = 1, \text{ ob } \frac{(\text{ſin.}\, zdp)^2}{zzdp^2} =$$

1, atque $\frac{du}{zdp} = \sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{zzdp^2}\right)}$. Ideo AM $= \int$

$= \int zdp\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{z^2dp^2}\right)} = \int\sqrt{(zzdp^2 + dz^2)}$. Si itaque loco zdp ſcribatur dx, erit AM $= \int\sqrt{(dx^2 + dz^2)}$.

§. 327.

Pro quadranda area MCN ita concludo. Eſt triangulum rectilineum MCN $= \frac{1}{2}(z \pm \Delta z)$ MQ $= \frac{1}{2}(z \pm \Delta z)\, \text{ſin.}\, z\Delta p$. Evaneſcente vero angulo MCN areae trianguli rectilinei MCN atque curvilinei MCN ſimul evaneſcunt, et quidem cum ratione aequalitatis. Sit itaque ACM $= s$, erit area curvilinea MCN $= \Delta s$, atque

$\frac{\Delta s}{\frac{1}{2}(z \pm \Delta z)\, \text{ſin.}\, zdp} = 1$, evaneſcente dp. Id eſt

$$\frac{ds}{\frac{1}{2}(z \pm dz)\, \text{ſin.}\, zdp} = \frac{ds}{\frac{1}{2}z\, \text{ſin.}\, zdp + \frac{1}{2}dz\, \text{ſin.}\, zdp}$$

$= 1$. Ideo quoque $\frac{ds : zdp}{\frac{1}{2}z\frac{\text{ſin.}\, zdp}{zdp} \pm \frac{1}{2}dz\frac{\text{ſin.}\, zdp}{zdp}}$

$$= \frac{ds : zdp}{\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}dz} = \frac{ds}{zdp\left(\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}dz\right)} = 1,$$

atque

atque $\frac{ds}{zdp} = \frac{1}{2} z \pm \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} z$, ob $\frac{\text{ſin.} zdp}{zdp} = 1$, et $dz = 0$. Proinde eſt area MCN $= s = \int \frac{1}{2} z . zdp$, vel MCN $= \int \frac{1}{2} zdx$, ſi loco zdp ſcribatur dx. Poteſt itaque unius ejusdemque curvæ rectificatio vel quadratura diverſis admodum formulis exprimi, prout hic vel ille modus exprimendi ipſius curvæ naturam æquatione inter duas variabiles eligatur.

§. 328.

Adplicabimus ea, quæ dicta ſunt, ad ſectiones conicas.

Formula pro rectificandis ſectionibus conicis

Pro circulo ſupra jam inventæ ſunt formulae rectificationi inſervientes ex dato ſinu, coſinu, tangente, cotangente, ſecante, coſecante vel ſinu verſo. Addam his formulis aliam pro rectificando arcu circuli AM ex data ipſius chorda. Sit itaque AB diameter circuli $= 2a$, AP $= x$, PM $= y$, erit $yy = 2ax - xx$, atque arcus AM $= \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Ducta vero chorda AM, quæ ſit $= z$, erit $zz = xx + yy = 2ax$, et proinde $zdz = adx$ et $xx = \frac{z^4}{4aa}$. Quibus valoribus ſubſtitutis habetur F.285.

$$\text{AM} = \int \frac{zdz}{\sqrt{\left(zz - \frac{z^4}{4aa}\right)}} = \int \frac{2azdz}{2a\sqrt{\left(zz - \frac{z^4}{4aa}\right)}}$$

$$= \int \frac{2azdz}{\sqrt{(4aazz - z^4)}} = \int \frac{2adz}{\sqrt{(4aa - zz)}}.$$

Pro ellipsi, cujus axis transverſus AB $= 2a$, centrum C, abſciſſa CP $= x$, PM $= y$, parameter $= p$, habemus $2ayy = paa - pxx$ (§. 159.), $4aydy = -2pxdx$, F.281.

$$dy = -\frac{pxdx}{2ay},\ dy^2 = \frac{ppxx}{4aayy} dx^2 = \frac{pxx}{2a^3 - 2axx} dx^2.$$

 Ideo

Ideo fit arcus DM $= \int \sqrt{\left(\frac{pxx}{2a^3 - 2axx} dx^2 + dx^2\right)} = \int dx \sqrt{\frac{pxx - 2axx + 2a^3}{2a^3 - 2axx}}$; ex qua formula poſito $p = 2a$ fit DM $= \int \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$.

F.280. Pro parabola abſciſſis in axe transverſo computatis, cujus parameter eſt p, habetur aequatio inter coordinatas orthogonales $yy = px$. Proinde $2ydy = pdx$, $dy = \frac{pdx}{2y} = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, $dy^2 = \frac{ppdx^2}{4px}$, Hinc arcus AM $= \int \sqrt{\left(dx^2 + \frac{ppdx^2}{4px}\right)} = \int \sqrt{\left(\frac{4px + pp}{4px} dx^2\right)} = \int \sqrt{\left(\frac{p + 4x}{4x} dx^2\right)} = \int \sqrt{\left(\frac{px + 4xx}{4xx} dx^2\right)} = \int \frac{dx}{2x} \sqrt{(px + 4xx)}$; ex qua formula multiplicando numeratorem et denominatorem per $\sqrt{(px + 4xx)}$ et dividendo per x, deducitur AM $= \int \frac{(p + 4x)dx}{2\sqrt{(px + 4xx)}}$.

F.282. Pro hyperbola abſciſſis in axe transverſo a centro C computatis, cujus parameter eſt p, aequatio inter coordinatas orthogonales eſt $2ayy = pxx - paa$, ideo invenitur arcus AM $= \int dx \sqrt{\frac{pxx + 2axx - 2a^3}{2axx - 2a^3}}$, ex qua poſito $p = 2a$ fit $\int dx \sqrt{\frac{2xx - aa}{xx - aa}}$, ubi conſtans integralis addenda ex eo determinanda eſt, quod poſito $x = a$ fit AM $= 0$. Si abſciſſae a centro in axe conjugato computentur, cujus parameter eſt q et aequatio inter coordinatas orthogonales ſit $2byy = qxx + qbb$; invenitur AM

$AM = \int dx \sqrt{\frac{qxx + 2bxx + 2b^3}{2bxx + 2b^3}}$, atque ſi $q = 2b$; $AM = \int dx \sqrt{\frac{2xx + bb}{xx + bb}}$.

§. 329.

Formulæ pro quadratura ſectionum conicarum.

PRO ELLIPSI ſupra jam inventa eſt formula CPMD $= \int \frac{b}{a} dx \sqrt{(aa - xx)}$, quæ eſt pro circulo $= \int dx \sqrt{(aa - xx)}$, quando $b = a$. Ex æquatione parametrum axis principalis involvente deducitur CPMD $= \int dx \sqrt{\frac{2apx - pxx}{2a}}$. p. 281.

Sit CM $= z$; erit $zz = xx + yy$. Deinde ſit differentiale arcus radio z deſcripti $= dv$, erit area ſectoris DCM $= \int \frac{1}{2} z dv$. Sit arcus DM $= u$, erit $du = \sqrt{(dv^2 + dz^2)}$ (§. 326.), ideo $du^2 = dv^2 + dz^2$, atque $dv = \sqrt{(du^2 - dz^2)}$. Jam ex æquatione pro ellipſi $2ayy = paa - pxx$ deducitur $y = \sqrt{\frac{aap - pxx}{2a}} = \frac{1}{2a}\sqrt{(2a^3p - 2apxx)}$. Proinde eſt $z = \sqrt{\frac{2ax^2 - pxx + aap}{2a}} = \frac{1}{2a}\sqrt{(4aaxx - 2apxx + 2a^3p)}$, et $dz = \frac{2axdx - pxdx}{\sqrt{(4aax^2 - 2apx^2 + 2a^3p)}}$. Ideo $dz^2 = \frac{4aaxx - 4apxx + ppxx}{4aaxx - 2apxx + 2a^3p} dx^2$. Præterea eſt $du^2 = \frac{pxx - 2axx + 2a^3}{2a^3 - 2axx} dx^2$ (§. 328.) $= \frac{ppxx - 2apxx + 2a^3p}{2a^3p - 2apxx} dx^2$.

Proinde $dv = \frac{2a^3pdx}{\sqrt{(4aaxx - 2apxx + 2a^3p)}\sqrt{(2a^3p - 2apxx)}}$.
Unde concluditur $DCM = \int \frac{1}{2}zdv = \frac{aapdx}{2\sqrt{(2a^3p - 2apxx)}}$.

F.285. Pro circulo AMB ſit radius $CA = a$, $AP = x$, $PM = y$, erit $yy = 2ax - xx$, ac poſito arcu $AM = v$, invenimus $dv = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ (§. 328.). Si jam fuerit ſector $ACM = s$, erit $ds = \frac{1}{2}rdv = \frac{aadx}{2\sqrt{(2ax - xx)}}$, atque ſector $ACM = \int \frac{aadx}{(2\sqrt{2ax - xx})}$. Abſciſſis a centro C computatis et poſito arcu $DM = v$, erit $dv = \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ (§. 314.) et proinde ſector $DCM = \int \frac{1}{2}adv = \int \frac{aadx}{2\sqrt{(aa - xx)}}$. Sit $AM = z$ chorda quæcunque circuli, cujus diameter eſt AB. Sit AS diametro circuli AB perpendicularis, arcus $MS = v$, præterea arcus $AM = u$, erit $du = \frac{2adz}{\sqrt{(4aa - zz)}}$. Sed $dv^2 = du^2 - dz^2 = \frac{4aadz^2}{4aa - zz} - dz^2 = \frac{zzdz^2}{4aa - zz}$, atque $dv = \frac{zdz}{\sqrt{(4aa - zz)}}$. Proinde ſegmentum $AM = \int \frac{1}{2}zdv = \int \frac{zzdz}{2\sqrt{(4aa - zz)}}$.

F.286. Pro hyperbola, cujus ſemiaxis transverſus $CA = a$, et ſemiaxis conjugatus $CD = b$, poſita $CP = x$ et $PM = y$, eſt area $APM = \int \frac{b}{a}dx\sqrt{(xx - aa)}$ cui in-

tegrali

tegrali conſtans addenda eſt ex eo determinanda, quod poſito $x = a$ ſit APM $= 0$. Si CQ $= x$, et QM $= y$, ſit area ACQM $= \int \frac{b}{a} dx\,(aa + xx)$ (§. 324.). Pro hyperbola æquilatera eſt APM $= \int dx\,\sqrt{(xx - aa)}$ et ACQM $= \int dx \sqrt{(aa + xx)}$. Si vero AP $= x$, eſt APM $= \int dx \sqrt{(2ax + xx)}$. Area ſectoris ACM ſic invenitur. Introducendo parametrum in calculum et ponendo CP $= x$, PM $= y$, eſt $2ayy = pxx - paa$, et $yy = \frac{pxx - aap}{2a}$. Proinde CM$^2 = zz = xx + \frac{pxx - aap}{2a} = \frac{2axx + pxx - aap}{2a}$, atque CM $= z = \frac{1}{2} a \sqrt{(4aaxx + 2apxx - 2a^3p)}$; $dz = \frac{2axdx + pxdx}{\sqrt{(4aaxx + 2apxx - 2a^3p)}}$; $dz^2 = \frac{4aaxx + 4apxx + ppxx}{4aaxx + 2apxx - 2a^3p} dx^2$. Si arcus AM $= u$, erit $du = \frac{2apxx + ppxx - 2a^3p}{2apxx - 2a^3p} dx^2$; ideo poſito arcu AM $= v$, habemus $dv = \sqrt{(du^2 - dz^2)} = \frac{2a^3pdx}{\sqrt{(2apxx + 2a^3p)\,(4aaxx + 2apxx - 2a^3p)}}$, et proinde ſector ACM $= \int \frac{1}{2} z dv = \int \frac{aapdx}{2\sqrt{(2apxx - 2a^3p)}}$, atque ſi hyperbola fuerit æquilatera, ubi $p = 2a$, habemus ACM $= \int \frac{aadx}{2\sqrt{(xx - aa)}}$.

Sit ſemiaxis conjugatus CD $= b$, ejusque parameter $= q$, CQ $= x$, QM $= y$, et erit $yy = \frac{qxx + qbb}{2b}$; unde CM $= z = \frac{1}{2b} \sqrt{(4bbxx + 2bqxx + 2b^3q)}$, dz^2 $=$

$= \frac{4bbxx + 4bqxx + qqxx}{4bbxx + 2bqxx + 2b^3 q} dx^2, \quad du^2 =$
$\frac{2bqxx + qqxx + 2b^3 q}{2bqxx + 2b^3 q} dx^2$, et ideo $dv = \surd(du^2 - dz^2)$
$= \frac{2b^3 q}{\surd(2bqxx + 2b^3 q)(4bbxx + 2bqxx + 2b^3 q)}$. Sector
itaque $ACM = \int \frac{1}{2} z dv = \int \frac{bbqdx}{2\surd(2bqxx + 2b^3 q)}$, et in hyperbola aeqnilatera, ubi $q = 2b = 2a$, ſit $ACM =$
$\int \frac{aadx}{2\surd(xx + aa)}$.

SECTIO XXI.

DE LOGARITHMIS ET QVANTIS EXPONENTIALIBVS.

§. 330.

F. 287. *Si in hyperbolae MGHI aſymtota CS capiantur rationes aequales quaevis, ut CA : CB = CD : CE, et ex punctis A, B, D, E, ducantur AG, BH, DI, EK, alteri aſymtotae CR parallelae, occurrentes curvae in punctis G, H, I, K; erunt trapezia AGHB et DIKE aequalia.* Sit enim $CA = a$, $AG = b$, $AB = x$, $BH = y$; erit $(CA + AB) BH = CA . AG$ (§. 303.) id eſt $ay + xy = ab$, et proinde $y = \frac{ab}{a+x}$. Jam area $AGHB = \int ydx \text{ ſin } \omega =$ $\int \frac{abdx \text{ ſin } \omega}{a+x}$, ſi angulus aſymtotarum $= \omega$, quod integra-

le

le non invenitur, niſi fractio $\frac{ab\, ſin\, \alpha}{a+x}$ in ſeriem convertatur. Quo facto habetur AGHB $= ab\, ſin\, \alpha \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.}\right)$. Conſtans nulla adjicitur, quia poſito $x = 0$ fit AGHB $= 0$. Deinde ſit CD $= f$, DI $= g$, DE $= t$, EK $= u$; eritque (CD+DE) EK = CD. DI, vel $fu + tu = fg$, atque $u = \frac{fg}{f+t}$. Proinde DIKE $= \int \frac{fg\, dt\, ſin\, \alpha}{f+t} = fg\, ſin\, \alpha \left(\frac{t}{f} - \frac{t^2}{2f^2} + \frac{t^3}{3f^3} - \frac{t^4}{4f^4} + \text{etc.}\right)$. Sed $fg = ab$ per naturam hyperbolae et $\frac{x}{a} = \frac{t}{f}$ ex hypotheſi. Ponitur enim CA: CB = CD : CE, ideo eſt CB − CA : CA = CE − CD: CD, id eſt $x : a = t : f$. Ergo eſt AGHB = DIKE.

§. 331.

Sit iterum curva AB hyperbola atque CD et CE ipſius aſymtotæ; praeterea ſint AD, BG aſymtotæ CE, atque AF et BE aſymtotæ CD parallelæ: erit ADCF = BGCE, et ablato communi CH additoque trilineo AHB, fit ADGB = AFEB. Sunt vero et triangula ACF et CEB æqualia, ergo AFEB + ACF − CEB = AFEB = ADGB, id eſt, ſector hyperbolicus ACB æqualis trapezio hyperbolico AFEB vel ADGB. Proinde ſi in hyperbolæ IHGM aſymtoto CS capiantur quatuor abſciſſæ proportionales CA : CB = CD : CE, et per puncta A, B, D, E, ducantur rectæ alteri aſymtoto CR parallelæ, curvæ occurrentes in punctis G, H, I, K, erunt ſectores hyperbolici, CGH : CIK, qui differentiis terminorum harum æqualium rationum reſpondent, æquales. Sunt enim F.288. F.287.

 æqua-

æqualibus trapeziis AGHB et DIKE æquales. Capiantur nunc in hyperbolæ ML aſymtoto CS abſciſſæ CA, CB, CD, CE, CF, etc. in progreſſione geometrica; erunt rationes CA : CB, CB : CD; CD : CE; CE : CF; etc, æquales, proinde et omniae trapezia AH, BI, DK, EL, etc, æqualia, ita ut ſit AI duplum, AK triplum, AL quadruplum, etc, trapezii AH. Eſt vero ratio CA : CD duplicata, CA : CE triplicata, CA : CF quadruplicata etc, rationis CA : CB, proinde trapezia AH, AI, AK, AL, etc, ſunt inter ſe, ut logarithmi rationum CA : CB, CA : CD, CA : CE, CA : CF, etc, ſi ratio CA : CB ſumatur pro ſimplici, nimirum ut numeri 1, 2, 3, 4, etc. Quodſi igitur trapezium AH ſit $= c$, erit AI $= 2c$, AK $= 3c$, AL $= 4c$, et ita porro. Commode igitur trapezia AH, AI, AK, AL, etc, vel quoque ſectores his trapeziis reſpective aequales dici poſſunt *Menſurae* rationum CA : CB, CA : CD, CA : CE, CA : CF etc, ſi pro menſura rationis CA : CB, ſumatur AH $= c$. Atque hæ quidem menſuræ majores aut minores erunt pro magnitudine ipſius c, ita ut magnitudo ipſius c determinet magnitudinem omnium reliquarum menſurarum earum rationum, quæ ſunt rationis CA : CB multiplicatæ quaecunque. Generaliter vero ipſa c denotare poteſt quantitatem quamcunque vel aream, vel lineam, vel aliud quodcunque extenſum, quae ſi conſideretur ut unitas, ſeries c, $2c$, $3c$, $4c$, etc. exponit ſeriem logarithmorum reſpondentium ſeriei rationum $\frac{A}{B}$, $\frac{A^2}{B^2}$, $\frac{A^3}{B^3}$, $\frac{A^4}{B^4}$, etc, ſi $\frac{A}{B}$ conſideretur ut ſimplex, cujus menſura ſit c. Denotante igitur c trapezium hyperbolicum pro menſura cujuscunque rationis CA : CB, quae tanquam ſimplex ſpectatur, aſſumtum, ejus magnitudo pendebit a magnitudine parallelogrammi hyperbolæ inſcripti, ſive a magnitudine potentiae hyperbolae.

§. 232.

§. 332.

Poſita enim $AB = x$, $BH = y$, $CA = a$, et $AG = b$, F. 287.
eſt æquatio pro hyperbola $xy + ay = ab$, proinde $y = \frac{ab}{a+x}$, et poſito angulo coordinationis $= \alpha$, area trapezii $AH = \int \frac{ab \sin \alpha\, dx}{a+x} = ab \sin \alpha \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{3a^4} + \text{etc.} \right)$. Quodſi jam alia hyperbola NPT inter easdem aſymtotas CR et CS deſcripta intelligatur, erunt trapezia AH et AO, quæ eidem rationi CA : CB reſpondent; inter ſe ut parallelogramma inſcripta, ſeu ut potentiae hyperbolarum. Manente enim $CA = a$, $AB = x$ poſita $BO = u$, $AN = c$, erit $xu + au = ac$, et $u = \frac{ac}{a+x}$, proinde trapezium $AO = \int \frac{ac \sin \alpha\, dx}{a+x} = ac \sin \alpha \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.} \right)$. Eſt vero ſeries prior ad poſteriorem, ut $ab \sin \alpha : ac \sin \alpha$. Ex quo patet, quod poſita ratione CA : CB eadem et hyperbolis diverſis inter easdem aſymtotas deſcriptis menſuræ rationis CA : CB ſint ut hyperbolarum potentiae. Licet igitur eadem ratio ſumatur pro ſimplici, poteſt tamen ejus menſura, et ideo menſuræ omnium reliquarum, quae ex eadem quomodocunque componuntur, rationum, quamcunque habere magnitudinem, pro diverſa magnitudine potentiæ hyperbolæ, cujus ſpatia aſymtotica vel ſectores his æquales pro menſurandis rationibus in ejus aſymtota abſciſſis uſurpantur. Determinata vero magnitudine potentiæ hyperbolæ ſimul magnitudo omnium trapeziorum rationes dictas menſurantium eſt determinata, ſic ut quævis hyperbola exhibeat ſyſtema logometricum completum, ſi in ejus aſymtota capiatur ratio quævis ut ſimplex ſpectata. Cum igitur magnitudo po-

tentiæ hyperbolæ magnitudinem omnium menſurarum rationum hujus ſyſtematis determinet, ita ut in diverſis hyperbolis ipſæ rationum menſurae eidem rationi reſpondentes inter ſe ſint, ut iſtæ potentiae; hæc ipſa potentia hyperbolæ dicitur *modulus hujus ſyſtematis logometrici.* Erunt igitur in diverſis hyperbolis intra easdem aſymtotas deſcriptis menſurae ejusdem rationis ut moduli. Quando rationes ſunt inæquales, menſurae earum modulorum rationem non tenent. Hinc vice verſa quoque, ſi menſuræ diverſorum ſyſtematum ſint ut moduli; ad eandem rationem pertinebunt.

§. 333.

F. 289. Cum ſit area ABHG $= ab\ \mathit{ſin}\ a \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.}\right)$ = menſuræ rationis CA : CB $= a : a + x$; poſito x negativo Ab, habetur area AG$hb = ab\ \mathit{ſin}\ a \left(-\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} - \text{etc.}\right)$ = menſuræ rationis CA : C$b = a : a - x$. Quando eſt duorum quorumvis numerorum ſemiſumma $= a$ et ſemidifferentia $= x$, erit major $= a + x$ et minor $= a - x$. Tum vero ratio numerorum $a - x : a + x$ erit $= 1 : \frac{a + x}{a - x}$. Invenitur vero menſura rationis $a - x : a + x$ ſubtrahendo menſuram rationis $\frac{a - x}{a}$ a menſura rationis $\frac{a + x}{a}$, quia eſt $\frac{a + x}{a} : \frac{a - x}{a} = \frac{a + x}{a - x}$. Proinde eſt menſura rationis $(a - x : a + x)$ $= \left(1 : \frac{a + x}{a - x}\right)$, vel quantitatibus a et x per numeros expreſſis, logarithmus numeri $\frac{a + x}{a - x}$, = ABHG − AGhb

$AGbb = 2ab\ ſin\ a\ \left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \frac{x^9}{9a^9} + \text{etc.}\right)$, quæ ſeries ſyſtemati logarithmico cuicunque ſat expedite condendo inſervit, atque ut haec ſeries certo cuidam ſyſtemati aptetur, opus eſt, ut determinatus quidam numerus ſumatur pro baſe, cujus proinde logarithmus ſit unitas. Sit igitur baſis ſyſtematis $= e$ et ponatur $\frac{a+x}{a-x} = e$, ex quo fit $ea - ex = a + x$; $ea - a = ex + x$; $x = \frac{ea - a}{e+1}$. Fit igitur

$$le = 1 = 2ab\ ſin\ a \left(\frac{ea-a}{(e-1)a} + \frac{(ea-a)^3}{3(e+1)^3a^3} + \frac{(ea-a)^5}{5(e+1)^5a^5} + \frac{(ea-a)^7}{7(e+1)^7a^7} + \frac{(ea-a)^9}{9(e+1)^9a^9} + \text{etc.}\right)$$

ex quo habetur modulus *ab ſin a*, quem in ſequentibus generaliter littera M denotabimus. Erit nimirum M

$$= \frac{1}{2\left(\frac{ea-a}{(e+1)a} + \frac{(ea-a)^3}{(e+1)^3a^3} + \frac{(ea-a)^5}{(e+1)^5a^5} + \text{etc.}\right)}$$

ex quo patet magnitudinem moduli M pendere a magnitudine numeri e, qui ſumitur pro baſe, et vice verſa magnitudinem baſeos e pendere a magnitudine moduli M, ita ut determinato modulo ſimul magnitudo baſeos e determinata ſit.

§. 334.

In quovis ſyſtemate ratio, cujus logarithmus eſt ſyſtematis illius modulo æqualis, una eademque ſeu conſtans eſt. Nam logarithmi diverſorum ſyſtematum, modulis ſuis æquales, ſunt ut illi moduli, proinde ad eandem rationem pertinent. Conſtans illa ratio dici ſolet

ratio

ratio modularis eaque ex ſerie $l(1:1+x) = M(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \text{etc.})$ habetur per reverſionem §. 252. Logarithmo enim rationis $1:1+x$ ſimpliciter per L denotato fit $x = \frac{L}{M} + \frac{L^2}{1.2.M^2} + \frac{L}{1.2.3.M^3}$ $\frac{L^4}{1.2.3.4.M^4} +$ etc, proinde ratio, cujus logarithmus eſt L, erit $1 : 1 + \frac{L}{M} + \frac{L^2}{1.2.M^2} + \frac{L^3}{1.2.3.M^3} + \frac{L^4}{1.2.3.4.M^4} + \frac{L^5}{1.2.3.4.5.M^5} + \frac{L^6}{1.2.3.4.5.6.M^6}$ + etc, et ideo ſi modulus $M = L$, erit hæc ratio $1 : 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \text{etc}, = 1 : 2,7182818284590452353 6028$. Ex his patet, quod poſito modulo $= 1$, fiat numeri 2, 7182818284590452353 6028 logarithmus $= 1$, et proinde hic numerus erit baſis ſyſtematis logarithmi cujus modulus eſt $= 1$. Quia hæc ſuppoſitio, qua modulus ponitur $= 1$, eſt ſimpliciſſima, logarithmi ſyſtematis, cujus modulus eſt $= 1$, vocantur *naturales*, reliqui vero *artificiales*. Syſtema igitur *Briggianum* vulgo in calculis receptum eſt artificiale: *Neppeѓianum* vero eſt naturale. Ex præcedentibus vero patet, quod dato quovis ſyſtema logarithmico cum modulo ſuo, et modulo ſyſtematis alterius, inveniatur totum ſyſtema alterum; vel quoque dato ſyſtemate logarithmico cum modulo ſuo et logarithmo datae rationis ex altero inveniatur, et modulus, et ſyſtema totum alterum. Proinde opus tantum eſt, ut inquiramus, quomodo logarithmorum naturalium ſyſtema potuit inveniri, cum dato hoc ſyſtemate ſimul dentur omnia reliqua.

§. 335.

F.290. Cum parallelogrammum inſcriptum ubique in hyperbola idem ſit magnitudine, poterit adhiberi ad CA abſciſſam illam, ad quam ſit æqualium laterum, et proinde

inde, ſi hyperbola æquilatera ſupponatur, ſub figura quadrati. Hoc caſu facta CA = 1, ſimul fit quadratum ſeu modulus CF = 1; ipſæ AB, Aβ, vel +x et −x ex utraque puncti A parte excurrent, et AC : AC + AB, vel AC : AC − Aβ, id eſt 1 : 1 ± x exponent omnes rationes minoris et majoris inæqualitatis, cum logarithmis ſuis AFBG, AFβγ, contrario poſitu reſpectu puncti A ſeu ordinatae AF ordinatis, ſic ut logarithmi neceſſario ex una parte affirmativi poſiti, evadant negativi ex altera parte, numerorum vero negativorum logarithmi impoſſibiles. Proinde hyperbola æquilatera, cujus potentia ponitur = 1, omnium diſtinctiſſime exponit ſyſtema logarithmicum naturale. Poteſt tamen et eadem hyperbola ſyſtema quodvis artificiale repræſentare pro diverſa denominatione parallelogrammi inſcripti. Sit igitur CA unitas, et uti ſupra jam poſuimus, duorum quorumvis numerorum ſemiſumma = a et ſemidifferentia = x, ut major ſit $a+x$, minor $a-x$, et ratio numerorum $a+x : a-x$ redit ad $\frac{a+x}{a-x} : 1 =$ CB : CA. Cum igitur CA ponitur unitas, erit CB numerus quivis $\frac{a+x}{a-x}$ et ejus logarithmus naturalis, poſito M = 1, = $\frac{2x}{a} + \frac{2x^3}{3a^3} + \frac{2x^5}{5x^5} + \frac{2x^7}{7a^7} + \frac{2x^9}{9a^9} +$ etc. Poteſt in hac ſerie quoque pro a integra datorum numerorum ſumma et pro x integra eorundem differentia ſubſtitui, licet proprie x ſit ſemidifferentia et a ſemiſumma, et proinde $2x$ differentia et $2a$ ſumma integra. Eſt enim fractio $\frac{x}{a}$ = fractioni $\frac{2x}{2a}$, et proinde quoque reliquarum fractionum $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{x^3}{a^3}$ etc. valor idem manet, licet x differentiam et a ſummam integram datorum numero-

merorum ponatur denotare. Sit igitur quaerendus logarithmus naturalis rationis $3:2$ ſeu $\frac{3}{2}:1$ ſeu numeri $\frac{3}{2}$, erit $a = 5$, $x = 1$, et logarithmus quæſitus $= \frac{2}{5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} + \frac{2}{9 \cdot 5^9} +$ etc. Dividendo igitur 2, 000000000 etc, per 5 fiet

$\frac{2}{5}$	$= A =$	0, 40000000000000000000
$\frac{1}{25}$	$A = B =$	1600000000000000000
$\frac{1}{25}$	$B = C =$	64000000000000000
$\frac{1}{25}$	$C = D =$	2560000000000000
$\frac{1}{25}$	$D = E =$	102400000000000
$\frac{1}{25}$	$E = F =$	4096000000000
$\frac{1}{25}$	$F = G =$	163800000000
$\frac{1}{25}$	$G = H =$	6500000000
$\frac{1}{25}$	$H = I =$	262144000
$\frac{1}{25}$	$I = K =$	10485760
$\frac{1}{25}$	$K = L =$	419430
$\frac{1}{25}$	$L = M =$	16777
$\frac{1}{25}$	$M = N =$	671
$\frac{1}{25}$	$N = O =$	27
$\frac{1}{25}$	$O = P =$	1

Dividantur A, B, C, D, E, etc. per

Divi-

Diviſores	erunt quoti
1	0, 40000000000000000000
3	5333333333333333
5	128000000000000000
7	365714285714285
9	11377777777777
11	372363636363
13	12603076923
15	436906666
17	15420235
19	551882
21	19973
23	729
25	27
27	1

et quotorum ſumma

0, 405465108108164438194

erit logarithmus naturalis numeri $\frac{3}{2}$, qui quaerebatur. Simili calculo invenitur logarithmus naturalis numeri $\frac{4}{3}$ $= \frac{2}{7} + \frac{2}{3 \cdot 7^3} + \frac{2}{5 \cdot 7^5} + \frac{2}{7 \cdot 7^7} + \frac{2}{9 \cdot 7^9} + \frac{2}{11 \cdot 7^{11}}$ + etc. = 0, 287682072451780927240, log $\frac{5}{4}$ = 0, 223143551314209755574, log $\frac{7}{6}$ = 0, 15415067942 68931426. Ex his autem obtinentur ſequentes logarithmi.

$l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} =$ 0,69314718055994530934 = log. 2.
$l\frac{3}{2} + l2 =$ 1,09861228866810969128 = log. 3.
2 log. 2 = 1,38629436111989061868 = log. 4.
$l4 + l\frac{5}{4} =$ 1,60943791243410057442 = log. 5.
$l2 + l3 =$ 1,79175946922805500062 = log. 6.
$l6 + l\frac{7}{6} =$ 1,94591013717074431488 = log. 7.
$l2 + l4 =$ 2,07944154167983592802 = log. 8.
2 log. 3 = 2,19722457733621938256 = log. 9.
$l2 + l5 =$ 2,30258509299404568376 = log. 10.

Uſus

Uſus fractionum $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, etc, in logarithmis integrorum inveniendis ex his ſatis perſpicitur. Series autem logarithmica eo citius convergit, quo minor fuerit differentia terminorum reſpectu ſummæ. Ad compendium igitur operae conducit, ſi ejusmodi adhibeantur, quarum numeratores et denominatores ſint ex majoribus numeris, qui exiguo differunt, ut $\frac{16}{15}$, $\frac{25}{24}$, $\frac{81}{80}$, etc, $\frac{126}{125}$, $\frac{225}{224}$, $\frac{2401}{2400}$, $\frac{4375}{4374}$, etc. Ex his enim et ſimilibus brevi calculo obtinentur logarithmi numerorum *primorum* id eſt eorum, qui diviſores exactos praeter unitatem non agnoſcunt, ex quibus reliquorum logarithmi per ſolam additionem vel ſubtractionem habentur.

§. 336.

Ex his logarithmis naturalibus inveniuntur artificiales Briggiani, quolibet per modulum ſyſtematis Briggiani multiplicato. Omnia proinde eo redeunt, ut modulus ſyſtematis Briggiani inveniatur. Sit modulus ſyſtematis logarithmorum naturalium M et logarithmus naturalis numeri cujuscunque aſſumti L, modulus ſyſtematis Briggiani m, et logarithmus vulgaris numeri illius, cujus logarithmus naturalis L, ſit l; erit $= L : l = M : m$. In ſyſtemate Briggiano eſt 1 logarithmus numeri 10, ejusdem vero numeri logarithmus naturalis eſt 2, 30258509 etc. Proinde fit modulus ſyſtematis

$$\text{Briggiani} = \frac{1}{2,3058509299 \text{ etc.}} = 0,43429448190$$

325182765112891891660508229439700580366656
6114454 etc. Prouti igitur inventio logarithmorum pendet a quadratura hyperbolae; ſic et quadratura ſectorum et ſpatiorum aſymtoticorum hyperbolae, quae datis quibuslibet rationibus adjacent, habetur per canonem logarithmorum. Detur ratio CB : CA, et erit ut modulus canonis ad logarithmum datae rationis, ſic parallelogrammum hyperbolicum ad aream quæſitam. Et viciſſim invenitur hyperbola, in qua ſpatium adjacens da-

tae

tae rationi ſit magnitudinis datae inſerendo: ut logarithmus tabularis ad datam rationem pertinens ad magnitudinem ſpatii dati, ſic modulus canonis ad parallelogrammum hyperbolae quæſitae modulare. Dato autem parallelogrammo modulari datur hyperbola.

§. 337.

Dato igitur numero quocunque geometrice invenitur ipſius logarithmus naturalis ſequentem in modum. Ducatur recta CS magnitudinis indefinitae, in eadem capiatur pars CA quaecunque atque hæc ſumatur pro unitate. Ex hac unitate componatur CB tanquam numerus, ut ſit CA : CB $= 1 : x$. Ex C erigatur CR perpendicularis ipſi CS, atque latere CA compleatur quadratum CF. Per punctum F deſcribatur hyperbola ad CS et CR aſymtotas, cujus potentia eſt = CF, per CB ducatur ad CS perpendicularis curvæ occurrens in G, erit AG logarithmus naturalis numeri x, qui quærebatur. Aequatio pro hac hyperbola, poſito BM $= y$, eſt $xy = 1$ proinde $y = \frac{1}{x}$, ideoque differentiale areae AM $= \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x}$. Cum ſit AM logarithmus naturalis ipſius x, ponatur AM $= lx$, ita ut littera l ſemper denotet *logarithmum naturalem* illius quantitatis, cui præfigitur: erit $d.\, lx = \frac{dx}{x}$, unde ad logarithmorum naturalium differentialia invenienda hanc habemus regulam. *Quantitatis x, cujus logarithmus naturalis proponitur, ſumatur differentiale, hocque per ipſam quantitatem x diviſum dabit differentiale logarithmi quæſitum.* Ope hujus regulæ, cujuscunque functionis ipſius x logarithmus proponatur, ejus differentiale facile invenitur. Notandum autem eſt, $\frac{dx}{x}$ eſſe differentiale logarithmi

naturalis ipſius x. Si logarithmus numeri x alterius cujuscunque ſyſtematis proponeretur, eadem regula eſſet obſervanda, praeterea vero differentiale inventum per modulum illius ſyſtematis multiplicandum, cujus ratio ea eſt, quia logarithmi diverſorum ſyſtematum ſunt ut moduli. Sit baſis logarithmorum naturalium $= e$, quorum modulus eſt 1, et baſis ſyſtematis logarithmorum alterius cujuscunque $= a$, cujus modulus eſt m, erit, ſi prior logarithmus per $\overset{e}{l}x$ et poſterior per $\overset{a}{l}x$ denotetur, $\overset{e}{l}x : \overset{a}{l}x = 1 : m$, proinde $\overset{a}{l}x = m\overset{e}{l}x$, et hinc $d.\overset{a}{l}x = m \frac{dx}{x}$. Idem quoque deducitur ex natura hyperbolæ, ſi ejus potentia CF non ſit $= 1$, ſed CF ponatur $= m$. Tum enim eſt $xy = m$, $y = \frac{m}{x}$, et $ydx = m \frac{dx}{x}$. Dato igitur logarithmo ipſius x artificiali quocunque et dato modulo illius ſyſtematis, ex quo logarithmus proponitur, qui ſit $= m$, erit $d.lx = m \frac{dx}{x}$. Inde deducitur regula generalis pro inveniendo differentiali logarithmi cujuscunque ipſius x propoſiti. *Differentiale variabilis* x, *cujus logarithmus proponitur, dividatur per ipſam hanc variabilem, et quotus multiplicetur per modulum ſyſtematis, ad quod logarithmus propoſitus pertinet.* Extenditur hæc regula ſimul ad logarithmos naturales, poſito eorum modulo $= 1$. Logarithmi numerorum, qui non ſunt poteſtates baſis ſyſtematis, exhiberi non poſſunt, niſi conceſſa quadratura hyperbolæ. Hæc cauſſa eſt, cur logarithmi quantitatibus tranſcendentibus annumerentur. Hoc tamen non obſtante differentiale logarithmi variabilis x, et cujuscunque functionis algebraicae illius variabilis, eſt functio algebraica per dx multipl-

ca-

cata, ita ut differentiale logarithmicum cum differentialibus functionum algebraicarum unius variabilis eandem habeat formam, nimirum $= Pdx$, exiſtente P functione ipſius x algebraica. Proinde differentialia ſecunda et ſequentium ordinum functionis logarithmicae variabilis x per praecepta Sectionis XV inveniuntur, poſito nimirum differentiali dx conſtante.

§. 338.

Expoſita logarithmorum differentiatione, functiones, quae ex algebraicis et logarithmis ſunt permixtae, facile differentiabuntur, perinde atque eae, quae ex logarithmis ſolis componuntur, quod ex ſequentibus exemplis fiet perſpicuum, in quibus ſupponamus, logarithmos datos eſſe naturales. Si ſit $y = (lx)^n$, ponatur $lx = p$, atque ob $y = p^n$, erit $dy = np^{n-1}dp$. Eſt vero $dp = \frac{dx}{x}$, proinde $dy = n\,(lx)^{n-1}\frac{dx}{x}$. Poſito $y = \sqrt[m]{lx} = (lx)^{\frac{1}{m}}$ erit $dy = \frac{1}{m}(lx)^{\frac{1}{m}-1}\frac{dx}{x}$. Atque ſi p fuerit functio quaecunque ipſius x, ponaturque $y = (lp)^n$, erit $dy = n(lp)^{n-1}\frac{dp}{p}$. Quare cum differentiale dp per praecedentia aſſignari poſſit, erit quoque differentiale ipſius y cognitum. Quando eſt $y = lp \times lq$, fuerintque p et q functiones quaecunque ipſius x, erit $dy = \frac{dp}{p}lq + \frac{dq}{q}lp$. Sit $y = xlx$, atque habemus $dy = dxlx + \frac{xdx}{x} = dxlx + dx$. Quodſi fuerit $y = x^m lx - \frac{1}{m}x^m$, differentiatione ſecundum partes inſtituta reperietur $dy = mx^{m-1}dxlx + x^{m-1}dx - x^{m-1}dx = mx^{m-1}dxlx$. Quando autem eſt $y = x^m(lx)^n$, fiet

 dy

$dy = mx^{m-1}dx\,(lx)^n + nx^{m-1}dx\,(lx)^{n-1}$. Si logarithmi logarithmorum occurrant, idoneis ſubſtitutionibus eorum differentialia per præcepta hucuſque tradita haud difficulter eruuntur. Uti ſi fuerit $y = llx$, ponatur $lx = p$, erit $y = lp$, et $dy = \frac{dp}{p}$; at eſt $dp = \frac{dx}{x}$, proinde fiet $dy = \frac{dx}{xlx}$. Si ſit $y = lllx$, ac ſtatuatur $lx = p$, fiet $y = llp$, et proinde eſt $dy = \frac{dp}{plp}$. Quia vero $dp = \frac{dx}{x}$; invenitur $dy = \frac{dx}{xlx \cdot llx}$.

§. 339.

Menſura datae rationis, quæ hic exponitur per aream aſymtoticam hyperbolæ, etiam repræſentari poteſt per lineam rectam. Productæ enim intelligantur omnes applicatæ BG verſus M et capiantur BM tales, ut
F.290. ſit rectangulum ſub AC et BM æquale areae AFGB, et proinde $BM = \frac{AFGB}{AC}$, erunt puncta M in curva AM, quæ et verſus oppoſitam partem R continuatur concipiendo, quod puncto β verſus C fluente, apud β ſub angulo aſymtotarum applicata ſit $\beta\mu$ ita creſcente $C\beta$, ut perpetuo rectangulum ſub AC et $\beta\mu$ æquale ſit areae $AF\gamma\beta$, et proinde $\beta\mu = \frac{AF\gamma\beta}{AC}$. Curva haec vocatur *Logiſtica* ſive *Logarithmica*. Ductis enim MP, ZV, μp etc. ipſi CS parallelis erunt CP, CZ, Cp, logarithmis rationum CA : PM, CA : ZV, CA : μp proportionales. Sunt enim rectae CP, CZ, Cp proportionales areis AFBG, AFDE, $AF\beta\gamma$. Si rationes MP : AC, ZV : MP, CA : μp ſunt æquales, erunt æquales CP, PZ, Cp, utpote reſpondentes æqualibus ſpatiis hyperbolicis AFBG.

AFBG, BGED, atque ex his patet, quod applicatis in geometrica progreſſione procedentibus AC : PM : ZV etc. abſciſſæ progrediantur in progreſſione arithmetica o — CP — 2CP etc. Repræſentat igitur et Logiſtica ſyſtema logarithmicum completum.

§. 340.

Quodſi ipſae CP, CZ, Cp etc, ſumantur pro logarithmis rationum CA : PM, CA : ZV, CA : μp, etc; erit modulus hujus ſyſtematis = AF. In duobus enim logarithmorum ſyſtematibus logarithmi æqualibus rationibus reſpondentes ſunt ut moduli. Proinde ſit ABFG : BM = AC × AF : m, vel ABFG : AC × AF = BM : m, eſt vero et $\frac{ABFG}{AC}$: AF = ABFG : AC × AF, proinde $\frac{ABFG}{AC}$: AF = BM : m, ſed $\frac{ABFG}{AC}$ = BM, ideo AF = m. Sumantur nunc duo quævis logiſticæ puncta M et V, per quæ ducatur recta curvam ſecans et axi occurrens in s. Ex punctis M et V ducantur ipſi SC parallelae applicatæ MP et VZ ad CZ tanquam axem, atque per M ducatur Mr axi CZ parallela. Vocetur CP = x et PM = y, erit PZ = Δx = Mr, et rV = Δy. Poſita vero ratione MP : VZ eadem erit Δx conſtans. Cum vero ſit MP : VZ ratio conſtans, erit ſimul VZ — MP : MP, ſeu Vr : MP ratio conſtans. Eſt vero Vr : MP = Mr : Ps; proinde Ps, poſita ratione MP : VZ eadem, eſt quantitas conſtans, ſub hac enim hypotheſi Mr eſt quantitas conſtans, et ratio Mr : Ps conſtans. Habemus igitur $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{Ps}$, ex qua æquatione fit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{Ps}$. Accedente puncto V ad M, Δx, Δy et Ps variantur, y et x conſtantibus. Coincidente puncto V cum ipſo M, Δy evaneſcit et cum ea ſimul Δx, ſecans Vs cadit in tangentem TM, et punctum s cum puncto T coincidit, ita ut ex Ps fiat PT, quæ erit *ſubtangens* curvæ. Limes igitur

tur rationis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eſt $\frac{y}{PT}$, proinde fit $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{PT}$. Quia praeterea eſt $\Delta x = \frac{BGED}{AC}$, et $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{BGED}{\Delta y . AC} = \frac{\Delta . AGBF}{\Delta y . AC}$; erit $\frac{dx}{dy} = \frac{d . AGBF}{dy . AC} = \frac{GB . dy}{dy . AC} = \frac{AC . AF}{y . AC} = \frac{AF}{y}$. Ergo $\frac{AF}{y} = \frac{PT}{y}$, et $AF = PT$. Definiri igitur poteſt logiſtica per æquationem $\frac{dx}{b} = \frac{dy}{y}$, quando ſubtangens littera b denotatur, vel per $x = b \int \frac{dy}{y}$, vel loco y ſcripto $a+y$, per $x = b \int \frac{dy}{a+y}$, et l denotante logarithmum naturalem, erit $x = b\, l \frac{a+y}{a}$.

§. 341.

F.290. Quæ igitur hyperbola per areas, Logiſtica per lineas exponit, ita ut quæcunque eam in rem de hyperbolis dicta ſunt, ſimul de logiſticis valeant. Quælibet ſyſtema logarithmicum ſibi proprium continet, ita ut in diverſis logiſticis abſciſſae eidem rationi applicatarum reſpondentes ſint ut ſubtangentes. Poſſunt tamen haec ſyſtemata omnia una eademque logiſtica exprimi pro diverſa expreſſione numerica ſubtangentis ſeu moduli. Data abſciſſa x in logiſtica ex ratione $\frac{a+y}{a}$ habetur quadratura arearum hyperbolae aſymtoticarum, proinde logiſtica vocari poteſt *quadratrix hyperbolae*. Prout magnitudo arearum hyperbolicarum datur per canonem logarithmorum, ſic quoque conſtruitur Logiſtica per cun-

eundem. *Dentur enim duo puncta A et M Logiſticae conſtruendae, et axis ſeu aſymtota Logiſticae.* Ex M et A demittantur perpendicula MP et AC in axem, atque dabitur ratio MP : AC cum logarithmo CP. Aſſumatur ratio quaevis alia CD : CA, et fiat ut logarithmus tabularis rationis datae MP : AC ad log. tab. rationis aſſumtæ CD : CA, ſic CP ad quartum CZ. Lateribus DC et CZ fiat rectangulum CV, et erit V punctum in Logiſtica. *Quando unum punctum M datur et Axis cum modulo*; ex M demiſſo perpendiculo MP in Axem, fiat PT = modulo, atque ratio MP : TN = rationi modulari, erit N in logiſtica, tum vero reliqua fiunt ut ante. *Data ſit ſubtangens ſola ſeu modulus*, atque aſſumta aſymtota CR ex puncto ejus C quocunque ducatur perpendicularis, atque in ea capiatur CA magnitudinis arbitrariæ. Fiat CP = modulo, et capiatur CA : CB = rationi modulari. Lateribus BC et CP compleatur rectangulum CM, erit M in logiſtica. *Denique detur Logiſtica deſcripta et quaeratur modulus* Ducta ordinata qualibet CA capiatur CA : CB = rationi modulari. Per B ducatur axi parallela curvæ occurrens in M, atque ex eo demittatur in axem perpendiculum MP, erit CP ſubtangens ſeu modulus.

§. 342.

Quando logiſtica conſtruitur ex hyperbola æquilatera, cujus quadratum inſcriptum eſt CF = 1, ut fiat AC = AF, etiam modulus ſeu ſubtangens in logiſtica fit = 1 et poſito FB = CF fit ratio CA : CB ratio modularis, et ideo CB baſis logarithmorum naturalium. Quia igitur hoc caſu ſubtangens logiſticae fit = 1, eadem repræſentat ſyſtema logarithmorum naturalium. Aequatio logiſticae $x = b\, l\frac{y}{a}$, quia jam fit $b = 1$ et $a = 1$, nunc abit in $x = ly$, et poſita baſe logarithmorum naturalium $= e$, fit $e^x = y$, quæ eſt æquatio exponentialis ipſam logarithmicam exprimens, et proinde eadem curvis expo-

nentialibus jure annumeratur. *Quantitas* enim *exponentialis* eſt omnis dignitas mathematica, cujus exponens eſt variabilis. Quo igitur natura quantitatum ut et *curvarum exponentialium*, quæ generatim omnes iſtæ erunt, in quarum aequationem quantitates exponentiales ingrediuntur, eo melius innoteſcat; inquiramus in methodum inveniendi ejusmodi ſunctionum differentialia. Quare ſi primo fuerit $= y = a^x$, erit, ſumtis logarithmis, $ly = xla$, cujus æquationis differentialis eſt $M\frac{dy}{y} = dxla$, unde concluditur $dy = \frac{ydxla}{M}$. Eſt autem $y = a^x$, proinde $dy = a^x dxla : M$. Quodſi vero ſumantur logarithmi naturales æquationis $y = a^x$, ut ſit $M = 1$, erit $dy = a^x dxla$. Ob calculi igitur commoditatem perpetuo ſumi poſſunt logarithmi naturales, ita ut character l in ſequentibus perpetuo logarithmum naturalem denotet, niſi contrarium expreſſe indicetur. Atque hoc ſuppoſito erit $d.a^x = a^x dxla$, et generaliter quoque, ſi eſt p functio quæcunque ipſius x, erit $d.a^p = a^p dpla$. Unde ſequentem deducimus regulam: *Quantitatis exponentialis, primi gradus* a^p *differentiale, ſi quantitas ad exponentem variabilem elevata eſt conſtans, erit productum ex ipſa quantitate exponentiali* a^p, *differentiali exponentis* p *et logarithmo conſtantis* a, *quæ ad exponentem variabilem eſt evecta.* Cum la^p ſit $= pla$ et proinde $d.la^p = dpla$, eadem regula ſic quoque enuntiari poteſt: *Quantitatis exponentialis* a^x *differentiale eſt ipſa haec quantitas per differentiale logarithmi ipſius multiplicata.* Ubi notandum eſt ipſam hanc regulam adeo generalem eſſe, ut ad omnis generis quantitatum differentialia ſe extendat. Sit enim y functio quæcunque ipſius x, vel algebraica vel tranſcendens, erit ejus differentiale $dy = y\frac{dy}{y}$. Fit igitur $d.e^x = e^x dxle = e^x dx$, quando e denotat baſin logarithmorum

rum naturalium, tum enim eſt $le = 1$. Poſito dx conſtante facile inveniuntur differentialia ſequentium ordinum. Erit enim $dd.e^x = e^x dx^2$; $d^3 e^x = e^x dx^3$, $d^4 e^x = e^x dx^4$, et ita porro.

§. 343.

Si ipſa quantitas elevata eſt variabilis, hic caſus facile ad eum reducitur, ubi quantitas elevata eſt conſtans. Quando enim ſunt p et q variabiles quæcunque, atque vel functiones ejusdem variabilis x, ut una ab altera pendeat, atque ipſius p^q differentiale quæratur; erit $l.p^q = qlp$, et poſito $e =$ baſi logarithmorum naturalium, fit quoque $le^{qlp} = qlp$, proinde $lp^q = le^{qlp}$, atque ideo $p^q = e^{qlp}$, et $d.p^q = d.e^{qlp}$. Ex quo ſimul patet, eſſe $e^{lp} = p$, utriusque enim quantitatis logarithmus eſt lp. Fit autem

$$d.e^{qlp} = e^{qlp}\left(dqlp + \frac{qdp}{p}\right) = p^q\left(dqlp + \frac{qdp}{p}\right) = p^q dqlp + p^q q \frac{dp}{p} = p^q dqlp + qp^{q-1}dp.$$

Ex quo habetur $d.p^q = p^q dqlp + qp^{q-1}dp$. Si igitur fuerit $y = x^x$, erit $dy = x^x dxlx + x^x dx$, unde ſimul ſequentium ordinum differentialia habentur. Invenitur enim

$$\frac{ddy}{dx^2} = x^x\left(\frac{1}{x} + (1+lx)^2\right); \quad \frac{d^3y}{dx^3} = x^x\left((1+lx)^3 + \frac{3(1+lx)}{x} - \frac{1}{xx}\right), \text{ etc.}$$

Si proponantur quantitates exponentiales ſecundi et ſequentium ordinum, atque adeo ipſi exponentes fuerint denuo quantitates exponentiales; differentiatio ſecundum eadem præcepta inſtituetur. Differentianda ſit quantitas $y = e^{e^x}$, atque eum in finem ſtatuatur $e^x = p$, ut ſit $e^{e^x} = e^p$, erit $dy = e^p dp$; at eſt $dp = e^x dx$, unde fit $dy = e^{e^x} e^x dx$, ſi fuerit y =

$= e^{e^{e^x}}$, erit $dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x\, dx$. Quando vero eſt $y = p^{q^r}$, ſtatuatur $q^r = z$, erit $p^{q^r} = p^z$, proinde $dy = p^z\, dzlp + zp^{z-1}dp$, eſt autem $dz = q^r drlq + rq^{r-1} dq$, unde habetur $dy = p^z q^r\, drlp.lq + p^z rq^{r-1} dqlp + p^z q^r \frac{dp}{p} = p^{q^r} q^r \left(drlp.lp + \frac{rdqlp}{q} + \frac{dp}{p}\right)$.

§. 344.

Quando eſt $y = a^x$, habemus $\frac{dy}{dx} = a^x\, la$, $\frac{ddy}{dx^2} = a^x (la)^2$, $\frac{d^3y}{dx^3} = a^x (la)^3$ etc. Poſito igitur $x + \Delta x$ loco x, erit $y + \Delta y = a^{x+\Delta x} = a^x \left(1 + \frac{\Delta x la}{1} + \frac{\Delta x^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\Delta x^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\Delta x^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \text{etc}\right)$ quæ ſeries ſi dividatur per a^x prodibit $a^{\Delta x} = 1 + \frac{\Delta x la}{1.2.} + \frac{\Delta x^2 la^2}{1.2.} + \frac{\Delta x^3 (la)^3}{1.2.3.} + \frac{\Delta x^4 (la)^4}{1.2.3.4.} +$ etc, vel ſcripto z pro Δx fit $a^z = 1 + \frac{zla}{1} + \frac{z^2 (la)^2}{1.2.} + \frac{z^3 (la)^3}{1.2.3.} + \frac{z^4 (la)^4}{1.2.3.4.} +$ etc. Sumto z negativo, erit $a^{-z} = 1 - \frac{zla}{1} + \frac{z^2 (la)^2}{1.2.} - \frac{z^3 (la)^3}{1.2.3.} + \frac{z^4 (la)^4}{1.2.3.4.} -$ etc. ex quarum combinatione oritur $\frac{a^z + a^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2 (la)^2}{1.2.} + \frac{z^4 (la)^4}{1.2.3.3.} + \frac{z^6 (la)^6}{1.2.3.4.5.6} +$ etc, et $\frac{a^z - a^{-z}}{2} = \frac{zla}{1} + \frac{z^3 (la)^3}{1.2.3}$

+

$\frac{z^5(la)^5}{1.2.3.4.5.} + \frac{z^7(la)^7}{1.2.3.4.5.6.7.} +$ etc, ubi *la* ſemper denotat logarithmum naturalem numeri *a*. Hujus formulae ope ex dato quovis logarithmo numerus ei conveniens reperiri poteſt. Sit enim propoſitus logarithmus quicunque *u* ad canonem, in quo numeri *a* logarithmus $=1$ ſtatuitur, pertinens. Quaeratur in eodem canone logarithmus *x* proxime ad *u* accedens, ſitque $u=x+\omega$ numerus autem logarithmo *x* conveniens ſit $y=a^x$, erit numerus logarithmo $u=x+\omega$ reſpondens $=a^{x+\omega}=z$, fietque $z=y\left(1+\frac{\omega la}{1}+\frac{\omega^2 la^2}{1.2.}+\frac{\omega^3(la)^3}{1.2.3.}+\frac{\omega^4(la)^4}{1.2.3.4.}+\text{etc,}\right)$ quæ ſeries ob ω numerum valde parvum vehementer converget. Quando terminorum æquationis $y=a^x$ logarithmi ſumuntur artificiales, quorum modulus eſt *m*, et *l* denotet logarithmum artificialem, fit $ly=xla$, et proinde $m\frac{dy}{y}=dxla$, ex quo fit $\frac{dy}{dx}=ymla=a^x\,mla$, $\frac{ddy}{dx^2}=a^x\,m^2(la)^2$, $\frac{d^3y}{dx^3}=a^x\,m^3(la)^3$ etc. Ideo $a^z=1+\frac{zmla}{1}+\frac{z^2m^2(la)^2}{1.2.}+\frac{z^3m^3(la)^3}{1.2.3.}+\frac{z^4m^4(la)^4}{1.2.3.4.}+$ etc. Quando igitur eſt *a* baſis logarithmorum artificialium, quorum modulus eſt *m*; hæc æquatio relationem inter baſin logarithmicam *a* et modulum *m* oſtendit. Poſito enim $z=1$, erit $a=1+\frac{m}{1}+\frac{m^2}{1.2}+\frac{m^3}{1.2.3}+\frac{m^4}{1.2.3.4}+$ etc. Poſito autem $m=1$, fit *a* baſis logarithmorum naturalium $=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+$ etc, quae igitur ſeries hoc modo facilius invenitur, quam per rever-

verſionem ſerierum (§. 334.). Sit alia quantitas exponentialis quæcunque b^z data, atque ſumto a pro baſi logarithmica ſit $b = a^n$, hincque $lb = n$. Ergo cum ſit $b^z = a^{nz}$, erit $b^z = 1 + \frac{m^1 z^1}{1} lb + \frac{m^2 z^2}{1.2} (lb)^2 + \frac{m^3 z^3}{1.2.3.} (lb)^3 + \frac{m^4 z^4}{1.2.3.4} (lb)^4 +$ etc. Cognito itaque modulo ex data baſe a quantitas exponentialis quæcunque b^z per ſeriem infinitam exprimi poteſt, cujus termini ſecundum poteſtates ipſius z procedunt.

SECTIO XXII.

DE QVANTIS TRANSCENDENTIBVS QVAE A CIRCVLO PENDENT.

§. 345.

Cum quævis quantitas ab altera quantitate pendens ita, ut iſta mutationem patiatur, prout hæc mutationem ſubit; cumque ſinus arcus cujusdam circularis ab hujus arcus magnitudine, et vice verſa magnitudo arcus a magnitudine ſinus pendeat: patet arcum circularem quemcunque eſſe functionem ſinus ipſius, et vice verſa ſinum eſſe functionem arcus ſui. Quodſi igitur y denotet arcum circuli, cujus ſinus eſt x, qui arcus ſic exprimitur (§. 314.) A $ſin\, x$, erit A $ſin.\, x$ vel y functio ipſius x et quidem tranſcendens, quia ex dato valore ipſius x reſpondens valor functionis $y = \text{A}\, ſin.\, x$ exhiberi nequit per operationes, quæ tandem in poſtulata Geometriæ Elementaris reſolvuntur. Accedit, quod y ſit functio infinitiformis ipſius x, quia eidem ſinui x innumera-

merabiles arcus conveniunt. Pari ratione arcum, cujus coſinus eſt x, ita exprimi docuimus, A *coſ.* x; arcum etiam, cujus tangens, vel cotangens, vel ſecans, vel coſecans, vel ſinus verſus eſt x, ſignis analyticis ſic exprimendum eſſe A *tang.* x, vel A *cot.* x, vel A *ſec.* x, vel A *coſec.* x, vel A *ſv.* x, quæ expreſſiones omnes ob allegatam jam rationem erunt functiones ipſius x transſcendentes. Nihilo tamen minus hæ functiones transſcendentes geometrice repræſentari poſſunt modo prorſus ſimili ei, qua repraeſentantur algebraicæ. Quod negotium infra in Geometria ſubliiniori explicandum erit.

§. 346.

Ex §. 314. ſqq. habentur differentialia omnium hujus generis functionum, quæ poſito radio $= 1$ erunt

$$d.\ A\ \textit{ſin.}\ x = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

$$d.\ A\ \textit{coſ.}\ x = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

$$d.\ A\ \textit{tang.}\ x = \frac{dx}{1+xx}$$

$$d.\ A\ \textit{cot.}\ x = \frac{-dx}{1+xx}$$

$$d.\ A\ \textit{ſec.}\ x = \frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$$

$$d.\ A\ \textit{coſec.}\ x = \frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$$

$$d.\ A\ \textit{ſv.}\ x = \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$$

uanquam ergo arcus, cujus ſinus, vel coſinus, vel tan-ens, vel cotangens, vel ſecans, vel coſecans, vel ſi-us verſus datur, eſt quantitas transſcendens, tamen us differentiale ſeu potius ratio $\frac{dy}{dx}$ erit functio alge-

braica

braica, ac propterea quoque, ſi capiantur differentialia ſecunda, tertia, quarta et ſequentia, erunt $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ etc. functiones algebraicae. Ceterum regulae hujus differentiationis in ſequentibus exemplis potetunt applicari.

Si ſit $y = \text{A } ſin\, 2x\sqrt{(1-xx)}$, ponatur $p = 2x\sqrt{(1-xx)}$ ut ſit $y = \text{A } ſin.\, p$, erit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$. Eſt vero $dp = 2dx\sqrt{(1-xx)} - \frac{2xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2dx(1-2xx)}{\sqrt{(1-xx)}}$, et $\sqrt{(1-pp)} = 1 - 2xx$, quibus ſubſtitutis erit $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Si ſit $y = \text{A } ſin\, \frac{1-xx}{1+xx}$, ponatur $\frac{1-xx}{1+xx} = p$, erit $dp = \frac{-4xdx}{(1+xx)^2}$ et $\sqrt{(1-pp)} = \frac{2x}{1+xx}$. Quare cum ſit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$, habetur $dy = \frac{-2dx}{1+xx}$.

Si ſit $y = \text{A } tang\, \frac{2x}{1-xx}$, fiat $\frac{2x}{1-xx} = p$, et erit $1 + pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2}$ et $dp = \frac{2dx(1+xx)}{(1-xx)^2}$; quare cum ſit $dy = \frac{dp}{1+pp}$, erit $dy = \frac{2dx}{1+xx}$.

Si fuerit $y = \text{A } tang\, \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, ponatur $\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x} = p$, ut ſit $pp = \frac{2+xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx}$

et $1+pp = \frac{2+2xx-2\surd(1+xx)}{xx} = \frac{2(\surd(1+xx)-1)\surd(1+xx)}{xx}$.

Eſt vero $dp = \frac{-dx}{xx\surd(1+xx)} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(\surd(1+xx)-1)}{xx\surd(1+xx)}$ et $dy = \frac{dp}{1+pp}$, proinde $dy = \frac{dx}{2(1+xx)}$.

Quando eſt $y = e^{A\,ſin.\,x}$, hæc formula quoque per præcedentia differentiabitur. Fiat enim $dy = e^{A\,ſin.\,x} \frac{dx}{\surd(1-xx)}$. Atque hoc modo omnes functiones variabilis x, in quas præter logarithmos atque exponentiales quantitates etiam arcus circulares ingrediuntur, differentiari poterunt.

Quoniam ſi ſit y ejusmodi functio tranſcendens ipſius x, quales hucuſque conſideravimus, $\frac{dy}{dx}$ eſt functio algebraica, horum functionum differentialia ſecunda et ſequentia per ea, quæ de functionum algebraicarum differentiatione expoſita ſunt, invenientur. Si nimirum dx ſumatur conſtans, atque ſit $y = A\,ſin.\,x$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\surd(1-xx)}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$,

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}, \quad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}.$$

§. 347.

§. 347.

Ex ſerie §. 316. inventa, quæ exprimit arcum circuli ex data tangente, deduci poſſet ſeries exprimens tangentem ex dato arcu per præcepta §. 252. Atque eodem modo inventa per calculum integralem ſerie, quæ exprimit arcum ex dato ſinu, coſinu, etc, *per reverſionem* deduceretur ſeries exprimens ſinum, coſinum, etc, ex dato arcu. Sed breviori via ejusmodi ſeries eruuntur ipſius calculi differentialis ope. Atque ut methodus eum in finem ab Analyſtis excogitata explicari poſſit, quærendæ ſunt formulæ differentiales pro ſinu, coſinu, tangente, etc. ex dato arcu.

Sit igitur x arcus circuli, et $ſin.\,x$ denotet ejus ſinum, cujus differentiale inveſtigamus. Ponamus $y = ſin.\,x$, erit $p = A\ ſin.\,y$ et $dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, at ob $y = ſin.\,x$, erit $coſ.\,x = \sqrt{(1-yy)}$, quo valore ſubſtituto erit $dx = \frac{dy}{coſ.\,x}$, et $dy = dx\ coſ.\,x$. Inde regula: *Differentiale ſinus arcus cujusvis æquale eſt differentiali arcus per coſinum multiplicato.* Si igitur fuerit p functio quaecunque ipſius x erit ſimili modo $d.\,ſin.\,p = dp\ cos.\,p$. Deinde ſi fuerit $y = cos.\,x$, erit $\sqrt{(1-yy)} = ſin.\,x$ et $x = A\ cos.\,y$, proinde $dx = \frac{-dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{-dy}{ſin.\,x}$, unde habetur $dy = -dx\ ſin.\,x$. *Differentiale igitur coſinus cujusque arcus dati æquale eſt differentiali arcus negative ſumto per ſinum ejusdem arcus multiplicato.* Atque ſi fuerit p functio quæcunque ipſius x erit $d.\,cos.\,p = -dp\ ſin.\,p$.

§. 348.

Quando eſt $y = tang.\,x$, eris $x = A\ tang.\,y$, et per præcepta ſuperiora fiet $dx = \frac{dy}{1+yy}$. Eſt vero $y =$

tang.

$tang.\,x$, proinde $1+yy = ſec.\,x = \frac{1}{cos.\,x}$, atque $dx = dy\,coſ.\,x^2$, et $dy = \frac{dx}{cos.\,x^2}$. *Tangentis ergo cujusvis arcus differentiale aequale eſt differentiali arcus diviſo per quadratum coſinus ejusdem arcus.* Simili modo ſi proponatur $y = cot.\,x$, fiet $x = A\,cot.\,y$ et $dx = \frac{-dy}{1+yy}$. Sed erit $\surd(1+yy) = coſec.\,x = \frac{1}{ſin.\,x}$, unde habetur $dx = -dy\,ſin.\,x^2$, et $dy = \frac{-dx}{ſin.\,x^2}$. *Proinde cotangentis differentiale aequatur differentiali arcus ſui negative ſumto per quadratum ſinus ejusdem arcus diviſo.* Quia eſt $cot.\,x = \frac{cos.\,x}{ſin.\,x}$, fiet hanc fractionem differentiando $dy = \frac{-dx\,ſin.\,x^2 - dx\,cos.\,x^2}{ſin.\,x^2} = \frac{-dx}{ſin.\,x^2}$, ut ante. Si proponatur ſecans arcus, ut ſit $y = ſec.\,x$, quia erit $y = \frac{1}{cos.\,x}$, fiet $dy = \frac{dx\,ſin.\,x}{cos.\,x^2} = dx\,tang.\,x\,ſec.\,x$. Simili modo ſi fuerit $y = coſec.\,x$, ob $y = \frac{1}{ſin.\,x}$, erit $dy = \frac{-dx\,cos.\,x}{ſin.\,x^2} = -dx\,cot.\,x\,.\,coſec.\,x$; pro quibus caſibus regulas peculiares formare ſuperfluum foret. Si ſinus verſus arcus proponatur, ut ſit $y = ſv.\,x$, quia eſt $y = 1 - cos.\,x$, erit $dy = dx\,ſin.\,x$. Omnes igitur caſus, quibus linea quaedam recta ad arcum circuli relata proponitur, quia ſemper per ſinum coſinumve exprimi poteſt, ſine difficultate differentiari poterunt. Neque ve-

ro tantum differentialia prima, ſed etiam ſecunda et ſequentia per regulas datas invenientur.

§. 349.

Ponamus eſſe $y = ſin. x$, et $z = cos. x$, atque dx eſſe conſtans, erit

$$\frac{dy}{dx} = cos.\,x \qquad \frac{dz}{dx} = -ſin.\,x$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = -ſin.\,x \qquad \frac{ddz}{dx^2} = -cos.\,x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -cos.\,x \qquad \frac{d^3z}{dx^3} = ſin.\,x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = ſin.\,x \text{ etc.} \qquad \frac{d^4z}{dx^4} = cos.\,x \text{ etc.}$$

Pari ratione ſi fuerit $y = tang. x$, et ponatur dx conſtans, habetur

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos.\,x^2}, \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{2\,ſin.\,x}{cos.\,x^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{cos.\,x^4} - \frac{4}{cos.\,x^2},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24\,ſin.\,x}{cos.\,x^5} - \frac{8\,ſin.\,x}{cos.\,x^3}, \quad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{cos.\,x^6} - \frac{120}{cos.\,x^4} + \frac{16}{cos.\,x^2},$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{720\,ſin.\,x}{cos.\,x^7} - \frac{480\,ſin.\,x}{cos.\,x^5} + \frac{32\,ſin.\,x}{cos.\,x^3}.$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = \frac{5040}{cos.\,x^8} - \frac{6720}{cos.\,x^6} + \frac{2016}{cos.\,x^4} - \frac{64}{cos.\,x^2} \text{ etc.}$$

§. 350.

Secundum hæc præcepta quæcunque functiones, in quas ſinus vel coſinus arcuum ingrediuntur, differentiari poterunt, cujus rei exempla erunt ſequentia.

Si ſit $y = 2\,ſin.\,x\ cos.\,x = ſin\,2x$, erit $dy = 2dx\ cos.\,x^2 - 2dx\ ſin.\,x^2 = 2dx\ cos.\,2x$.

Si ſit $y = cos.\,l\frac{1}{x}$, erit poſito $l\frac{1}{x} = p$, $y = cos.\,p$, proinde $dy = -dp\ ſin.\,p$. At, ob $p = l1 - lx$, erit dp

$= -\frac{dx}{x}$, ideoque $dy = \frac{dx}{x}\,\text{ſin.}\,l\frac{1}{x}$.

Si ſit $y = e^{\text{ſin.}x}$, erit $dy = e^{\text{ſin.}x}\,dx\,\text{cos.}x$.

Si ſit $y = e^{\overline{\text{cos.}x}^{\,-n}}$, erit $dy = -\frac{e^{\overline{\text{cos.}x}^{\,-n}}\,n\,dx\,\text{ſin.}x}{\text{cos.}x^2}$.

Si ſit $y = l\left(1 - \sqrt{}\left(1 - e^{\overline{\text{ſin}x}^{\,-n}}\right)\right)$, ponatur $e^{\overline{\text{ſin.}x}^{\,-n}} = p$, atque ob $y = l(1 - \sqrt{}(1 - p))$ erit $dy =$

$\frac{dp}{2(1 - \sqrt{}(1 - p))\sqrt{}(1 - p)}$. At eſt $dp = \frac{e^{\overline{\text{ſin.}x}^{\,-n}}\,n\,dx\,\text{cos.}x}{\text{ſin.}x^2}$, Hoc igitur valore ſubſtituto prodibit $dy =$

$$\frac{-n\,e^{\overline{\text{ſin.}x}^{\,-n}}\,dx\,\text{cos.}x}{2\,\text{ſin.}x^2\left(1 - \sqrt{}\left(1 - e^{\overline{\text{ſin.}x}^{\,-n}}\right)\right)\sqrt{}\left(1 - e^{\overline{\text{ſin.}x}^{\,-n}}\right)}.$$

§. 351.

Quando eſt $y = \text{ſin.}x$, ac loco x ponatur $x + z$, functio y abit in $y + \frac{z\,dy}{dx} + \frac{z^2\,ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{z^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{z^4\,d^4y}{1.2.3.4.dx^4} +$ etc. Cum igitur ſit $\frac{dy}{dx} = \text{cos.}x$, $\frac{ddy}{dx^2} = -\text{ſin.}x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = -\text{cos.}x$, etc, habetur $\text{ſin}(x+z) = \text{ſin.}x + z\,\text{cos.}x - \frac{1}{2}z^2\,\text{ſin.}x - \frac{1}{6}z^3\,\text{cos.}x + \frac{1}{24}z^4\,\text{ſin.}x +$ etc, et ſumto z negativo $\text{ſin}(x-z) = \text{ſin.}x - z\,\text{cos.}x - \frac{1}{2}z^2\,\text{ſin.}x + \frac{1}{6}z^3\,\text{cos.}x + \frac{1}{24}z^4\,\text{ſin.}x -$ etc. Quodſi vero

ro ſtatuatur $y = cos. x$, ob $\frac{dy}{dx} = -ſin. x$; $\frac{ddy}{dx^2} = -cos. x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = ſin. x$, $\frac{d^4y}{dx^4} = cos. x$, etc, habemus $cos. (x+z) = cos. x - z\, ſin. x - \frac{1}{2} z^2\, cos. x + \frac{1}{6} z^3\, ſin. x + \frac{1}{24} z^4\, cos. x$ — etc. et poſito z negativo erit $cos. (x-z) = cos. x + z\, ſin. x - \frac{1}{2} z^2\, cos. x - \frac{1}{6} z^3\, ſin. x + \frac{1}{24} z^4\, cos. x$ + etc. Poſito igitur $x = 0$, cum ſit $cos. x = 1$, et $ſin. x = 0$, habetur $ſin. z = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7$ + etc, et $cos. z = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 + \frac{1}{720} z^6$ + etc. Dato ergo arcu z, ope harum ſerierum ejus ſinus et coſinus inveniri poterunt, poſito ſinu toto $= 1$. Ponatur arcus 90 graduum $= r$; et ponamus eſſe arcum z ad quadrantem ut $m : n$, ſeu eſſe $z = \frac{m}{n} r$, fiet $ſin. \frac{m}{n} r = \frac{m}{n} r - \frac{m^3}{n^3} \times \frac{r^3}{1.2.3} + \frac{m^5}{n^5} \times \frac{r^5}{1.2.3.4.5}$ — etc, et $cos \frac{m}{n} r = 1 - \frac{m^2}{n^2} \times \frac{r^2}{1.2.} + \frac{m^4}{n^4} \times \frac{r^4}{1.2.3.4} - \frac{m^6}{n^6} \times \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6}$ + etc. Denotante igitur π ſemiperipheriam circuli erit $r = \frac{\pi}{2} = 1,\ 57079632679489661923132169 16$.

Subſtituto igitur hoc valore pro r, habemus $ſin. \frac{m}{n} r =$

$$+ \frac{m}{n} \times 1,\ 5707963267948966192313216916$$

$$- \frac{m^3}{n^3} \times 0,\ 6459640975062462536557565636$$

$$+ \frac{m^5}{n^5} \times 8,\ 0796926262461670451205055488$$

$- \frac{m^7}{n^7} \times 0,0046817541353186881006854623$

$+ \frac{m^9}{n^9} \times 0,0001604411847873508218726605$

$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \times 0,0000035988432352120853404580$

$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \times 0,0000000569217292196792681171$

$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \times 0,0000000006688035109811467224$

$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \times 0,0000000000060669357311061950$

$- \frac{m^{19}}{n^{19}} \times 0,0000000000000437706546731370$

$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \times 0,0000000000000002571422892856$

$- \frac{m^{23}}{n^{23}} \times 0,0000000000000000012538995403$

$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \times 0,0000000000000000000051564550$

$- \frac{m^{27}}{n^{27}} \times 0,0000000000000000000000181239$

$+ \frac{m^{29}}{n^{29}} \times 0,0000000000000000000000000549$

que $cos. \frac{m}{n} r =$

$1,0000000000000000000000000000$

$- \frac{m^2}{n^2} \; 1,2337005501361698273543113745$

$$+ \frac{m^4}{n^4}\ 0,2536695079010480136365633659$$

$$- \frac{m^6}{n^6}\ 0,0208634807633529608730516364$$

$$+ \frac{m^8}{n^8}\ 0,0009192602748394265802417158$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}}\ 0,0000252020423730606054810526$$

$$+ \frac{m^{12}}{n^{12}}\ 0,0000004710874778818171503665$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}}\ 0,0000000063866030837918522408$$

$$+ \frac{m^{16}}{n^{16}}\ 0,0000000000656596311497947230$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}}\ 0,0000000000005294400200734620$$

$$+ \frac{m^{20}}{n^{20}}\ 0,0000000000000034377391790981$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}}\ 0,0000000000000000183599165212$$

$$+ \frac{m^{24}}{n^{24}}\ 0,0000000000000000000820675327$$

$$- \frac{m^{26}}{n^{26}}\ 0,0000000000000000000003115285$$

$$+ \frac{m^{28}}{n^{28}}\ 0,0000000000000000000000010165$$

$$- \frac{m^{30}}{n^{30}}\ 0,0000000000000000000000000026.$$

Cum igitur ſufficiat, ſinus et coſinus angulorum ad 45°

noſſe

noſſe, fractio $\frac{m}{n}$ ſemper minor erit quam $\frac{1}{2}$, hincque etiam ob poteſtates fractionis $\frac{m}{n}$ ſeries exhibitae maxime convergent, ita ut plerumque aliquot tantum termini ſufficiant, præcipue ſi ſinus et coſinus non ad tot figuras deſiderentur.

§. 352.

Inventis ſinibus et coſinibus inveniúntur tangentes, cotangentes, ſecantes, coſecantes, ſinus verſi ex formulis $tang.\, z = \frac{ſin.\, z}{cos.\, z}$, $cot.\, z = \frac{cos.\, z}{ſin.\, z}$, $ſec.\, z = \frac{1}{coſ.\, z}$, $coſec.\, z = \frac{1}{ſin.\, z}$, $ſin.\, v.\, z = 1 - cos.\, z$. Atque ex his patet modus, quo canon ſinuum tangentium etc, conſtrui poſſit. Quo conſtructo ſimul logarithmi ſinuum etc, tam naturales quam vulgares inveniuntur ſecundum præcepta §. 335. Ubi iterum tantum opus eſt, ut logarithmi ſinuum et coſinuum per ſeries l. c. exhibitas computentur, quia reliquarum hujus generis linearum ad arcum circuli relatarum per ſolam additionem et ſubtractionem ex logarithmis ſinuum habentur. Eſt enim $l\ tang.\, z = l\, ſin.\, z - l\ cos.\, z$, $l\ cot.\, z = l\ cos.\, z - l\ ſin.\, z$, $l\ ſec.\, z = l\, 1 - l\ cos.\, z$, $l\ coſec.\, z = l\, 1 - l\, ſin.\, z$, et quia $ſv.\, z = \frac{ſin\, \frac{1}{2} z \times ſin.\, z}{cos.\, \frac{1}{2} z}$, erit $l\, ſv.\, z = l\ ſin.\, \frac{1}{2} z + l\ ſin.\, z - l\ cos.\, \frac{1}{2} z$. Quodſi igitur pro rectis hiſce ad arcus circulares relatis ſupputentur logarithmi naturales, multiplicandi erunt omnes per numerum 0, 434294481 etc, ut habeantur vulgares. In tabulis autem vulgaribus ſinus totus non ponitur = 1 ſed = 10000000000, proinde omnes numeri pro ſinibus et reliquis hiſce rectis inventi per hunc numerum debent multiplicari, quod facile fit, locum unitatis a ſiniſtra verſus dextram per 10 loca removendo,

vendo, ut habeantur numeri tabulares pro hiſce rectis Et parem ob rationem logarithmis inventis addi debet l 10000000000, qui eſt 10, ut habeantur logarithmi tabulares.

§. 353.

F. 292. Cæterum quia ſinuum immediata ex arcu inventio non careat prolixitate calculorum, quam plura ad calculum abbreviandum excogitata ſunt compendia, quorum unum, quod inſtar omnium commendari poteſt, hic adpoſuiſſe ſufficiat. Sint BL et PB duo arcus quicunque, atque ſit BL > PB. Facto BD = PB, ducatur diameter BG atque ad eandem ex P et D demittantur perpendiculares PH et DR eæque producantur, donec peripheriæ apud F et I occurrant; erit GI = BD = FG, proinde arcus FCBD = ſemicirculo, et junctis F et D recta FD fit diameter per centrum A tranſiens. Ex L ad FD demittatur perpendicularis LK, atque juncta DL ad eandem ſit AQ perpendicularis. Erit jam angulus CDF = CLF, et quia ΔDER ∾ ΔEKL erit ang. EDR = ELK, proinde CDF + EDR = CLF + ELK, id eſt CDR = KLF. Ergo ΔDCR ∾ ΔFLK ∾ ΔDKL. Unde concluditur CD : CR = DL : LK. Porro eſt ΔAQD ∾ ΔLDK ∾ ΔLDE, proinde DL : LK = DF : FL, AD : CR = DF : FL, ex qua analogia concluditur $\frac{1}{2}$CD : CR $\frac{1}{2}$DF : FL. Eſt vero $\frac{1}{2}$CD = *ſin* $\frac{1}{2}$(BL + PB), CR = *ſin.* BL + *ſin* PB, $\frac{1}{2}$DF = AD = radio, qui ſit = r. Denique AQ ipſi FL parallela, et proinde ob DF : DA = FL : AQ fit FL = 2AQ = 2 *cos* $\frac{1}{2}$(BL − PB). Poſito itaque BL = a et PB = α, erit *ſin* $\frac{1}{2}$($a + \alpha$) : *ſin.* a + *ſin.* α = r : 2 *cos.* $\frac{1}{2}(a - \alpha)$. In tabulis arcus, quorum ſinus ſupputantur, ſunt æquidifferentes. Proinde ratio 2 *cos.* $\frac{1}{2}(a - \alpha)$ evadit conſtans. Arcus $\frac{1}{2}$($a + \alpha$) eſt medius arithmetice proportionalis inter arcus a et α, qui ſi ponatur 1 = m, erit ratio *ſin.* m : *ſin.* a + *ſin.* α conſtans. Proinde ſi duo alii arcus ſint b et β, medius inter eosdem arithmetice proportionalis ſit

erit ſemper $\sin . m : \sin . a + \sin . \alpha = \sin . \mu : \sin . b + \sin . \beta$. Si igitur dantur ſinus arcuum m a α μ b, datur ſinus arcus β. Et hoc modo ſinus ex datis quinque veluti primitivis vel adeo tribus tantum ordine ſe conſequentibus et utcunque in Canone ſitis ſupputari poſſunt reliqui omnes, quod patebit ex ſequenti exemplo.

§. 354.

Dentur ſinus arcuum $6^{\circ}25'$, $6^{\circ}26'$, $6^{\circ}27'$, et quæratur ſinus arcus $6^{\circ}28'$. Proinde habemus

Sinus arcus a $6^{\circ}25' = 0,\ 1117580$
ſinus arcus m $6^{\circ}26' = 0,\ 1120471$
ſinus arcus α $6^{\circ}27' = 0,\ 1123361$
ſinus arcus b $6^{\circ}26' = 0,\ 1120471$
ſinus arcus μ $6^{\circ}27' = 0,\ 1123361$
ſinus arcus β $6^{\circ}28'$ —

$$\sin . m : \sin a + \sin b = \sin \mu : \sin b + \sin \beta$$
$$0,\ 1120471 : 0,\ 2240941 = 0,\ 1123361 : \sin b + \sin \beta$$
Proinde eſt $\sin b + \sin \beta = 0,\ 224672$
ſubtrahatur $\sin b = 0,\ 112047$

et invenitur $\sin \beta = 0,\ 112625$

Quodſi hujus analogiæ ope ſupputentur ſinus omnium arcuum ab $1'$ uſque ad $89^{\circ}\ 59'$ pro coſinibus peculiari calculo opus non eſt, quia iidem tum ſimul habentur. Logarithmi tum ſupputandi ſunt pro quadrantis ſemiſſe. Atque ex ipſis tum colligendi reliqui facile erunt per ſolam additionem et ſubtractionem. Sit enim arcus BR = RD, ducatur chorda BD et radius CR, qui chordam BD apud Q normaliter ſecabit. Ducatur QG ad CB perpendicularis et biſſecetur CB apud O, erit CB : BQ = CQ : QG et CB : CO = DB = BQ ± DE : QG. Proinde BQ × CQ = CO × DE = CB × QG et BQ : CO = DE : CQ. Denotato igitur arcu RB littera z; erit $\sin z : \tfrac{1}{2}r = \sin 2z : \cos z$, et proinde $l \cos z = l\tfrac{1}{2}r + l \sin 2z - l \sin z$. Sic ex logarithmis ſinuum $22^{\circ}\ 30^{\circ}\ 44^{\circ}$ invenitur logarithmus $\cos 22^{\circ}$ ſeu logarithmus ſinus 68°,

qui eſt minimus eorum, qui hac methodo inveniri poſſunt, ſi ipſi ſinus non ultra 45° fuerint computati, quia eſt arcus 2 × 23° = 46°, qui ignoratur.

SECTIO XXIII.

DE REDVCTIONE INTEGRALIVM AD HYPERBOLAE ET CIRCVLI QVADRATVRAM.

§. 355.

Quia differentiale logarithmi variabilis cujuscunque eſt differentiale hujus variabilis per ipſam variabilem diviſum et per modulum ſyſtematis logarithmici multiplicatum; viciſſim ſequitur, *quod integrale fractionis, cujus numerator eſt differentiale denominatoris per conſtantem multiplicatum, ſit logarithmus denominatoris, cujus* modulus invenitur *multiplicando differentiale propoſitum per eam quantitatem, cujus logarithmus eſt integrale quaeſitum, et dividendo per differentiale, hujus quantitatis.* Sic erit $\int m\frac{dx}{x} = lx$, ubi primo determinanda eſt quantitas conſtans adjicienda, ut integrale completum evadat. Quando hoc integrale eſt = 0, poſito $x = 1$, fit $l1 + C = 0$, proinde $C = -l1 = -0$, atque hoc caſu lx eſt integrale completum, quod etiam ex eo patet, quod fit $lx - l1 = l\frac{x}{1} = lx$. Multiplicetur nunc $m\frac{dx}{x}$ per x, et quod prodit dividatur per dx erit quotus = modulo

lo m. Quando eſt $\int m\frac{dx}{x}=0$, ſi $x=a$, fit $la+C=0$, proinde $C=-la$, et $\int m\frac{dx}{x}=lx-la=l\frac{x}{a}$. Quando eſt $\int m\frac{dx}{x}=0$, ſi $x=\frac{1}{b}$ fit $l\frac{1}{b}+C=0$, proinde $C=-l\frac{1}{b}$ et $\int m\frac{dx}{x}=lx-l\frac{1}{b}=lbx$. Modulus pariter invenitur multiplicando $m\frac{dx}{x}$ per $\frac{x}{a}$ vel bx, et quod prodit dividendo per $\frac{dx}{a}$ vel bdx.

§. 356.

Quærendum ſit integrale hujus formulæ differentialis $\frac{z^{n-1}dz}{e+fz^n}$, atque ſtatim obſervo, numeratorem hujus fractionis eſſe differentiale denominatoris per conſtantem $\frac{1}{nf}$ multiplicatum. Proinde ejus integrale eſt $l(e+fz^n)+C$, quod igitur erit $l(e+fz^n)-le=l\frac{e+fz^n}{e}$, ſi fiat $\int\frac{z^{n-1}dz}{e+fz^n}=0$, poſito $z^n=0$. Modulus invenitur multiplicando $\frac{z^{n-1}dz}{e+fz^n}$ per $\frac{e+fz^n}{e}$ et quod prodit, dividendo per $\frac{nfz^{n-1}dz}{e}$, quotus $\frac{1}{nf}$ erit modulus. Quia ratio logarithmi artificialis cujuscunque numeri ad logarithmum naturalem ejusdem numeri perpetuo eſt $m:1$; integrale inventum, denotante l logarithmum naturalem

lem ſic exprimi poteſt $\frac{1}{nf}\, l\frac{e+fz^n}{e}$. Interdum ſi functio fracta differentialis unius variabilis x integranda proponatur, quæ ea deſtituta eſt proprietate, qua ejus numerator eſt differentiale denominatoris; ejus numerator et denominator per talem functionem ipſius x multiplicari poſſunt, quæ efficit, ut ea functionis propoſitæ forma reſtituatur. Sit integranda functio $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$, atque ſub hac forma ejus integrale per quadraturam hyperbolæ exprimi non poteſt. Quodſi vero numerator et denominator per $x+\sqrt{(xx-1)}$ multiplicetur; fiet

$$\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}=\frac{xdx+dx\sqrt{(xx-1)}}{(x+\sqrt{(xx-1)})\sqrt{(xx-1)}}=\frac{dx+\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$$

cujus proinde integrale eſt $l(x+\sqrt{(xx-1)})$. Pari modo ſi integranda proponatur fractio $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-xx)}}$, numeratore et denominatore per $x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)}$ multiplicato fit

$$\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{-xdx+dx\sqrt{-1}.\sqrt{(1-xx)}}{(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})\sqrt{(1-xx)}}=$$

$$\frac{dx\sqrt{-1}-\frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}}}{x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)}}.$$ Integrale igitur quæſitum eſt $l(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})$.

§. 357.

Integranda nunc proponatur fractio $dy=\frac{dx}{1-xx}$, atque ſub hac forma ejus integrale ad logarithmos revocari non poſſe obſervo. Eſt autem fractio $\frac{1}{1+xx}=\frac{1}{2(1+x)}$

$\frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}$, proinde $dy = \frac{dx}{2(1+x)} + \frac{dx}{2(1-x)}$, ubi uterque terminus eſt differentiale logarithmicum. Poſito itaque in primo termino $2+2x = u$, erit $2dx = du$, et $dx = \frac{1}{2}du$. Poſito præterea in ſecundo termino $2-2x = z$, erit $-2dx = dz$, et $dx = \frac{1}{2}dz$, Quibus valoribus ſubſtitutis erit $dy = \frac{du}{2u} - \frac{dz}{2z}$, et proinde $y = \frac{1}{2}lu - \frac{1}{2}lz = \frac{1}{2}l(2+2x) - \frac{1}{2}l(2-2x) = \frac{1}{2}l\frac{2+2x}{2-2x} = \frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}$, vel quoque $y = l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Hoc integrale geometrice inveniri poteſt ſequentem in modum. Centro C et ſemiaxibus CA et CB deſcripta ſit hyperbola æquilatera AP. F.293. Ex centro C ad punctum hyperbolæ quodcunque P ducatur recta CP, ſecans rectam AB in D. Deinde ex puncto P ad axem CA ducta ſit applicata orthogonalis PK, quæ prolongata occurrat aſymtotæ CB in I. Ex punctis A et P ad aſymtotam cadant normales AH et PQ; erit ſector hyperbolicus CAP, vel quadrilaterum hyperbolicum APQH menſura rationis CQ : CH, quae = AH : PQ. Sed ΔABH $\backsim$ ΔPIQ, proinde AH : PQ = AB : IP. Præterea (KI + KP) × IP = AB² (§. 303.) vel KI + KP : AB = AB : IP. Jam in omni proportione geometrica continua, ut $a : am = am : am^2$, concludi poteſt, eſſe $a : am^2 = a^2 : a^2m^4$. Ideo ex proportione KI + KP : AB = AB : IP ſequitur KI + KP : IP = (KI + KP)² : AB², hincque $\sqrt{(KI + KP)} : \sqrt{IP} = KI + KP : AB$. Inſuper ΔCAD $\backsim$ ΔCKP et ΔCAB $\backsim$ ΔCKI, unde AB : AD = KI : KP, ergo AB + AD : AB = KI + KP : KI, et AB − AD : AB = IP : KI, unde AB + AD : AB − AD = KI + KP : IP, et $\sqrt{(AB + AD)} : \sqrt{(AB - AD)} = \sqrt{(KI + KP)} : \sqrt{IP}$ =

AH

AH : PQ. Sit itaque CA = AB = 1, erit CH = AH = $\frac{1}{\sqrt{2}}$, AD = x, CK = y, CQ = u; erunt rationes ſe-quentes omnes æquales $\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{y - \sqrt{(yy-1)}} = \frac{y + \sqrt{(yy-1)}}{1} = \frac{\sqrt{(y+\sqrt{yy-1})}}{\sqrt{(y-\sqrt{(yy-1)}}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; ſ

ſector CAP eſt logarithmus cujuscunque harum ratio[n]
pro modulo = $\frac{1}{2}$, id eſt ſector CAP = $\frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}$, ſi l de[no]tet logarithmum naturalem, uti hic perpetuo ſuppo[nitur.]
Hinc 2CAP = $l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, et integrale quæſitum

$\int \frac{dx}{1+xx} = 2$CAP, Eſt itaque $\frac{1}{2}y = \int \frac{dx}{2(1+xx)}$
CAP, unde habetur nova methodus exprimendi a[reas]
ſectoris hyperbolici ex data AD, quæ hyperbola[m in]
vertice tangit, et inter crura ſectoris CAP inte[rci]pitur.

§. 358.

Si integranda ſit hæc formula $dy = \frac{dx}{1+xx}$, q[uæ]
a priori non differt niſi ſigno, quod in denominatore q[ua]drato xx præfixum eſt; modo prorſus ſimili ad integ[ra]tionem pervenitur. Eſt enim fractio $\frac{1}{1+xx} =$

$\frac{1}{2(1+x\sqrt{-1})} + \frac{1}{2(1-x\sqrt{-1})}$, et proinde dy =

$\frac{dx}{2+2x\sqrt{-1}} + \frac{dx}{2-2x\sqrt{-1}}$. Pro priori itaque termino
$2+2x\sqrt{-1} = u$, erit $2dx\sqrt{-1} = du$, et $dx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$

Pr

Pro termino ſecundo ſit $2 - 2x\sqrt{-1} = z$, erit $-2dx\sqrt{-1} = dz$ atque $dx = -\frac{1}{2\sqrt{-1}} dz$. Ergo eſt $dy = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{du}{u} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{dz}{z}$, atque $y = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(lu - lz) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l((2+2x\sqrt{-1})) - l(2$ … $)) = \frac{1}{\sqrt{-1}} . l \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \; l \frac{\sqrt{(1+x\sqrt{-1})}}{\sqrt{(1-x\sqrt{-1})}}$, … icet quantitatibus imaginariis inquinetur, … impoſſibilem, ſed utique realem denotat … uia evoluta hac expreſſione per ſeriem ſi… ſe mutuo tollunt. Ex §. 333. enim eſt l … $\frac{2x\sqrt{-1}}{1} - \frac{2x^3\sqrt{-1}}{3} + \frac{2x^5\sqrt{-1}}{5} -$ … , quæ ſeries multiplicata per $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ dat … $\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ + etc, quæ eſt expreſ… aris, cujus tangens eſt x et radius $= 1$ … patet, eſſe $y = \int \frac{dx}{1+xx} = A\, tang.\, x$, quod etiam ex §. 346. et 315. immediate ſequitur. Hæc … auſſa eſt, cur arcus circulares a quibusdam Analyſtis … garithmi imaginarii vocentur, quod quomodo intelli… gendum ſit, ex his patet. Quia eſt ſector circuli, cu… us arcus eſt $\int \frac{dx}{1+xx}$ et radius 1, $= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+xx} = \frac{dx}{2(1+xx)} = \frac{1}{4\sqrt{-1}} . l \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} . \frac{\sqrt{(1+x\sqrt{-1})}}{\sqrt{(1-x\sqrt{-1})}}$; etiam ſectores circulares logarith… imaginarii interdum vocantur. Quod igitur ita non in-

intelligi debet, ac ſi arcus vel ſectores circulares eſſent quantitates imaginariae, quippe quae utique reales ſunt. Uſus iſte loquendi tantum introductus eſt ad indicandam analogiam, quae intercedit inter formulas algebraicas, quibus ſectores hyperbolici et arcus vel ſectores circulares ex data tangente exprimuntur. Quia eſt A *tang.x* $=\int\frac{dx}{1+xx}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}.l\frac{1+x}{1-x}$, ſi y denotet hunc arcum, ut ſit $y=$ A *tang.x*; erit $x=$ *tang.y*, et proinde arcus y ex ſua tangente ita poteſt exprimi $y=\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ $l\frac{1+tang.y\sqrt{-1}}{1-tang.y.\sqrt{-1}}$. Eſt vero $tang.y=\frac{ſin.y}{cos.y}$, proinde arcus y ſic quoque poteſt exprimi $y=\frac{1}{2\sqrt{-1}}$

$$l\frac{1+\frac{ſin.y\sqrt{-1}}{cos.y}}{1-\frac{ſin.y\sqrt{-1}}{cos.y}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}.l\frac{cos.y+ſin.y\sqrt{-1}}{cos.y-ſin.y\sqrt{-1}}.$$

§. 359.

Prouti hoc modo arcus circulares ut logarithmi imaginarii formulis algebraicis repraeſentantur; ita quoque ſinus, coſinus, tangentes, cotangentes arcuum circularium ut quantitates exponentiales imaginariae repraeſentari ſolent. Si fuerit $z=$ A *ſin.x*, habetur $dz=\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ (§. 346.). Proinde $dz\sqrt{-1}=\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-xx)}}$ atque $z\sqrt{-1}=\int\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-xx)}}=l(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})$ (§.356.). Ergo, ſi e denotet baſin logarithmorum naturalium, eſt $e^{z\sqrt{-1}}=x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)}$, unde co

cluditur $e^{z\sqrt{-1}} - x\sqrt{-1} = \sqrt{(1-xx)}$, vel ſumto utriusque membri quadrato $e^{2z\sqrt{-1}} - 2e^{z\sqrt{-1}} x\sqrt{-1} - xx = 1 - xx$. Unde $e^{2z\sqrt{-1}} - 1 = 2e^{z\sqrt{-1}} x\sqrt{-1}$, et $x\sqrt{-1} = \frac{e^{2z\sqrt{-1}} - 1}{2e^{z\sqrt{-1}}} = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$.

Proinde $x = ſin.\, z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Deinde ex aequatione $e^{z\sqrt{-1}} = x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-xx)}$ ſequitur $e^{-z\sqrt{-1}} = \frac{1}{x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)}} = -x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-xx)}$. Sed $-x\sqrt{-1} = \sqrt{(1-xx)} - e^{z\sqrt{-1}}$, proinde $e^{-z\sqrt{-1}} = 2\sqrt{(1-xx)} - e^{z\sqrt{-1}}$; $2\sqrt{(1-xx)} = e^{-z\sqrt{-1}} + e^{z\sqrt{-1}}$; et $\sqrt{(1-xx)} = cos.\, z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$. Inſuper quia eſt $tang.\, z = \frac{ſin.\, z}{cos.\, z}$; erit $tang\, z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{(e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}$

$= \frac{e^{2z\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2z\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}$. Denique $cot.\, z = \frac{cos.\, z}{ſin.\, z} =$

$$\frac{(e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}} = \frac{(e^{2z\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}{e^{2z\sqrt{-1}} - 1}.$$

De his formulis idem tenendum eſt, quod de formulis §phi antecedentis eſt monitum. Evolutis iisdem per ſeries (§. 344.) ſigna imaginariorum ſe mutuo tollunt, et ipſae formulae omnino reales evadunt.

§. 360.

Prouti hic inventum eſt $\int\frac{dx}{1+xx} = A\ tang.x$; ita quoque ex §. 346. concluditur, eſſe

$$\int\frac{-dx}{1+xx} = A\ cot.x$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = A\ ſin.x$$

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}} = A\ cos.x$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}} = A\ ſec.x$$

$$\int\frac{-dx}{x\sqrt{(xx-1)}} = A\ coſec.x$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}} = A\ ſv.x.$$

Si itaque fuerit $dy = \frac{adx}{aa+xx}$, quia $\frac{adx}{aa+xx} = \frac{dx}{a+\frac{xx}{a}} = \frac{dx}{a}:1+\frac{xx}{aa}$; erit $y = A\ tang\frac{x}{a}$. Si vero ſit $y = \frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, quia $\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dx:a}{\sqrt{aa-xx)}:a} = \frac{dx}{\sqrt{(1-\frac{xx}{aa})}}$, erit $y = A$ ſin. $\frac{x}{a}$; qui caſus hisque ſimiles facile ſolvuntur. Si $dy = \frac{aadx}{aa+xx}$, erit quidem pariter $y = A\ tang.x$, ſed

radius non eſt $= 1$, niſi $a = 1$. Quare ut verum integrale habeatur obſervandum eſt primo, quod ex hypotheſi ſit $a : x = r$: tangentem arcus y, ſi r denotet numerum, quo exprimitur radius pro quo tabulæ ſinuum et tangentium ſunt computati; quam hic ponere poſſumus $= 1$. Proinde ex hac analogia habetur $tang. y = \frac{x}{a}$ pro radio $= 1$ et proinde $y = A\, tang \frac{x}{a}$ pro radio $= 1$. Sed quæritur iſte arcus pro radio $= a$. Quia igitur arcus ſimiles ſunt ut radii, erit $1 : a = A\, tang \frac{x}{a}$: $y = a\, A\, tang \frac{x}{a}$. Idem quoque exinde perſpicitur, quia $\int \frac{aadx}{aa+xx} = a \int \frac{adx}{aa+xx} = a \times A\, tang \frac{x}{a}$.

§. 361.

Prouti igitur magnitudo potentiæ hyperbolæ vel quoque diverſa denominatio ejusdem potentiæ determinat magnitudinem ſectorum vel quadrilaterorum hyperbolicorum, quæ ſunt menſuræ rationum, in aſymtota ſis reſpondentium; ita quoque radius, quo arcus inter crura anguli cujusdam deſcribitur, determinat illius arcus magnitudinem. Menſuræ ejusdem rationis ſunt ut hyperbolarum potentiae. Ita quoque menſuræ ejusdem anguli ſunt ut radii, quibus deſcribuntur. Haec cauſſa eſt, cur radius hic quoque vocetur *Modulus* eorum integralium, quæ per arcus circulares ſeu menſuras angulorum exprimuntur. Integrale itaque $\int \frac{aadx}{aa+xx}$ ita poterit exprimi $aA\, tang \frac{x}{a}$, ſi expreſſio $A\, tang \frac{x}{a}$ ſemper indicet longitudinem illius arcus cujus tangens eſt $\frac{x}{a}$

$\frac{x}{a}$ pro radio $= 1$, eodem modo, uti ſupra expreſſio lx ſemper denotavit logarithmum numeri x cujus modulus eſt $= 1$. Quodſi denique differentiale $\frac{aadx}{aa + xx}$ per conſtantem quandam C multiplicatum ſit; integrale $aA\ tang\ \frac{x}{a}$ per eandem conſtantem C debet multiplicari, ut ſit $\int \frac{Caadx}{aa + xx} = Ca A\ tang\ \frac{x}{a}$. Ex his itaque generatim concludimus ſequentem propoſitionem. Quoties integranda proponitur fractio rationalis, cujus denominator eſt binomium, ubi unus terminus eſt quadratum conſtantis cujusdam ut a, alter vero quadratum variabilis cujusdam ut x; numerator autem ſit productum ex quadrato conſtantis a in differentiale variabilis dx per novam forſan conſtantem multiplicatum: toties integrale illius fractionis exprimi poteſt per arcum circuli. Idem accidet, ſi fractio ad ejusmodi formam ſit reducibilis, licet prouti proponitur, ea forma ſit deſtituta.

§. 362.

Integranda propoſita ſit fractio $dy = \frac{gdx}{e + fxx}$, atque eadem primo eo reduci debet, ut denominatoris terminus fxx non alium præter unitatem habeat coefficientem; quod fiet numeratorem et denominatorem per f dividendo. Erit enim $dy = \frac{\frac{g}{f}dx}{\frac{e}{f} + xx} = \frac{\frac{g}{f}dx}{r\frac{e}{f} \cdot r\frac{e}{f} + \ldots}$ ubi denominator jam habet formam, quæ requiritur.

Divid

Divido præterea numeratorem $\frac{g}{f}dx$ per $\frac{e}{f}dx$, quotus erit $\frac{g}{e}$, proinde ſi ponatur $\sqrt{\frac{e}{f}} = a$, fit $dy = \frac{g}{e} \times \frac{aadx}{aa + xx}$. Ergo $y = \frac{g}{e} a$ A $tang \frac{x}{a}$, vel, ipſius a valore reſtituto, $y = \frac{g}{e} \cdot \sqrt{\frac{e}{f}}$. A $tang \frac{x\sqrt{f}}{\sqrt{e}}$. Si foret $xx = z^n$, ut ſit $x = z^{\frac{n}{2}}$, haberetur $dx = \frac{n}{2} z^{\frac{n}{2} - 1} dz$, ex quo patet, ſi fuerit $dy = \frac{g\frac{n}{2} z^{\frac{n}{2} - 1} dz}{e + fz^n}$, eſſe $y = \frac{g}{e}\sqrt{\frac{e}{f}}$. A $tang \frac{z^{\frac{n}{2}}\sqrt{f}}{\sqrt{e}}$.

Si vero ſit $dy = \frac{gz^{\frac{n}{2} - 1} dz}{e + fz^n}$, dividendo primo per f, fit $\frac{\frac{g}{f} z^{\frac{n}{2} - 1} dz}{\frac{e}{f} + z^n}$, tum dividendo numeratorem $\frac{g}{f} z^{\frac{n}{2} - 1} dz$, per $\frac{e}{f} \cdot \frac{n}{2} z^{\frac{n}{2} - 1} dz$, quotus erit $\frac{2g}{en}$, unde ponendo $\sqrt{\frac{e}{f}} = a$, concluditur $dy = \frac{2g}{en}$

$\frac{2g}{en}.\sqrt{\frac{e}{f}}.A\,tang\,\frac{z^{\frac{n}{2}}\sqrt{f}}{\sqrt{e}}$. Quæ de additione conſtantium ſæpe jam ſunt monita, hic quoque tenenda ſunt, integrale $\int\frac{gz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}=\frac{2g}{en}.\sqrt{\frac{e}{f}}.A\,tang$ $\frac{z^{\frac{n}{2}}\sqrt{f}}{\sqrt{e}}$ completum non eſt, niſi ea ſub hypotheſi, qua ipſum poſito $z^{\frac{n}{2}}=0$ evaneſcere debet.

§. 363.

Si fuerit $dy=\frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, quia $y=a$ $\int\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, invenitur $y=a\,A\,ſin\frac{x}{a}$ (§. 346.), ubi iterum expreſſio $A\,ſin\frac{x}{a}$ denotat longitudinem arcus cujus ſinus eſt $\frac{x}{a}$ pro radio $=1$. Proinde ſi ſit $dy=\frac{gadx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, fiet $y=ga\,A\,ſin\frac{x}{a}$. Atque ex his ſimilia deduci poſſunt ratiocinia, quæ §. *præc.* ex formula $\frac{gaadx}{aa+xx}=ga\,A\,tang\frac{x}{a}$ fuerunt deducta. Scripto enim $\sqrt{\frac{e}{f}}$ loco a et $z^{\frac{n}{2}}$ loco x, habetur

$\frac{g}{\sqrt{}}$

$$\frac{g.\sqrt{\frac{e}{f}}.\frac{n}{2}z^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{\left(\frac{e}{f}-z^n\right)}} \text{ vel } \frac{ng\sqrt{e}z^{\frac{n}{2}-1}dz}{2\sqrt{(e-fz^n)}}.$$ Eſt

itaque $\int\frac{ng\sqrt{e}.z^{\frac{n}{2}-1}dz}{2\sqrt{(e-fz^n)}}=g.\sqrt{\frac{e}{f}}\,A\,ſin\frac{z^{\frac{n}{2}}\sqrt{f}}{\sqrt{e}}.$

Atque ſi fuerit $dy=\frac{gz^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{(e-fz^n)}}$, habemus $y=$

$\frac{2g}{n\sqrt{e}}.\sqrt{\frac{e}{f}}.\,A\,ſin\frac{z^{\frac{n}{2}}\sqrt{f}}{\sqrt{e}}=\frac{2g}{n\sqrt{f}}.A\,ſin\frac{z^{\frac{n}{2}}\sqrt{f}}{\sqrt{e}}$, quod integrale iterum eo tantum caſu completum eſt, quo illud poſito $z^{\frac{n}{2}}=0$ debet evaneſcere.

SECTIO XXIV.

DE INTEGRATIONE DIFFERENTIALIVM ALGEBRAICORVM VNIVS VARIABILIS COMPLEXORVM.

§. 364.

Differentialia omnium ordinum functionum algebraicarum unius variabilis ſunt functiones algebraicæ; ſed vero exinde concludere non licet, quod propoſito

 d ffe-

differentiali quocunque algebraico, ejus integrale futurum ſit functio algebraica. Repertum enim jam eſt, quod quarundam functionum tranſcendentium, quales ſunt logarithmi et arcus circulares, per ſinus, coſinus, tangentes, cotangentes, ſecantes, coſecantes, ſinus verſos ſuos dati, differentialia evadant functiones algebraicae. Proinde propoſito differentiali algebraico quocunque, integrale ipſius utique poteſt eſſe functio tranſcendens. Ante igitur, quam regulae pro integrandis differentialibus algebraicis complete poterant explicari, neceſſe erat, ut natura quarundam functionum tranſcendentium explicetur, quo ipſum hoc negotium eo meliori ſibiri poſſit ſucceſſu. Cui igitur expediendo ut accingamus nos, ordo jam poſtulat.

§. 365.

Quia generaliter eſt $\int aX^p dX = \frac{a}{p+1} X^{p+1}$ quamcunque variabilem denotet X, poteſt per X quaecunque functio ipſius x algebraica intelligi. *Quodſi igitur alicujus formulae differentialis algebraicae integrale inveniendum ſit; inquirendum eſt, utrum formula differentialis propoſita conſtet ex duobus factoribus, quorum unus ſit functio algebraica quaecunque ad certam quandam dignitatem elevata, alter vero differentiale hujus functionis, quae eſt ſub vinculo exponentis, per conſtantem quandam multiplicatum.* Id *quodſi ita ſe habeat, integrale quaeſitum per regulam fundamentalem inveniri poterit.*

Si ſit $dy = dx\sqrt{(a+x)}$, video primo hoc differentiale ex duobus compoſitum eſſe factoribus dx et $\sqrt{(a+x)}$, quorum unus eſt functio $a+x$ ad dignitatem exponentis $\frac{1}{2}$ elevata, alter vero differentiale functionis $a+x$ per conſtantem multiplicatum. Pono igitur $a+x = z$, erit $dx = dz$ et $\sqrt{(a+x)} = z^{\frac{1}{2}}$, proinde $dy = dz \sqrt{(a+x)} = z^{\frac{1}{2}} dz$ et $y = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} z^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(a+x)$ $= \frac{2}{3}(a+x)\sqrt{(a+x)}$.

Si ſit $dy = xdx\sqrt[3]{(aa+xx)}$, erit hoc differentiale compoſitum ex factoribus xdx et $(aa+xx)^{\frac{1}{3}}$. Ut igitur certior evadam, hujus differentialis integrale per regulam præcedentem inveniri poſſe, differentio functionem $aa+xx$, eritque $d.(aa+xx) = 2xdx$; atque patet factorem xdx eſſe differentiale functionis $aa+xx$ per conſtantem $\frac{1}{2}$ multiplicatum. Ideo pono $aa+xx = z$, erit $2xdx = dz$, et $xdx = \frac{1}{2}dz$, quibus valoribus ſubſtitutis fit $dy = xdx\sqrt[3]{(aa+xx)} = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{3}}dz$, et $\int dy = y = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+1} z^{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{8}z^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}(aa+xx)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}(aa+xx)\sqrt[3]{(aa+xx)}$.

Si ſit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(a+x)}}$, iterum hæc formula differentialis compoſita eſt ex duobus factoribus dx et $(a+x)^{-\frac{1}{2}}$, quorum unus eſt functio $a+x$ ad dignitatem exponentis $-\frac{1}{2}$ elevata, alter vero functionis $a+x$ differentiale per conſtantem 1 multiplicatum. Poſito igitur $a+x = z$, fiet $dy = z^{-\frac{1}{2}}dz$, atque $y = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} z^{-\frac{1}{2}+1} = 2z^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{(a+x)}$.

Si ſit $dy = \frac{\frac{a}{3}dx + \frac{2}{3}bxdx + cx^2dx}{\sqrt[7]{(ax+bxx+cx^3)}}$, differentiale propoſitum eſt productum ex functione $ax+bxx+cx^3$ ad dignitatem exponentis $-\frac{1}{7}$ elevata et differentiali $\frac{a}{3}dx + \frac{2}{3}bxdx + cx^2dx$. Inquirendum igitur eſt, utrum hoc differentiale ſit productum illius, quod oritur ex differentiatione functionis $ax+bxx+cx^3$, in quantitatem conſtantem. Eſt vero $d.(ax+bxx+cx^3) = adx + 2bxdx + 3cx^2dx$, quod multiplicatum per conſtantem $\frac{1}{3}$ dat facto-

factorem. $\frac{a}{3}dx + \frac{2}{3}bxdx + cx^2dx$. Pono igitur $ax + bxx + cx^3 = z$, ut ſit $adx + 2bxdx + 3cx^3dx = dz$, et $\frac{a}{3}dx + \frac{2}{3}bxdx + cx^2dx = \frac{1}{3}dz$, atque fiet $dy = \frac{1}{3}z^{-\frac{1}{7}}dz$, proinde $y = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{7}+1}z^{\frac{1}{7}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{7}}z^{\frac{6}{7}} = \frac{7}{18}\sqrt[7]{z^6} = \frac{7}{18}\sqrt[7]{(ax+bxx+cx^3)^6}$.

§. 366.

Occurrunt ſæpius differentialia, quorum integralia per hanc regulam inveniri non poſſe primo intuitu videntur. Tum vero *omne negotium eo redit, ut ipſa propoſita formula differentialis in aliam formam non variato ipſius valore ita mutetur, ut vel ex eadem tota, vel ſaltem integratione per partes inſtituta ex una aut aliquot partibus ipſius, ſecundum regulam fundamentalem integrale capi queat.* Adferamus primo caſus quosdam facillimos et ſimpliciores, deinde ad magis complicatos progreſſuri.

Si ſit $dy = dx\sqrt{(aaxx + x^4)}$, inveniri non poteſt y, niſi forma ipſius dy aliquo modo mutetur. Statim vero patet, eſſe $\sqrt{(aaxx + x^4)} = x\sqrt{(aa + xx)}$, et proinde $dy = xdx\sqrt{(aa + xx)}$; hinc poſito $aa + xx = z$, ut ſit $2xdx = dz$ et $xdx = \frac{1}{2}dz$, invenitur $dy = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}dz$ atque $y = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}z^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(aa + xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(aa + xx)\sqrt{(aa + xx)}$.

Si ſit $dy = dx\sqrt{(a^3 + 3aax + 3axx + x^3)}$, patet eſſe $a^3 + 3aax + 3axx + x^3 = (a + x)^3$, atque $dy = dx\sqrt{(a + x)^3} = dx(a + x)^{\frac{3}{2}}$, cujus integralis eſt $y = \frac{2}{5}(a + x)^2\sqrt{(a + x)}$. Ad eandem formam reducitur æquatio $dy = (adx + xdx)\sqrt{(a + x)}$. Eſt enim $adx + xdx = (a + x)dx$, ideo $dy = dx(a + x)\sqrt{(a + x)} = dx(a + x)^{\frac{3}{2}}$.

Sic

Sic et integralis hujus æquationis $dy = (3ax^3dx + 4x^4dx)\sqrt{(ax+xx)}$ ſecundum regulam noſtram ſumi poſſe primo intuitu non videtur. Eſt vero $(3ax^3dx + 4x^4dx)\sqrt{(ax+xx)} = (3axxdx + 4x^3dx)\, x\sqrt{(ax+xx)} = (3axxdx + 4x^3dx)\sqrt{(ax^3+x^4)}$. Proinde $y = \frac{2}{3}(ax^3 + x^4) \times \sqrt{(ax^3 + x^4)}$.

§. 367.

Fractio interdum integralem habere non videtur. Numeratore vero et denominatore ipſius per eandem quantitatem multiplicato, integralis per regulam datam invenitur.

Sit $dy = \frac{adx + xdx}{\sqrt{(3a+2x)}}$. Multiplicetur ejusdem numerator et denominator per x, atque erit $dy = \frac{axdx + xxdx}{x\sqrt{(3a + 2x)}} = \frac{axdx + xxdx}{\sqrt{(3axx + 2x^3)}}$, proinde $y = \frac{1}{3}\sqrt{(3axx + 2x^3)}$.

Viciſſim interdum numerator et denominator dividendi ſunt per eandem quantitatem, ut integrale haberi poſſit. Quando eſt $dy = \frac{axxdx}{\sqrt{(aax^2 + x^4)}}$, dividendus eſt numerator et denominator per x, ut fiat $dy = \frac{axdx}{\sqrt{(aa+xx)}}$, et $y = a\sqrt{(aa + xx)}$.

Quando formula differentialis propoſita eſt fractio rationalis, cujus denominator eſt quadratum vel cubus, vel alia poteſtas perfecta, cujus radix eſt algebraice rationalis: extrahenda eſt hæc radix vinculo exponentis includenda atque tum integratio tentanda. Sit $dy = \frac{xdx}{a^4 + 2a^2x^2 + x^4}$, eritque $a^4 + 2aaxx + x^4 = (aa+xx)^2$, proinde $dy = \frac{xdx}{(aa + xx)^2}$, et $y = -\frac{1}{2aa + 2xx}$.

§. 368.

Si duarum quantitatum ſeparatim ſumtarum integrale inveniri nequit, accidit interdum, ut ex conjunctis haberi poſſit. Quodſi fuerit $dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax+xx)}} + \frac{xdx}{\sqrt{(2ax+xx)}} = adx\,(2ax + xx)^{-\frac{1}{2}} + xdx(2ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$, neutrius termini ſeorſim ſumti integrale habetur. Sed additorum $dy = (adx + xdx)\,(2ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$ integrale eſt $(2ax + xx)^{\frac{1}{2}}$. Innititur huic obſervationi aliud artificium transformandi differentiale datum, cujus integrale per regulam haberi non poteſt. Sæpius enim inveniri poteſt aliud differentiale per ſe integrabile, quod dato additum efficit ſummam, cujus integrale ſumi poteſt: ſi itaque ab hoc auferatur integrale quantitatis additæ, remanebit integrale quæſitum. Quærendum ſit integrale ipſius $dy = xdx\sqrt{(a+x)}$. Quod quia ſimpliciter fieri non poteſt, addatur eidem hoc differentiale $adx\sqrt{(a+x)}$, et habebitur $(adx + xdx\sqrt{(a+x)}$, cujus integrale eſt $\frac{2}{5}(a+x)^2\sqrt{(a+x)}$. Ab hoc ſi auferatur integrale ipſius $adx\sqrt{(a+x)}$, quod eſt $\frac{2}{3}a(a+x) \times \sqrt{(a+x)}$ remanebit $\frac{2}{5}(a+x)^2\sqrt{(a+x)} - \frac{2}{3}a(a+x)\sqrt{(a+x)} = y$. Eodem modo invenitur integrale ipſius $x^2dx \times \sqrt{(a+x)}$. Habetur enim integrale ipſius $(aa + 2ax + xx)dx\sqrt{(a+x)}$ ut et differentialis $aadx\sqrt{(a+x)}$, et pari modo inventum ipſius $2axdx\sqrt{(a+x)}$. Proinde etiam habetur integrale reliqui $xxdx\sqrt{(a+x)}$. Pari ratione invenitur integrale differentialis $x^3dx\sqrt{(a+x)}$ vel $x^4dx\sqrt{(a+x)}$ vel generaliter ipſius $x^m dx\sqrt{(a+x)}$ exiſtente m numero integro. Maximi momenti eſt hoc ultimum transformandi artificium. Quare ipſius adhuc in caſibus aliquot ſpecialibus oſtendemus adplicationem, dein inde ad generaliora progreſſuri.

§. 369.

Sit igitur nunc $dy = xdx\sqrt{(2ax+xx)}$, atque patet, xdx eſſe differentiale termini ſecundi binomii $2ax+xx$ per conſtantem $\frac{1}{2}$ multiplicati. Integrum hujus binomii differentiale eſt $2adx+2xdx$, quod per $\frac{1}{2}$ multiplicatum dat $adx+xdx$, proinde quantitatis $(adx+xdx)\sqrt{(2ax+xx)}$ integrale invenitur per regulam. Eſt vero $xdx\sqrt{(2ax+xx)} = (adx+xdx)\sqrt{(2ax+xx)} - adx\sqrt{(2ax+xx)}$, et proinde $y = \frac{1}{3}(2ax+xx)^{\frac{3}{2}} - a\int dx\sqrt{(2ax+xx)}$ integrale quaeſitum, cujus ultimus terminus tanquam cognitus ſpectari poteſt, quia $\int dx\sqrt{(2ax+xx)}$ exprimit aream hyperbolicam APM poſita ſemiaxe hyperbolae aequilaterae $= a$. Conceſſa igitur quadratura hyperbolae aequilaterae integrale, quod quaeritur, inventum eſt. Quia factor xdx eſt differentiale unius termini illius functionis, quae ſub ſigno radicali exiſtit, per conſtantem multiplicatum; patet, quod poſita integra illa functione $2ax+xx =$ variabili cuidam z, hacque aequatione differentiata, ex aequatione differentiali, quae prodit, valor factoris extra vinculum radicale exiſtentis determinari poſſit per differentiale dz in conſtantem multiplicatum $+$ vel $-$ differentiali illius termini functionis z, quod in factore extra vinculum radicale exiſtente deficit. Calculus igitur ſic inſtitui poteſt. Pono $2ax+xx = z$, erit $\sqrt{(2ax+xx)} = z^{\frac{1}{2}}$ et $2adx+2xdx = dz$. Ex ultima aequatione elicio valorem factoris xdx extra vinculum radicale exiſtentis, quia eſt $xdx = \frac{1}{2}dz - adx$. Hunc valorem ſubſtituo in differentiali dato, eritque $xdx(2ax+xx)^{\frac{1}{2}} = xdxz^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}dz - az^{\frac{1}{2}}dx$, ubi terminus primus $\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}dz$ per regulam eſt integrabilis. Integratione igitur peracta et valore pro z reſtituto, fiet $\int xdx(2ax+xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(2ax+xx)^{\frac{3}{2}} - a\int dx(2ax+xx)^{\frac{1}{2}}$, ut ante. Eodem modo, ſi fuerit $dy = xdx\sqrt{(2ax-xx)}$, invenitur

$y =$

$y = -\frac{1}{3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}} + a\int dx\sqrt{(2ax - xx)}$. Exprimit vero $\int dx\sqrt{(2ax - xx)}$ aream circularem APM poſito radio circuli $= a$, ideo conceſſa quadratura circuli integrale, quod quærebatur, inventum eſt.

§. 370.

Quando differentialia hujus formæ $dy = gx^m\, dx X^p$ quæ integranda proponuntur, ea proprietate gaudent, de qua locuti ſumus; ea nimirum, ut factor $gx^m dx$ extra vinculum exponentis p exiſtens ſit differentiale unius termini functionis X: oportet, ut exponens dignitatis m variabilis, quæ extra vinculum exponentis p habetur, unitate minor ſit, quam exponens ejusdem hujus variabilis in uno functionis X termino. Raro autem differentialia, quæ integranda proponuntur, hac proprietate ſunt prædita. Tum igitur alia opus eſt transformatione, qua efficitur, ut exponens dignitatis variabilis x, quæ eſt extra vinculum exponentis p, unitate minor fiat, quam exponens unius eorum, qui ſunt ſub vinculo, terminorum. Omne vero hujus transformationis negotium ea nititur numerorum proprietate, quæ in elementis jam demonſtratur, quod numerus per eundem alium multiplicatus et iterum per eundem diviſus non mutetur. Adplicabimus et hoc negotium ad caſum quendam ſpecialem generaliora in ſequentibus traditurі. Sit $dy = \frac{(x^5 - a^4x)\,dx}{\sqrt{(xx - aa)}}$, et quærenda hujus aequationis integralis. Hunc in finem ſic argumentor. Eſt $dy = (x^5dx - a^4xdx)(xx - aa)^{-\frac{1}{2}} = x^5dx\,(xx - aa)^{-\frac{1}{2}} - a^4xdx\,(xx - aa)^{-\frac{1}{2}}$. Ultimus terminus ea jam proprietate gaudet, de qua nunc ſermo eſt: Prima vero eadem deſtituitur. Proinde id efficiendum eſt, ut exponens ipſius x primi factoris x^5dx unitate minor ſit exponente ipſius x unius termini in altero factore vinculo radicali incluſo. Multiplicato vero nume-

$\sqrt{xx}$

ratore $x^5 dx$ hujus fractionis per x ſeu quod idem eſt per $\sqrt{xx}$ etiam denominator $(xx - ax)^{\frac{1}{2}}$ per $\sqrt{xx}$ erit multiplicandus, ut fractionis valor idem maneat. Ex quo patet, quod creſcente exponente ipſius x extra vinculum radicale unitate, exponentes ipſarum x ſub vinculo duabus unitatibus creſcere debeant. His innituntur ſequentes transformationum regulæ. Quando differentiale quoddam exprimitur per quantitatem rationalem, diviſam per adplicatam circuli vel hyperbolæ, id eſt, vel per $\sqrt{(ax - xx)}$ vel per $\sqrt{(aa - xx)}$, vel per $\sqrt{(ax + xx)}$, vel per $\sqrt{(xx - aa)}$; membrum numeratoris, ubi variabilis plurimas habet dimenſiones, ad plures adhuc dimenſiones elevetur, ſicut et functio ſub vinculo radicali; quæ quotiescunque membrum ſuperius multiplicatur per dimenſionem quandam variabilis, per duplam dimenſionem multiplicanda eſt. Et vice verſa membrum ſuperius dividi poteſt per dimenſionem quandam variabilis, ſi modo membrum ſub ſigno radicali exiſtens per duplam dimenſionem ſimul dividatur. Sic enim fractio ſemper æqualis manebit. Ipſa vero multiplicatio eo uſque continuari debet, donec variabilis maxima dimenſio in radice unitate excedat membrum ejusdem variabilis maximae dimenſionis in numeratore. Tum huic membro in talem formam reducto, addatur quantitas talis, ut de ſumma integrale ſumi poſſit, id quod ſemper fieri poteſt. Hoc facto idem peragi debet cum addita, et ita tandem deſcenditur ad ultimum membrum, cujus integrale poteſt vel per regulam ſumi, vel ſi hoc fieri nequeat, cognitum eſſe ſupponi. Integrabimus igitur per hanc methodum primum formulæ, quæ data eſt, terminum $x^5 dx\,(xx - aa)^{-\frac{1}{2}}$, qui erit per prædentia $=$ $x^9 dx\,(x^{10} - aax^8)^{-\frac{1}{2}}$. Ponatur $x^{10} - aax^8 = z$, erit $10x^9 dx - 8aax^7 dx = dz$, et $x^9 dx = \frac{1}{10} dz + \frac{4}{5} aax^7 dx$, proinde fit $x^5 dx\,(xx - aa)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10} z^{-\frac{1}{2}} dz + \frac{4}{5} aax^7$ dx

$dx\,(x^{10} - aax^8)^{-\frac{1}{2}}$. Porro eſt $\frac{4}{5}aax^7dx\,(x^{10} - aax^8)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}aax^5dx\,(x^6 - aax^4)^{-\frac{1}{2}}$. Ponatur $x^6 - aax^4 = u$, erit $6x^5dx - 4aax^3dx = du$, $x^5dx = \frac{1}{6}du + \frac{2}{3}aax^3dx$, et $\frac{4}{5}aax^5dx = \frac{1}{15}du + \frac{8}{15}a^4x^3dx$, proinde $x^5dx\,(xx - aa)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}z^{-\frac{1}{2}}dz + \frac{1}{15}u^{-\frac{1}{2}}du + \frac{8}{15}a^4x^3dx\,(x^6 - aax^4)^{-\frac{1}{2}}$. Denique erit $\frac{8}{15}a^4x^3dx\,(x^6 - aax^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{15}a^4xdx \times (xx - aa)^{-\frac{1}{2}}$ atque ideo integrale quæſitum integrum $y = \int\frac{1}{10}z^{-\frac{1}{2}}dz + \int\frac{1}{15}u^{-\frac{1}{2}}du + \int\frac{8}{15}a^4xdx\,(xx - aa)^{-\frac{1}{2}} - \int a^4xdx\,(xx - aa)^{-\frac{1}{2}}$, in quo ſinguli termini per regulam inveniuntur. Methodo eadem utendum eſt, ſi datum differentiale ſit quantitas rationalis per adplicatam circuli vel hyperbolæ multiplicata. Tum enim ipſum differentiale propoſitum denuo multiplicandum eſt et ſimul dividendum per ſ factorem ſuum irrationalem, ſicque quantitas ſigno radicali affecta in denominatorem transferenda, ut numerator omnino rationalis evadat. Sic ſi integranda fuerit æquatio $dy = (aax + x^3)dx\,\surd(xx - aa)$, multiplico et ſimul divido hoc differentiale per $\surd(xx - aa)$, eritque $dy = \frac{(aax + x^3)dx\,(xx - aa)}{\surd(xx - aa)} = \frac{x^5dx - a^4xdx}{\surd(xx - aa)}$, cujus integrale §. praec. inventum fuit.

§. 371.

Pari modo invenitur integrale æquationis $dy = (2ax - xx)\,dx\surd(2ax - xx)$, ex qua fit $dy = (4aaxx - 4ax^3 + x^4)dx\,(2ax - xx)^{-\frac{1}{2}} = x^4dx\,(2ax - xx)^{-}$

$-4ax^3dx\,(2ax-xx)^{-\frac{1}{2}} + 4aaxxdx\,(2ax-xx)^{-\frac{1}{2}}$. Eſt vero $x^4dx\,(2ax-xx)^{-\frac{1}{2}} = x^7dx\,(2ax^7-x^8)^{-\frac{1}{2}}$ et poſito $2ax^7-x^8=z$, fiet $14ax^6dx-8x^7dx=dz$, $\frac{7}{4}ax^6dx-x^7dx=\frac{1}{8}dz$, $x^7dx=-\frac{1}{8}dz+\frac{7}{4}ax^6dx$, ex quibus ſubſtitutis fit $x^7dx\,(2ax^7-x^8)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8}z^{-\frac{1}{2}}dz + \frac{7}{4}ax^6dx\,(2ax^7-x^8)^{-\frac{1}{2}}$. Deinde eſt $\frac{7}{4}ax^6dx\,(2ax^7-x^8)^{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{4}ax^5dx\,(2ax^5-x^6)^{-\frac{1}{2}}$, et $-4ax^3dx\,(2ax-xx)^{-\frac{1}{2}} = -4ax^5dx\,(2ax^5-x^6)^{-\frac{1}{2}}$, quibus additis fit $(\frac{7}{4}ax^5dx-4ax^5dx)\,(2ax^5-x^6)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{9}{4}ax^5dx\times(2ax^5-x^6)^{-\frac{1}{2}}$. Poſito igitur $2ax^5-x^6=u$, fiet $10ax^4dx-6x^5dx=du$, $\frac{5}{3}ax^4dx-x^5dx=\frac{1}{6}du$, $\frac{5}{3}aax^4dx-ax^5dx=\frac{1}{6}adu$, $\frac{15}{4}aax^4dx-\frac{9}{4}ax^5dx=\frac{9}{24}adu$, $-\frac{9}{4}ax^5dx=\frac{9}{24}adu-\frac{15}{4}aax^4dx$, ex quibus ſubſtitutis fit $-\frac{9}{4}ax^5dx\,(2ax^5-x^6)^{-\frac{1}{2}} = \frac{9}{24}au^{-\frac{1}{2}}du - \frac{15}{4}aax^4dx\,(2ax^5-x^6)^{-\frac{1}{2}}$. Denique eſt $-\frac{15}{4}aax^4dx\,(2ax^5-x^6)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{15}{4}aax^3dx(2ax^3-x^4)^{-\frac{1}{2}}$ et $4aaxxdx\,(2ax-xx)^{-\frac{1}{2}} = 4aax^3dx\,(2ax^3-x^4)^{-\frac{1}{2}}$ quibus additis erit $(-\frac{15}{4}aax^3dx+4aax^3dx)\,(2ax^3-x^4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}aax^3dx\,(2ax^3-x^4)^{-\frac{1}{2}}$. Quare nunc pono $2ax^3-x^4=s$, ut ſit $6axxdx-4x^3dx=ds$, $\frac{3}{2}axxdx-x^3dx=\frac{1}{4}ds$, $\frac{3}{2}a^3xxdx-aax^3dx=\frac{1}{4}aads$, $\frac{3}{8}a^3xxdx-\frac{1}{4}aax^3dx=\frac{1}{8}aads$, $\frac{1}{4}aax^3dx=-\frac{1}{8}aads+\frac{3}{8}a^3xxdx$. His ſubſtitutis fit $\frac{1}{4}aax^3dx\,(2ax^3-x^4)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8}aas^{-\frac{1}{2}}ds+\frac{3}{8}a^3xxdx(2ax^3-x^4)^{-\frac{1}{2}}$. Tandem eſt $\frac{3}{8}a^3xxdx\times(2ax^3-x^4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}a^3xdx(2ax-xx)^{-\frac{1}{2}}$; hinc poſito $2ax-xx=t$, ut ſit $2adx-2xdx=dt$, $2a^4dx-2a^3xdx=a^3dt$, $a^4dx-a^3xdx=\frac{1}{2}a^3dt$, $\frac{3}{8}a^3xdx$ =

$= -\frac{3}{16}a^3dt + \frac{3}{8}a^4dx$, fiet $\frac{3}{8}a^3xdx\ (2ax-xx)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{16}a^3t^{-\frac{1}{2}}dt + \frac{3}{8}a^4dx(2ax-xx)^{-\frac{1}{2}}$. His omnibus collectis fit $dy = -\frac{1}{8}z^{-\frac{1}{2}}dz + \frac{9}{2p}au^{-\frac{1}{2}}du - \frac{1}{8}aas^{-\frac{1}{2}}ds - \frac{3}{16}a^3t^{-\frac{1}{2}}dt + \frac{3}{8}a^4dx(2ax-xx)^{-\frac{1}{2}}$, cujus integralis quatuor termini primi habentur per regulam, ultimus vero conceſſa quadratura circuli.

§. 372.

Quodcunque ſit differentiale propoſitum, caute animadvertendum eſt, num poſſit per transformationem quamcunque, nimirum vel per multiplicationem, vel per diviſionem, vel etiam per extractionem radicis redigi ad quantitatem, in qua habeatur applicata circuli vel hyperbolæ ducta in quantitatem rationalem et integram. Hoc ſi fieri poſſit, per methodum deſcriptam aut integrale differentialis dati exacte invenietur, aut ad quadraturam circuli vel hyperbolæ reducetur. Sit verbi gratia $dy = (a^3 + axx - x^3)\sqrt{\frac{a+x}{x}}$, Multiplico numeratorem et denominatorem fractionis ſigno radicali affectae per numeratorem, et productum numeratoris in ſe ipſum per alterum factorem rationalem, ita ut exinde fiat fractio, cujus numerator eſt pure rationalis, et denominator irrationalis. Erit nempe $(a^3 + axx - x^3)dx \sqrt{\frac{a+x}{x}} = (a^4 + aaxx + a^3x - x^4)dx\ (ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$ cujus integrale per methodum ſatis diſtincte jam deſcriptam invenitur.

§. 373.

Propoſita ſit integranda æquatio $dy = x^{-1}dx(2a$ … $+ x^6)^{\frac{1}{4}}$, atque ſtatim patet, ſub hac forma ejusdem integralem inveniri non poſſe. Tentanda igitur eſt transformatio eaque efficiendum, ut exponens ipſius x extra vin

vinculum radicale unitate minor fiat exponente ipſius x unius ſub vinculo radicali exiſtentis termini. Poteſt quidem eum in finem integrum differentiale per factorem $\sqrt{(2ax^5+x^6)}$ multiplicari et ſimul per eundem dividi, uti in præcedentibus factum eſt, ſed vero et alia methodo eodem fundamento nixa ad eundem pervenire poſſumus ſcopum. Multiplicato enim factore $x^{-1}dx$ per certam ipſius x dignitatem et ſimul altero factore $(2ax^5 + x^6)^{\frac{1}{2}}$ per eandem ipſius x dignitatem diviſo, dati differentialis valor iterum invariatus manet. Quodſi igitur $x^{-1}dx$ per x ſeu quod idem eſt per $\sqrt{xx}$ multiplicetur, etiam alter factor $(2ax^5 + x^6)^{\frac{1}{2}}$ per $\sqrt{xx}$ eſt dividendus. Elevetur igitur x^{-1} ad plures dimenſiones. Quotiescunque vero $x^{-1}dx$ multiplicatur per dimenſionem quandam variabilis x, toties functio $2ax^5+x^6$ vinculo radicali incluſa per duplam hanc dimenſionem dividenda eſt, ut valor differentialis propoſiti idem maneat. Sic colligimus eſſe $dy = x^{-1}dx(2ax^5+x^6)^{\frac{1}{2}} = xdx\,(2ax + xx)^{\frac{1}{2}}$, cujus integrale ſupra jam inventum fuit.

§. 374.

Ea formulas differentiales, quæ integrandae proponuntur, transformandi methodus, qua loco variabilis, quam problema continet, alia variabilis introducitur, a priori pendens, et qua in præcedentibus in facilioribus quibusdam caſibus uſi jam ſumus, uſum habet in calculo integrali admodum late patentem. Quodſi enim fuerit y functio quæcunque ipſius z, atque inter variabilem z et aliam variabilem x detur æquatio quæcunque, tum quoque y per x definiri poterit. Propoſita igitur ſit formula differentialis unius variabilis x quæcunque formae $\frac{dy}{dx} = P$, exiſtente P functione variabilis x; atque aſ-

ſumta æquatione, qua x per novam vrriabilem z defini-tur, ſi z loco x, atque dz loco dx introducatur; formu-la differentialis propoſita ſæpe in talem mutatur, cujus integrale per cognitas methodos haberi poteſt. Tum vero hoc integrale erit functio ipſius z. Loco z autem variabilis x iterum introduci poteſt ex æquatione inter z et x aſſumta. Quod ad hos transformationum modos ipſos adtinet, tales proponere hoc loco tantum poſſu-mus, quorum frequentior uſus eſt, quia omnes fere, qui vel ex cogitati jam ſunt, vel excogitari adhuc poſſunt, ad caſus ſpeciales tantum reſtricti ſunt.

§. 375.

Prior itaque modus, isque facillimus, quo etiam in antecedentibus ſæpius jam uſi ſumus, is eſt, qui abſol-vitur, ponendo quantitatem, quæ ſub ſigno radicali in-cluditur, æqualem variabili cuidam z ſoli, et convertendo functionem datam ſecundum hanc poſitionem in aliam variabilis z. Hoc enim facto poſterioris functionis, quæ plerumque multo brevior evadit, integrale quæritur, quod iterum converti poteſt in integrale quæſitum, ſubſtitu-endo valorem variabilis aſſumtæ. Opus non eſt, ut ſim-pliciſſimus iſte modus exemplis ulterius illuſtretur, quia in §§. 365. *et ſq.* hujus rei exempla jam fuerunt propoſita. Prouti vero ibidem quantitas ſub vinculo radicali exiſtens variabili cuidam z æquata eſt, ita quoque ipſa quanti[tas] irrationalis optato ſucceſſu ponitur æqualis variabili cui-dam z ſoli, tumque reliqua peraguntur, ut ante.

$dy = (ax + xx)dx\,\sqrt{(a+x)}$. Pono $\sqrt{(a+x)} = z$, e[t] $a + x = zz$; $x = zz - a$; $dx = 2zdz$; atque $dy = 2z^6$[dz] $- 2az^4dz$; cujus integrale nunc facile et absque mul[tis] ambagibus ſtatim invenitur $= \frac{2}{7}y^7 - \frac{2}{5}ay^5 = \frac{2}{7}(x+a)$[…] $\sqrt{(x+a)} - \frac{2}{5}a(x+a)^2\sqrt{(x+a)}$. Eodem modo invenitur in-tegrale ipſius $dy = \frac{(aa + 2xx)\,dx}{\sqrt{(aa + xx)}}$ ponendo $\sqrt{(aa+x}$[$x)$] $= z$, ut fiat $aa + xx = zz$, $x = \sqrt{(zz - aa)}$;

$= \frac{zdz}{\surd(zz-aa)}$. Proinde $dy = \frac{(2z^3 - aaz)\,dz}{\surd(z^4 - aazz)}$, atque $y = \surd(z^4 - aazz)$. Si fuerit $dy = \frac{(a-x)\,dx}{\surd(2ax-xx)}$; ponendo $\surd(2ax-xx) = z$, erit $x = a \pm \surd(aa-zz$; $dx = \mp \frac{zdz}{\surd(aa-zz)}$, atque $dy = dz$. Proinde $y = z = \surd(2ax-xx)$. In infinitis aliis caſibus adplicari poteſt hæc regula, et quidem in ejusmodi caſibus, qui ob prolixitatem pro deſperatis fere haberi poſſent. Præterquam enim, quod iſta regula functionem propoſitam plerumque multo breviorem reddat, hunc inſuper uſum habet, quod ſtatim ob oculos ponat, an ex functione ſic transformata integrale peti queat. Alius modus transformandi functiones differentiales propoſitas is eſt, quo variabilis x æqualis ponitur fractioni numeratoris conſtantis, cujus denominator eſt alia quædam variabilis z, reliquis ut ante peractis. Inveniendum ſit integrale ipſius $dy = \frac{a^4dx}{xx\surd(xx \pm aa)}$. Pono $x = \frac{aa}{z}$ erit $dx = -\frac{aadz}{zz}$, porro $dy = -\frac{aazdz}{\surd(a^4 \pm aazz)}$, atque $y = \mp \surd(a^4 \pm aazz) = \mp \surd(a^4 \pm \frac{a^6}{xx})$. Ad formam hujus differentialis reducitur iſta æquatio $dy = \frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$, ponendo $aa + xx = zz$, quo facto erit $xx = zz - aa$, $dx = \frac{zdz}{\surd(zz-aa)}$, et proinde $dy = \frac{aadz}{zz\surd(aa-zz)}$, cujus integrale habetur per methodum præcedentem.

§. 376.

Præter hos transformationum modos præcipue commendanda eſt is, qui ſequitur, qui vero circa illas duntaxat functiones verſatur, quæ ſignis radicalibus implicata ſunt. Tota illius praxis conſiſtit in eo, ut functiones irrationales in rationales convertantur, ita ut tota functio differentialis propoſita induat rationalitatem, ex qua deinde integrale, ſi fieri poteſt, facile invenitur. Ad hoc igitur negotium expediendum quæſtiones Diophanteae non parum conducunt, ceu in exemplis quibusdam clarius patebit.

Quærendum ſit integrale ipſius $dy = \frac{a^3 dx}{x\sqrt{(ax - xx)}}$, quod per hanc methodum ita præſtabitur. Quia $\sqrt{(ax - xx)}$ eſt quantitas irrationalis, ut rationalis reddatur, oportet, ut $ax - xx$ ſit quadratum. Sit itaque $ax - xx = \frac{aaxx}{zz}$; erit ex hac ſuppoſitione $x = \frac{azz}{zz + aa}$, et proinde $\sqrt{(ax - xx)} = \frac{aaz}{zz + aa}$; $dx = \frac{2a^3 z dz}{(zz + aa)^2}$. Quare facta hac ſubſtitutione erit $dy = \frac{2a^3 dz}{zz}$, cujus integrale facile habetur, nempe $y = -\frac{2a^3}{z} = \sqrt{\frac{4a^5 - 4a^4 x}{x}} = 2aa\sqrt{\frac{a - x}{x}}$.

Quaerendum ſi ſit integrale ipſius $dy = dx \frac{\sqrt[3]{(xx + 2ax + aa)}}{x}$; oportet, ut $xx + 2ax + aa$ ſit cubus. Sit ergo $x + a = z^3$, erit $x = z^3 - a$ et $dx = 3zzdz$, $\sqrt[3]{(xx + 2ax + aa)} = zz$, proinde $dy = \frac{3z^4 dz}{z^3 - a}$, cujus fractionis rationalis integrale ſi haberi poteſt,

poteſt, habebitur ſimul integrale quæſitum. Methodus autem fractiones rationales integrandi infra fuſius explicabitur. Hac itaque methodo propoſitum differentiale ſæpe reducitur ad formam, pro qua integranda denuo ſpecialibus opus eſt regulis.

§. 377.

Et hi quidem, quos adduximus, praecipui caſus ſunt, qui occurrere poſſunt in transformandis differentialibus, quorum integralia quæruntur. Plures quidem alii reſtant a Matheſeos Doctoribus excogitati; ſed quia plerique ad allatos reduci poſſunt, ut et per hos ad optatum perveniri poſſit, et quia attente conſideranti mille alii modi pro datarum differentialium natura ſponte ſeſe offerunt; reliquos merito hic ſeponimus. Ad ſpeciales vero caſus omnia hucuſque tantum adplicavimus, idque conſultum eſſe duximus, ut reliqua generaliora nunc adferenda eo diſtinctius a Matheſeos Studioſis intelligi queant. Omne negotium eo redit, ut hujus formulæ $gx^m\,dx\,(a+bx^n+cx^{2n}+\text{etc.})$ integrale in poteſtate ſit, quod ex iis, quæ §. 311. expoſita ſunt, manifeſtum eſt.

Sit igitur primo propoſita formula differentialis ex duobus factoribus compoſita, quorum unus eſt binomium formæ $a+bx^n$ ad dignitatem quamcunque exponentis p elevatum, atque patet, quod ſi alter factor eam habeat formam $gx^{n-1}dx$, integrale hujus formulæ in poteſtate ſit, quia hic factor eſt differentiale alterius qui eſt ſub vinculo exponentis per conſtantem $\frac{g}{nb}$ multiplicatum. Invenitur enim $\int gx^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p$ ponendo $a+bx^n=z$, ut ſit $nbx^{n-1}dx=dz$, et $x^{n-1}dx=\frac{dz}{nb}$. Fiat ſubſtitutio, et erit $\frac{g}{nb}z^p\,dz=gx^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p$,

 proin-

proinde $\int gx^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p = \int \frac{g}{nb} z^p dz = \frac{gz^{p+1}}{nb(p+1)}$
$= \frac{g(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$. Integratio adhuc ſuccedit, quando factor $gx^{n-1}dx$ multiplicatus fuerit per x^{rn} exiſtente r numero integro poſitivo, ita ut formula differentialis propoſita hanc habeat formam $gx^{rn} \times x^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p$. Ponatur enim $a+bx^n = z$, erit $x^n = \frac{z-a}{b}$, et $x^{n-1}dx$ $= \frac{dz}{nb}$, præterea $x^{rn} = \frac{(z-a)^r}{b^r}$, et $(a+bx^n)^p =$ z^p. Factis igitur ſubſtitutionibus erit $gx^{rn} \times x^{n-1}dx \times$ $(a+bx^n)^p = g\frac{(z-a)^r}{nb^{r+1}} z^p dz$. Quia r eſt numerus integer poſitivus, erit ſeries in quam convertitur $(z-a)^r$ finita. Evolutione igitur actu facta, et quolibet termino per $z^p dz$ multiplicato, integrale cujuslibet hujus ſeriei termini in poteſtate eſt. Quodſi in formula gx^{rn} $\times x^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p$ ſit $n = 1$; habemus $gx^r dx\,(a+bx)^p$, quod differentiale integrabile eſt, quodcumque denotet p, dummodo r ſit numerus integer poſitivus. Poſito enim $a+bx = z$, fit $\int gx^r dx(a+bx)^p = \int g$ $\frac{(z-a)^r}{b^{r+1}} z^p dz$, quod integrale habetur binomio $(z-a)^r$ in ſeriem converſo. Reduci poſſunt quandoque ad formam $gx^{rn} \times x^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p$ differentialia formæ dx $(ax^q+bx^s)^p$. Eſt enim $dx(ax^q+bx^s)^p = dx \times (x^q \times (a+bx^{s-q}))^p$ $= x^{qp}dx\,(a+bx^{s-q})^p$. Scripto igitur n pro $s-q$, formula hæc eadem eſt cum præcedente, ſi fuerit $qp = rn+n-1$. Formula differentialis, cujus integrale exhibuimus, nunc generaliter ita poterit exprimi $gx^m dx\,(a+bx^n)^p$, atque hujus formulæ integrale ſemper in terminis finitis exhiberi poteſt, quando numeri m et n ita a ſe invicem

pen-

pendent, ut ſit $\frac{m+1}{n}$ æquale numero quocunque integro, qui ſit $r+1$, erit enim tum $m+1=rn+n$, atque $m=rn+n-1$, quo valore pro m ſubſtituto formula differentialis integranda hæc eſt $gx^{rn+n-1}dx\,(a+bx^n)^p$, vel $gx^{rn}\times x^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p$, quae formula utique integrabilis eſt; quia enim $r+1$ eſt numerus integer, etiam r integer erit. Quando vero in formula $gx^m dx\,(a+bx^n)^p$ numeri m et n ita a ſe invicem non pendent, ut ſit $\frac{m+1}{n}=$ numero integro, non aliis ſubſidiis ad integrale inveniendum opus eſt, niſi iis, quibus ſupra jam in caſibus aliquot ſpecialibus uſi ſumus, quæ jam ad formulam generalem adplicabimus.

§. 378.

Quare nunc poſito $dy=gx^m dx\,(a+bx^n)^p$, ante omnia efficiendum eſt, ut exponens ipſius x extra vinculum exponentis p unitate minor fiat exponente ipſius x unius ſub vinculo exponentis p exiſtentis termini, ut bx^n. Multiplicetur eum in finem factor $gx^m dx$ per certam ipſius x dignitatem, quæ ſit x^q, et ſimul alter factor $(a+bx^n)^p$ per eandem ipſius x dignitatem x^q vel $\left(x^{\frac{q}{p}}\right)^p$ dividendus eſt, ut dati differentialis valor maneat invariatus: erit $dy=gx^m dx\,(a+bx^n)^p=gx^{m+q}dx\left(ax^{-\frac{q}{p}}+bx^{n-\frac{q}{p}}\right)^p$. Eſſe vero debet q numerus talis, ut ſit vel $m+q=n-\frac{q}{p}-1$ vel $m+q=-\frac{q}{p}-1$. Ex priori æquatione (ſecundæ enim evolvendæ non immorabimur, quia calculus ſequenti prorſus ſimilis hoc caſu inſtituendus erit) concluditur $mp+qp=np-q-p$, $np-mp-p=qp+q$, et proinde $q=\frac{np-mp-p}{p+1}$.

Fit igitur $dy = gx^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx \left(ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}\right)^p$, cujus formulæ integrale eadem invenitur methodo, qua ſupra in caſibus ſpecialibus uſi ſumus. Pono enim $ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}} = z$, ut fiat $\frac{m-n+1}{p+1} ax^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx$

$+ \frac{m+np+1}{p+1} bx^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx, = dz$ et $gx^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx$

$= \frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} dz - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b}$

$gx^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx$, proinde $dy = \frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} z^p dz -$

$\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} ax^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx \times \left(ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}\right)^p$

$= \frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} z^p dz - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b} gx^{m-n}$

$dx\,(a+bx^n)^p$, cujus integrale eſt $y = \frac{1}{m+np+1} \times$

$\frac{g}{b} z^{p+1} - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b} \times \int gx^{m-n} dx\,(a+bx^n)^p$.

Cum autem ſit $z = ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}} =$

$x^{\frac{m-n+1}{p+1}} \times (a+bx^n)$, erit $z^{p+1} = x^{m-n+1} \times (a+$

$bx^n)^{p+1}$, et proinde $y = \frac{1}{m+np+1} \times \frac{1}{b} \times gx^{m-n+1}$

$(a+bx^n)^{p+1} - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b} \int gx^{m-n} dx \times (a+$

$bx^n)^p$

bx^n) p. Inventus igitur eſt primus formulæ integralis quæſitæ terminus, atque ad ſecundum ſequentem inveniendum non alia opus eſt methodo, niſi ea, qua in ipſa formula inventa ubique loco m ſubſtituitur $m - n$, et quod prodit, per $- \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b}$ multiplicatur. Facta hac ſubſtitutione invenitur $y = \frac{1}{m+np+1} \times \frac{1}{b} \times$

$$gx^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1} - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{1}{m+np+1-n} \times$$

$$\frac{a}{bb} \times gx^{m+1-2n}(a+bx^n)^{p+1} - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times$$

$$\frac{m+1-2n}{m+np+1-n} \times \frac{aa}{bb} \int gx^{m-2n}dx\,(a+bx^n)^p.$$

Tertius terminus invenitur poſito $m - 2n$ loco m in formula primum pro $\int gx^m dx\,(a+bx^n)^p$ inventa, et quod prodit per $- \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{m+1-2n}{m+np+1-n} \times \frac{aa}{bb}$ multiplicato. Simili quoque ſubſtitutione habetur terminus quartus, quintus et ſequentes, eadem operatione quousque jubet continuata. Quilibet hujus ſeriei terminus excepto ultimo per $g(a+bx^n)^{p+1}$ erit multiplicatus, ideo hic factor communis initio ſeriei ſemel pro ſemper præfigi poteſt. Tum vero, ſi numerator et denominator termini primi per n, ſecundi per n^2, tertii per n^3, et ſic ſequentium omnium per n elevatum ad potentiam, cujus exponens numero termini eſt æqualis, dividatur, ſeries ipſa hanc habebit formam: $y = \frac{g}{n}(a+bx^n)^{p+1}$

$$\times \left(\frac{1}{\frac{m+np+1}{n}} \times \frac{1}{b} x^{m-n+1} - \frac{\frac{m+1-n}{n}}{\frac{(m+np+1)(m+np+1-n)}{nn}} \times \right.$$

$\times \frac{a}{bb} x^{m-2n+1} +$ etc.). Ponatur $\frac{m+1}{n} = r$, ex quo fit

$$m+1 = rn$$
$$\frac{m+1-n}{n} = r-1$$
$$m+1-n = rn-n$$
$$m+1-2n = rn-2n$$

Ponatur præterea $r+p = \frac{m+np+1}{n} = s$

ex quo fiet $\frac{m+np+1-n}{n} = s-1$

$$\frac{m+np+1-2n}{n} = s-2, \text{ etc,}$$

atque his valoribus ſubſtitutis fiet $y = \frac{g}{n}(a+bx^n)^{p+1}$ $\left(\frac{1}{s} \times \frac{1}{b} x^{rn-n} - \frac{r-1}{s.s-1} \times \frac{a}{bb} x^{rn-2n} + \frac{r-1.r-2}{s.s-1.s-2}\right.$ $\times \frac{aa}{b^3} x^{rn-3n} -$ etc.) vel $y = \frac{g}{n}(a+bx^n)^{p+1} \left(\frac{1}{s} \times\right.$ $\frac{1}{b} x^{m+1-n} - \frac{r-1}{s.s-1} \times \frac{a}{bb} x^{m+1-2n} + \frac{r-1.r-2}{s.s-1.s-2} \times$ $\frac{aa}{b^3} x^{m+1-3n} -$ etc.). Quando fuerit $dy = gx^m dx (a- bx^n)^p$; in formula inventa eorum terminorum ſigna ſunt mutanda, in quibus b habet imparem dimenſionem.

§. 379.

Quando hæc ſeries in caſibus ſpecialibus abrumpitur, quod verbi gratiæ accidit, ſi r fuerit numerus integer poſitivus; integrale quæſitum habetur in terminis finitis expreſſum. Alias habetur vel per approximationem, vel quoque conceſſa quadratura curvæ, cujus applicata

plicata, abſciſſa exiſtente $= x$, exprimitur per $gx^{m-n}(a+bx^n)^p$ vel per $gx^{m-2n}(a+bx^n)^p$ vel per $gx^{m-3n}(a+bx^n)^p$ etc. vel denique conceſſa rectificatione curvæ, in qua ſi arcus vocetur $= s$, abſciſſa exiſtente $= x$ lineæ rationis $\frac{ds}{dx}$ exprimitur per $gx^{m-n}(a+bx^n)^p$, vel per $gx^{m-2n}(a+bx^n)^p$, vel per $gx^{m-3n}(a+bx^n)^p$, etc. Atque nullo prorſus negotio inveniri poſſunt iſtæ formulæ differentiales ſpeciales ſub ea generali, de qua loquimur, comprehenſa, quarum integralia habentur conceſſa quadratura circuli vel alius curvæ ex ſectionibus conicis. Sic poſito radio circuli $= r$, ejus quadratura abſciſſis a centro computatis exprimitur per $\int dx(rr - xx)^{\frac{1}{2}}$. Comparetur hæc formula cum $gx^{m-n}dx(a+bx^n)^p$, atque ponendo $g = 1$, $m - n = 0$, $a = rr$, $b = -1$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$, patet, quia $m = n = 2$, formulæ differentialis $dy = xxdx(rr - xx)^{\frac{1}{2}}$ integrale haberi conceſſa quadratura circuli. Arcus circuli ſub eadem hypotheſi exprimitur per $\int rdx(rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Comparata hac formula cum $gx^{m-n}dx(a+bx^n)^p$, habetur $g = r$, $m - n = 0$, $a = rr$, $b = -1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$; et quia $m = n = 2$; patet, formulae differentialis $rxxdx(rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$ integralem haberi conceſſa rectificatione circuli. Sic comparatis his et aliis formulis ſimilibus cum $gx^{m-2n}dx(a+bx^n)^p$, vel $gx^{m-3n}dx \times (a+bx^n)^p$ etc, plures hae inveniuntur formulæ differentiales, quarum integralia habentur, curvæ cujusdam et in ſpeciei ſectionis cujusdam conicæ quadratura conceſſa. Indiget vero hæc methodus præcautione quadam. Haud raro enim accidit, ut ſeries abrumpatur in termino quodam, qui illum, cum qua comparatio inſtituta eſt, antecedit. Atque tum integrale habetur in terminis finitis algebraice expreſſum a quadratura vel rectificatione curvarum independentis

dependens. Sic generaliter invenitur, in formula $gx^m dx (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$ ſucceſſive ponendo numeros pares 2, 4, 6, etc, loco m, quod integrale illius formulae pendeat a rectificatione circuli. Quodſi vero in hac formula ſit m numerus par negativus, integrale invenitur algebraicum. Sit enim $m = -2f$ atque differentiale, de quo ſermo eſt, ſic transformatur $\frac{gdx}{x^{2f}\sqrt{(rr - xx)}}$. Sit $x = \frac{rr}{u}$; ut fiat $dx = -\frac{rrdu}{uu}$, $x^{2f} = \frac{r^{4f}}{u^{2f}}$, $\sqrt{(rr - xx)} = \sqrt{\left(rr - \frac{r^4}{uu}\right)} = \frac{r}{u}\sqrt{(uu - rr)}$, ideoque

$$\frac{gdx}{x^{2f}\sqrt{(rr - xx)}} = -\frac{grr}{uu}dx \times \frac{uuf}{r^{4f}}\left(\frac{u}{r\sqrt{(uu - rr)}}\right)$$

$$= -\frac{gu^{2f-1}du}{r^{4f-1}\sqrt{(uu-rr)}}.$$ Atque hoc differentiale habet integrale abſolutum et algebraicum, quia ob $m = 2f - 1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, fit $\frac{m+1}{n} = f =$ numero integro poſitivo.

§. 380.

Integratio formularum differentialium, in quibus factor ſub vinculo exponentis p exiſtens eſt trinomium vel polynomium quodcunque, modo huic prorſus ſimili peragitur. Sit $dy = gx^m dx (a + bx^n + cx^{2n})^p$ atque multiplicato factore $gx^m dx$ per x^q alter ſimul per x^q, vel per $\left(\frac{q}{x^p}\right)^p$ eſt dividendus, ut valor formulae non mutetur, quo facto fit $dy = gx^{m+q} dx \left(ax^{-\frac{q}{p}} + bx^{n-\frac{q}{p}} + cx^{2n-\frac{q}{p}}\right)^p$. Poſito nunc $m + q =$

$-\frac{q}{p}-1$, habetur $q = \frac{-mp-p}{p+1}$, et $dy =$
$gx^{\frac{m-p}{p+1}} dx \times (ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}})^p$.
Deinde poſito $ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+n+1}{p+7}} + cx^{\frac{m+2npn+2n+1}{p+1}}$
$= z$, et inde deductis valoribus ipſius z^p, z^{p+1}, dz,
t factoris $gx^{\frac{m-p}{p+1}} dx$ ſit $y = \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a} gx^{m+1} \times (a+bx^n$
$+cx^{2n})^{p+1} - \frac{m+1+np+n}{m+1} \times \frac{b}{a} \int gx^{m+n}dx\,(a+bx^n +$
$cx^{2n})^p - \frac{m+1+2np+2n}{m+1} \times \frac{c}{a} \int gx^{m+2n}dx\,(a+bx^n$
$+cx^{2n})^p$. Operatio hæc continuatur ponendo $m+n$ loco
in formula inventa, quo facto invenitur $y = \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a}$
$gx^{m+1}\,(a+bx^n + cx^{2n})^{p+1} - \frac{(m+1+np+n)\times 1}{(m+1).(m+1+n)} \times$
$\frac{b}{aa} \times gx^{m+1+x}\,(a+bx^n + cx^{2n})^{p+1} +$
$\frac{(m+1+np+n).(m+1+np+2n)}{(m+1).(m+1+n)} \times \frac{bb}{aa} -$
$\frac{m+1+2np+2n}{m+1} \times \frac{c}{a}) \times \int gx^{m+2n}dx\,(a+bx^n + cx^{2n})^p$.
$\frac{m+1+np+n}{m+1} \times \frac{m+1+2np+3n}{m+1+n} \times \frac{bc}{aa} \int gx^{m+3n}$
$(a+bx^n + cx^{2n})^p$. Sic pergendo et ſubſtituendo
$+2n$ in formula primum inventa invenitur tertius terminus et ſequentes, quæ operatio quousque lubet continuari poteſt, ita ut hic quoque vel integrale exactum habeatur, ſi ſeries tandem abrumpatur, vel per approxima-

ximationem, vel denique, ad quadraturas aut rectificationes duarum curvarum reducatur, in quibus abſciſſa exiſtente $= x$, vel applicata, vel rationis $\frac{ds}{dx}$ limes datur per functionem formæ $gx^{m+rn}dx\,(a+bx^n+cx^{2n})^p$ exiſtente r numero quocunque integro. Pari ratione integrale differentialis quadrinomii ad tres quadraturas vel rectificationes, quinquinomii ad quatuor et ſic porro reducitur, ſi exactum non inveniatur, nec approximatio præferatur.

§. 381.

Functiones quidem differentiales fractae rationales comprehenduntur ſub forma $(\alpha x^q + \beta x^r + \gamma x^s + \text{etc.})\,dx\,(a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}+\text{etc})^p$, exiſtente p numero integro negativo, q vero r, s, etc, numeris integris poſitivis. Sed tamen per methodum huc usque deſcriptam functionum differentialium fractarum, et quidem rationalium integralia non ſemper habentur. In formula pro integrali ipſius $dy = gx^m dx\,(a+bx^n)^p$ inventa in qua $r = \frac{m+1}{n}$ et $s = \frac{m+1}{n} + p$ contingere poteſt, ut r et s ſint numeri integri poſitivi, quando p eſt numerus integer negativus. Quodſi eveniat, patet neceſſario eſſe $r > s$, et proinde intuitus ipſius formulæ docet, quod, ante quam ſeries multiplicatione per factorem $r - r$ abrumpatur, in hoc caſu denominatores quorundam formulæ terminorum per multiplicationem factoris $s - s$ evadant $= 0$, et proinde ipſi termini fiant infinite magni. Tantum abeſt, ut ex hoc concludere poſſimus, integrale in iſtis caſibus haberi non poſſe, ut potius ex eo concludendum ſit, integrale quæſitum non eſſe functionem algebraicam, ſed ſaltem ex parte transſcendentem. Propoſitum ſit differentiale $dy = gx^7dx\,(a+bx^2)^{-2}$, quodſi comparetur cum formula $dy = gx^m dx\,(a+bx^n)^p$ dat $m = 7$, $n = 2$, $p = -2$, $r = 4$, $s =$

$=2$, atque ſecundum formulam generalem pro integrali $y=\int gx^m dx\,(a+bx^n)^p$ inventam aliqui ipſius $\int gx^7 dx\,(a+bx^2)^{-2}$ termini evadunt infiniti. Alia igitur methodo in illud inquirendi opus eſt. Quia enim $gx^7 dx\,(a+bx^2)^{-2} = gx^6 . xdx\,(a+bx^2)^{-2}$ pono $a+bx^2=z$, ut fiat $x^2=\frac{z-a}{b}$, $2xdx=\frac{dz}{b}$, $xdx=\frac{1}{2}\frac{dz}{b}$, $x^6=\frac{(z-a)^3}{b^3}$. Subſtitutis his valoribus habetur $gx^7dx\,(a+bx^2)^{-2}=\frac{g(z-a)^3dz}{2b^4z^2}=\frac{g}{2b^4}zdz-\frac{3ag}{2b^4}dz+\frac{3a^2g}{2b^4}z^{-1}dz-\frac{a^3g}{2b^4}z^{-2}dz$, et proinde $\int gx^7dx\,(a+bx^2)^{-2}=\frac{g}{4b^4}z^2-\frac{3ag}{2b^4}z+\frac{3a^2g}{2b^4}lz+\frac{a^3g}{2b^4z}$, quod integrale ex parte algebraicum, ex parte tranſſcendens eſt. ſimili defectu laborant formulae generales pro differentialibus trinomiis, quadrinomiis, et reliquis ſecundum methodum hucuſque deſcriptam formatæ, ut nimirum denominatores evaneſcant, quando eſt p numerus integer negativus. Ratio hujus defectus illum latere nequit, qui ad modum, quo formulæ iſtæ ex differentialibus derivantur, attentus eſt. Methodus hæc inverſa eſt ejus, qua ex functionibus mere algebraicis differentialia eliminantur. Proinde ejus ope ad optatum ſcopum pertingere ſemper poſſemus, ſi aliarum non, niſi functionum mere algebraicarum, differentialia eſſent algebraica. ſed vero cum functionum quarundam transſcendentium pariter ac algebraicarum differentialia ſint algebraica; mirum non eſt, quod integralia differentialium algebraicarum, ſi eadem integralia involvunt expreſſiones logarithmicas, vel alias operationes transſcendenses, ea methodo non inveniantur, quæ proprie ſolis integrali-

 bus

bus algebraicis inveniendis adcommodata eſt. Hæc cauſa eſt, cur alia opus ſit methodo, qua fractionum differentialium rationalium integralia inveniuntur, cujus ope ſimul dijudicari poteſt, utrum integrale ejusmodi functionis ſit algebraicum vel transſcendens.

§. 382.

Quodſi in functione rationali fracta quantitas variabilis x tot vel plures habeat dimenſiones in numeratore, quam in denominatore; tum iſta functio reſolvi poterit in duas partes, quarum altera eſt functio integra, altera fracta, in cujus denominatore quantitas variabilis x pauciores habet dimenſiones, quam in denominatore. Poteſt enim in hoc caſu numerator per denominatorem dividi more ſolito, donec in quoto ad exponentes negativos ipſius x perveniatur. Hoc ergo loco abrupta diviſionis operatione quotus conſtabit ex parte integra et fractione, in cujus numeratore minor erit dimenſionum numerus ipſius x, quam in denominatore. Hic autem quotus functioni propoſitæ eſt æqualis. Hujusmodi igitur functiones fractæ, in quibus quantitas variabilis x tot vel plures habet dimenſiones in numeratore, quam in denominatore, vocari poſſunt functiones fractæ *ſpuriæ*, quo diſtinguantur a functionibus fractis *genuinis*, in quarum numeratore quantitas variabilis x pauciores habet dimenſiones, quam in denominatore. Functio itaque fracta ſpuria reſolvi poterit in functionem integram et functionem fractam genuinam, hæcque reſolutio per vulgarem diviſionis operationem abſolvetur. Proinde ſi proponatur formula differentialis hujus formæ, $dy = \frac{p}{q} dx$ cujus integrale quæritur, atque in eadem ſint p et q functiones rationales integræ, primum eo reſpiciendum eſt, utrum fractio $\frac{p}{q}$ ſit ſpuria, an genuina. Si prius ſit, diviſio erit inſtituenda, donec

donec ultimum reſiduum pauciores habeat dimenſiones, quam diviſor q, ut quotus conſtet ex parte rationali integra et parte, quæ eſt functio rationalis fracta genuina. Tum integratio prioris partis nulla laborat difficultate, itque ad integrale poſterioris partis inveniendum omnia redibunt. Comprehendamus igitur impoſterum ſub forma $\frac{p}{q}$ non alias fractiones niſi genuinas, atque nunc inquirendum erit, quomodo integrale ipſius $dy = \frac{p}{q}dx$ ſit inveniendum.

§. 383.

Cum ſit q functio rationalis integra, factorum, in quos reſolvi poteſt, erunt aut omnes reales, aut omnes imaginarii, aut quidam reales, alii imaginarii. Atque in priori caſu poſſunt eſſe vel omnes æquales vel omnes inæquales, vel ex parte æquales et ex parte inæquales. Quodſi factores reales omnes fuerint æquales, ita ut fractio, hanc habeat formam $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc}}{(a+bx)^p}dx$ et x in numeratore non habeat majorem dimenſionem quam x^{p-1}, integratio difficultate non laborat. Integrale enim habetur per partes $=\int \alpha dx(a+bx)^{-p}+\int \beta x dx(a+bx)^{-p}+\gamma x^2 dx (a+bx)^{-p}$ etc. quæ omnes comprehenduntur ſub forma $gx^m dx(a+bx^n)^p$. Proinde quia hic m eſt ſemper numerus integer et $n=1$, erit in omnibus hiſce partibus $\frac{m+1}{n}=$ numero integro, atque integrale erit finitum et algebraicum, niſi maxima ipſius x dimenſio in numeratore ſit $p-1$, quo caſu integrale pendet a quadratura hyperbolæ. Sit enim iſte terminus $\delta x^{p-1}dx(a+bx)^{-p}$, et ponatur $a+bx=z$, erit $x=\frac{z-a}{b}$ et $dx=\frac{dz}{b}$,

$\frac{dz}{b}$, $x^{p-1} = \frac{(z-a)^{p-1}}{b^{p-1}}$, et proinde $\int x^{p-1}dx . (a+bx)^{-p}$

$= \frac{\int (z-a)^{p-1}z^{-p}dz}{b^p} = \frac{\int (z-a)^{p-1}dz}{b^p z^p}$. Eſt vero p numerus integer poſitivus et proinde quoque $p-1$, reſolvi igitur poteſt $(z-a)^{p-1}$ in ſeriem finitam. Continet vero hæc ſeries omnes ipſius z dimenſiones a z^{p-1} uſque ad z^0 incluſive; proinde terminus in quo occurrit z^{p-1} ſequentem habet formam $A\frac{dz}{z}$, cujus integrale eſt $A\,lz$, quod pendet a quadratura hyperbolæ. Si maxima ipſius x in numeratore dimenſio fuerit x^{p-2}, vel x^{p-3} etc, integrale ſemper erit algebraicum.

§. 384.

Quando factores ſimplices denominatoris ſunt reales atque hi omnes ſunt inæquales, *ipſa functio fracta propoſita genuina, quæ ſit* $\frac{M}{N}$, *in tot fractiones ſimplices formæ* $\frac{A}{p-qz}$ *reſolvi poterit, quot factores ſimplices habet denominator N inter ſe inæquales, ita ut earum fractionum ſimplicium ſumma algebraica ſit ipſi functioni fractae propoſitæ æqualis, A vero* p *et* q *ſint quantitates conſtantes.* Hoc problema ſemper præbet ſolutionem poſſibilem. Propoſita ſit hæc functio fracta $\frac{1+xx}{x-x^3}$, atque factores ſimplices denominatoris ſunt x, $1-x$, et $1+x$. Per conditionem vero problematis erit $\frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}$ $= \frac{1+xx}{x-x^3}$, ubi numeratores conſtantes definiri oportet. Reducantur itaque iſtæ fractiones ad communem denominatorem, qui erit $x-x^3$, atque numeratorum ſumma

ma æqualis eſſe debet ipſi $1+xx$, unde iſta æquatio concluditur

$$\begin{aligned} A + Bx - Axx &= 1 + xx = 1 + 0x + xx \\ + Cx + Bxx & \\ - Cxx & \end{aligned}$$

quæ totidem comparationes præbet, quot ſunt quantitates incognitæ quæſitæ. Erit nimirum $A = 1$; $B + C = 0$; $-A + B - C = 1$. Unde concluditur $B - C = 2$; $A = 1$; $B = 1$; $C = -1$.

Quodſi jam propoſitum fuerit differentiale hujus formæ $dy = \frac{M}{N} dx$, M et N ſunt tales ipſius x functiones, quales modo deſcriptæ ſunt; fractio $\frac{M}{N}$ reſolvatur in ſuas ſimplices, quæ ſint $\frac{a}{f+x}$, $\frac{b}{g+x}$, $\frac{c}{h+x}$, etc, ita ut ſit $dy = \frac{adx}{f+x} + \frac{bdx}{g+x} + \frac{cdx}{g+x} +$ etc; atque ſtatim patet, eſſe $y = a.l(f+x) + b.l(g+x) + c.l(h+x) +$ etc $= l(f+x)^a (g+x)^b (h+c)^c$ etc). Integratio igitur hujusmodi fractionum differentialium rationalium pendet a quadratura hyperbolæ.

§. 385.

Perpetuo autem ſi denominator N fractionis $\frac{M}{N}$ habeat factores ſimplices reales, quorum unus ſit $p-qx$, atque S ſit alter denominatoris N factor, qui ex hypotheſi in -1 factores ſimplices eſt reſolubilis, qui inter ſe omnes ſunt inæquales, ut ſit $N = (p - qx)S$; inveniri poſſunt duæ fractiones formæ $\frac{A}{p-qx}$ atque $\frac{P}{S}$, ut ſit $\frac{M}{N} = \frac{A}{p-qx} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p-qx)S}$. Concluditur enim ex hac

 hy-

hypotheſi $\frac{P}{S} = \frac{M}{(p-qx)S} - \frac{A}{p-qx} = \frac{M-AS}{(p-qx)S}$, atque $P = \frac{M-AS}{p-qx}$. Quia igitur eſt P functio ipſius x integra ex hypotheſi, erit $M-AS$ per $p-qx$ diviſibilis, et proinde $x = \frac{p}{q}$ radix æquationis $M-AS=0$, ita ut hæc expreſſio $M-AS$ poſito $x = \frac{p}{q}$ evaneſcat. Ponatur itaque ubique loco x iſte valor conſtans $\frac{p}{q}$, eritque $M-AS=0$, unde concluditur $A = \frac{M}{S}$. Hoc itaque modo ſemper inveniri poteſt numerator A fractionis quæſitæ $\frac{A}{p-qx}$; atque ſi ex ſingulis denominatoris N factoribus ſimplicibus, dummodo ſint inter ſe inæquales, hujusmodi fractiones ſimplices formentur, harum fractionum ſimplicium omnium ſumma algebraica erit fractioni poropoſitæ $\frac{M}{N}$ æqualis.

§. 386.

Quodſi denominator fractionis rationalis $\frac{M}{N}$ habet factores ſimplices reales omnes inter ſe æquales, ut ſit $N = (p-qz)^n$, exiſtente forma fractionis iſtius $\frac{P}{(p-qx)^n}$, cujus numerator tantam ipſius x poteſtatem non involvit, quantam continet denominator; eadem fractio transmutari poteſt in hujusmodi fractiones partiales

$$\frac{A}{(p-qx)^n} + \frac{B}{(p-qx)^{n-1}} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{K}{p-qx}$$

qua-

quárum omnium numeratores ſunt quantitates conſtantes; ita ut ſumma omnium fractionum partialium æqualis ſit fractioni propoſitæ. Sub hac enim hypotheſi functio P hujusmodi habebit formam $\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3$ . . . . $+ kx^{n-1}$ exiſtente terminorum numero $= n$, ubi tamen notandum eſt, quod coefficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc, unus vel aliqui poſſint eſſe $= 0$; ipſi vero functioni P æquari debet numerator ſummæ omnium fractionum partialium, poſtquam ſingulæ ad eandem denominationem $(p-qx)^n$ ſunt perductæ, qui igitur numerator erit $A + B(p-qx) + C(p-qx)^2 + D(p-qx)^3 +$ . . . $+ K(p-qx)^{n-1}$. Hujus maxima poteſtas eſt ut ibi x^{n-1}, atque tot habentur quantitates incognitæ A, B, C, D, ... K, quarum numerus eſt n, quot ſunt termini inter ſe æquales reddendi; et proinde numeratores conſtantes plenariæ determinantur.

§. 387.

Hisce ratiociniis ſimul ſuperſtruitur methodus fractionem rationalem genuinam $\frac{M}{N}$, cujus denominator N habet factores ſimplices reales ex parte æquales et ex parte inæquales reſolvendi in fractiones ſimplices, quarum omnium ſumma algebraica ſit æqualis fractioni $\frac{M}{N}$. Habeat enim primo fractionis $\frac{M}{N}$ denominator N factorem $(p-qx)^2$, atque ex hoc factore duæ naſcentur fractiones partiales $\frac{A}{(p-qx)^2} + \frac{B}{p-qx}$. Sit autem N $= (p-qx)^2 S$, denotante S productum factorum realium inæqualium, eritque $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p-qx)^2 S} = \frac{A}{(p-qx)^2} + \frac{B}{p-qx} + \frac{P}{S}$, denotante $\frac{P}{S}$ omnes fra-

 ctio-

ctiones ſimplices ex denominatoris factore ſecundum §. 385. ortas junctim ſumtas. Atque ex aequatione $\frac{M}{(p-qx)^2S} = \frac{A}{(p-qx)^2} + \frac{B}{p-qx} + \frac{P}{S}$ concluditur $\frac{P}{S} = \frac{M}{(p-qx)^2S} - \frac{A}{(p-qx)^2} - \frac{B}{p-qx} =$ $\frac{M-AS-B(p+qx)S}{(p-qx)^2S}$ et $P = \frac{M-AS-B(p+qx)S}{(p-qx)^2}$. Debet itaque $M - AS - B(p+qx)S$ diviſibile eſſe per $(p-qx)^2$ et ideo quoque per $p-qx$. Sit primum diviſibile per $p-qx$, atque tota expreſſio $M-AS-B(p-qx)S$ evaneſcet poſito $p-qx=0$, ſeu $x = \frac{p}{q}$. Ponatur ideo ubique $\frac{p}{q}$ loco x, erit $M-AS=0$, ideoque $A = \frac{M}{S}$. Hoc valore invento quantitas $M-AS - B(p-qx)S$ etiam per $(p-qx)^2$ diviſibilis eſſe debet, ſeu $\frac{M-AS}{p-qx} - BS$ denuo diviſibile eſt per $p-qx$. Poſito igitur ubique $x = \frac{p}{q}$, erit $\frac{M-AS}{p-qx} = BS$, atque $B = \frac{M-AS}{(p-qx)S} = \frac{1}{p-qx} \cdot \left(\frac{M}{S} - A\right)$, ubi notandum eſt, cum $M-AS$ diviſibile ſit per $p-qx$, hanc diviſionem prius inſtitui debere, quam loco x ſubſtituatur $\frac{M-AS}{p-qx} = T$, eritque $B = \frac{T}{S}$ poſito $x = \frac{p}{q}$. Inventis ſic numeratoribus A et B erunt fractiones partiales ex denominatoris N factore $(p-qx)^2$ oriundae $\frac{A}{(p-qx)^2} + \frac{B}{p-qx}$.

§. 388.

§. 388.

Habeat nunc functionis fractae $\frac{M}{N}$ denominator N factorem $(p-qx)^3$, ſitque $N=(p-qx)^3 S$, fractio vero ex factore S orta ſit $\frac{P}{S}$, erit $P=\frac{M-AS-B(p-qx)S-C(p-qx)^2 S}{(p-qx)^3}$, functiõ integrae. Numerator itaque primo diviſibilis eſt per $p-qx$, unde poſito $x=\frac{p}{q}$ evaneſcere debet, ut ſit $M-AS=0$, atque $A=\frac{S}{M}$. Invento ſic A, erit $M-AS$ diviſibile per $p-qx$; ideo ponatur $\frac{M-AS}{p-qx}=T$, atque $T-BS-C(p-qx)S$ adhuc diviſibile erit per $(p-qx)^2$, proindeque fiet $=0$ poſito $p-qx=0$, unde concluditur $B=\frac{T}{S}$ poſito $x=\frac{p}{q}$. Quare poſito $\frac{T-BS}{p-qx}=V$ ſupereſt, ut $V-CS$ diviſibile ſit per $p-qx$, eritque proinde $V-CS=0$ poſito $p-qx=0$, atque $C=\frac{V}{S}$, poſito $x=\frac{p}{q}$. Atque hoc modo inventis numeratoribus A, B, C, fractiones partiales ex denominatoris N factore $(p-qx)^3$ ortae erunt $\frac{A}{(p-qx)^3}+\frac{B}{(p-qx)^2}+\frac{C}{p-qx}$. Quodſi ideo generaliter fractionis $\frac{M}{N}$ denominator N habeat factorem $(p-qx)^n$ fractiones partiales hinc ortae $\frac{A}{(p-qx)^n}+\frac{B}{(p-qx)^{n-1}}+$

$$+\frac{C}{(p-qx)^{n-2}}+\ldots+\frac{K}{p-qx}$$ ſequenti modo invenientur. Ponatur $N=(p-qx)^n S$, atque eodem modo ut ante ratiocinando reperietur

primo $A=\frac{M}{Z}$, ſi $x=\frac{p}{q}$, et poſito $P=\frac{M-AZ}{p-qx}$

ſecundo $B=\frac{P}{Z}$ . . $x=\frac{p}{q}$ . . . $Q=\frac{P-BZ}{p-qx}$

tertio $C=\frac{Q}{Z}$ . . $x=\frac{p}{q}$ . . . $R=\frac{Q-CZ}{p-qx}$

quarto $D=\frac{R}{Z}$ . . $x=\frac{p}{q}$ . . . $S=\frac{R-DZ}{p-qx}$

quinto $E=\frac{S}{Z}$ . . $x=\frac{p}{q}$ etc.

Hoc itaque modo ſi definiantur ſinguli numeratores conſtantes A, B, C, D, etc; invenientur omnes fractiones partiales, quae ex denominatoris N factore $(p-qx)^n$ oriuntur.

§. 389.

Quaecunque igitur fractio rationalis integra generis $\frac{M}{N}$ fuerit propoſita, cujus denominator N habet omnes factores ſimplices reales ex parte vero æquales; tam inæquales, quam æquales ſeorſim tractari poſſunt. Ex unoquoque inæqualium ſecundum §.385. fractio partialis erui atque pro quovis æqualium fractiones partiales convenientes ex § præc. poſſunt inveniri. Quo facto omnium earum fractionum partialium ſumma algebraica erit fractioni propoſitæ æqualis. Habeat itaque, ſi integrandum proponatur differentiale $dy=\frac{M}{N}dx$, fractio $\frac{M}{N}$ ejusmodi formam, ſitque $\frac{M}{N}=\frac{A}{(p-qx)}$

$$+\frac{B}{(p-qx)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qx)^{n-2}}+\ldots+\frac{F}{p-qx}$$
$$+\frac{G}{a-bx}+\frac{H}{c-ex}+\ldots+\frac{K}{f-gx};$$

ſcripto z loco $p-qx$, et omnibus fractionibus ab $\frac{A}{z^n}$ uſque ad $\frac{F}{z}$ actu additis invenitur $dy =$

$$\frac{(A+Bz+Czz+\ldots+Fz^{n-1})\times\frac{dz}{-q}}{z^n}+\frac{Gdx}{a-bx}$$
$$+\frac{Hdx}{c-ex}\ldots+\frac{Kdx}{f-gx},$$ cujus formulae integrale ex parte invenitur algebraicum, ex parte logarithmicum, pendens a quadratura hyperbolae.

§. 390.

Quodſi jam functio fracta genuina $\frac{M}{N}$ præter factores ſimplices reales habeat quoque factores ſimplices imaginarios, eorum numerus ſemper par erit, et binorum productum dat factorem duplicem realem formae $p-qx+rxx$, atque hic iterum duo caſus ſunt diſtinguendi; nimirum aut factores duplices reales $p-qx+rxx$ functionis N omnes ſunt inter ſe inæquales, aut non, ſed ut functio N quoque agnoſcat factorem $(p-qx+rxx)^n$. Priori caſu ſi quaerantur omnes denominatoris N factores ſimplices, ſive reales ſint ſive imaginarii per praecepta 385 et 388; quaelibet binæ fractiones, quarum duæ denominatores ſimplices imaginarii ſunt, atque productum reale efficiunt, ſibi invicem addantur, et ſumma erit fractio formæ $\frac{m+nx}{p-qx+rxx}$, vel $\frac{a+bx}{xx+fx+g}$, ad quam ſemper reduci poteſt, ſi numerator et denominator per coefficientem ipſius

ipſius xx, ſi quem præter unitatem agnoſcat, dividatur. Tum itaque omne negotium eo redit, ſi integrandum ſit $dy = \frac{M}{N}.dx$, ut fractionis $\frac{adx + bxdx}{xx + fx + g}$ integrale in poteſtate ſit, quod ſequenti ratione reperiri poteſt. Tollatur ſecundus denominatoris terminus (§. 108.) ponendo $x + \frac{f}{2} = z$, unde fit $\frac{adx + bxdx}{xx + fx + g} = \frac{adz + bzdz - \frac{1}{2}bfdz}{zz + \frac{1}{4}ff + g}$. Ponendo igitur $a - \frac{1}{2}bf = c$ et $\frac{1}{4}ff + g = pp$, integrandum venit differentiale $\frac{cdz}{zz + pp} + \frac{bzdz}{zz + pp}$, ubi primus terminus eſt differentiale arcus circuli, cujus tangens eſt z, alter vero differentiale logarithmicum. Notandum hic eſt, quod in hoc integrationis negotio ſemper effici poſſit, ut xx atque g terminus primus et tertius denominatoris $xx + fx + g$ habeant ſignum $+$. Quia enim factores hujus functionis ſimplices ſunt imaginarii, xx et g ſemper eodem ſigno gaudent. Si igitur haberent ſignum $-$, opus tantum eſt, ut omnia tam numeratoris, quam denominatoris ſigna mutentur in contraria. Hoc itaque caſu integrale quæſitum pendet a quadratura circuli et hyperbolae ſimul.

§. 391.

Si fractio $\frac{M}{N}$ in forma evoluta contempletur, ut ſit

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc}}{(pp - 2pqx \cos\phi + qqxx)(\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \text{etc})}$$

ejus forma generalis, ſi denominator habeat duos factores ſimplices imaginarios, quorum productum reale eſt

$p - 2pqx \cos\phi + qqx x$, fractio partialis formae

$$\frac{A + ax}{p - 2pqx \cos\phi + qqxx}$$ ex hoc factore oriunda etiam equentem in modum poteſt inveſtigari. Sit brevitatis ratia numerator $A + Bx + Cxx +$ etc. $= M$, et alter enominatoris factor $\alpha + \beta x + \gamma xx +$ etc $= Z$. Ponaur altera pars ex denominatoris factore Z oriunda $= \frac{Y}{Z}$, eritque $Y = \frac{M - AZ - aZx}{pp - 2pqx \cos\phi + qqxx}$, quae expreſſio ſt functio integra ipſius x, et proinde $M - AZ - axZ$ ivisibile eſt per $pp - 2pqx \cos\phi + qqxx$. Evaneſcet ique $M - AZ - axZ$, ſi ponatur $pp - 2pqx \cos\phi + qqxx = 0$, hoc eſt ſi ponatur $x = \frac{p}{q} (\cos\phi \pm \sqrt{-1}.$ $\sin\phi)$, eritque $x^n = f^n (\cos. n\phi \pm \sqrt{-1}. \sin. n\phi)$ poſito $\frac{p}{q} = f$. Ideo duplex hic valor pro x ſubſtitutus duicem dabit aequationem, unde duae incognitae conſtans A et a definiri poſſunt. Facta igitur hac ſubſtitutioe aequatio $M = AZ + aZx$ evoluta hanc duplicem dat aequationem

$$\left.\begin{array}{l} + Bf. \cos\phi + Cff \cos 2\phi + Df^3 \cos 3\phi + \text{etc.} \\ \pm (Bf \sin\phi + Cff \sin. 2\phi + Df^3 \sin 3\phi + \text{etc}) \sqrt{-1} \end{array}\right\} =$$

$$(\alpha + \beta f \cos\phi + \gamma ff \cos 2\phi + \delta f^3 \cos 3\phi + \text{etc})$$

$$A (\beta f \sin\phi + \gamma ff \sin 2\phi + \delta f^3 \sin 3\phi + \text{etc}) \sqrt{-1}$$

$$A (\alpha f \cos\phi + \beta ff \cos 2\phi + \gamma f^3 \cos 3\phi + \text{etc})$$

$$A (\alpha f \sin\phi + \beta ff \sin 2\phi + \gamma f^3 \sin 3\phi + \text{etc}) \sqrt{-1}$$

Sit ad calculum abbreviandum,

A +

$$A + Bf\cos\phi + Cff\cos 2\phi + Df^3\cos 3\phi + \text{etc} = P$$
$$Bf\sin\phi + Cff\sin 2\phi + Df^3\sin 3\phi + \text{etc} = \Pi$$
$$\alpha + \beta f\cos\phi + \gamma ff\cos 2\phi + \delta f^3\cos 3\phi + \text{etc} = Q$$
$$\beta f\sin\phi + \gamma ff\sin 2\phi + \delta f^3\sin 3\phi + \text{etc} = K$$
$$\alpha f\cos\phi + \beta ff\cos 2\phi + \gamma f^3\cos 3\phi + \text{etc} = R$$
$$\alpha f\sin\phi + \beta ff\sin 2\phi + \gamma f^3\sin 3\phi + \text{etc} = r$$

eritque his poſitis $P \pm \Pi\sqrt{-1} = AQ \pm AK\sqrt{-1} + aR \pm ar\sqrt{-1}$, unde ob ſignorum ambiguitatem hae duae oriuntur æquationes $P = AQ + aR$ et $\Pi = AK + ar$, ex quibus incognitæ A et a ita definiuntur, ut ſit $A = \frac{Pr - \Pi R}{Qr - KR}$, $a = \frac{PK - \Pi Q}{KR - Qr}$. Propoſita igitur fractione $\frac{M}{(pp - 2pqx\cos\phi + qqxx)z}$ per ſequentem regulam fractio partialis ex ea oriunda $\frac{A + ax}{pp - 2pqx\cos\phi + qqxx}$ definietur. Poſito $f = \frac{p}{q}$, et evolutis ſingulis terminis

poſito $x^n = f^n\cos.n\phi$ fiat $M = P$
. . . . $x^n = f^n\sin.n\phi$ . . . $M = \Pi$
. . . . $x^n = f^n\cos.n\phi$ . . . $Z = Q$
. . . . $x^n = f^n\sin.n\phi$ . . . $Z = K$
. . . . $x^n = f^n\cos.n\phi$ . . . $xZ = R$
. . . . $x^n = f^n\sin.n\phi$ . . . $xZ = r$

erit $A = \frac{Pr - \Pi R}{Qr - KR}$ et $a = \frac{\Pi Q - PK}{Qr - KR}$.

§. 392.

Poſſunt valores quantorum R et Pr ex quantis Q et K definiri, cum enim ſit

Q =

$\ldots = \alpha + \beta f \cos\varphi + \gamma ff \cos 2\varphi + \delta f^3 \cos 3\varphi$ etc.

$\ldots = \quad \beta f \,\mathit{ſin}\, \varphi + \gamma ff \,\mathit{ſin}\, 2\varphi + \delta f^3 \,\mathit{ſin}\, 3\varphi$ etc; erit

$\ldots \cos\varphi - K \,\mathit{ſin}\, \varphi = \alpha \cos\varphi + \beta f \cos 2\varphi + \gamma ff \cos 3\varphi +$ etc

leoque $R = f(Q \,\mathit{ſin}\, \varphi + K \cos\varphi)$.

x his porro concluditur

$\ldots - KR = (QQ + KK) f \,\mathit{ſin}\, \varphi$

$\ldots - \Pi R = (PQ + \Pi K) f.\mathit{ſin}\,\varphi + (PK - \Pi Q) f.\cos\varphi$.

roinde $A = \dfrac{PQ + \Pi K}{QQ + KK} + \dfrac{PK - \Pi Q}{QQ + KK} \cdot \dfrac{\cos\varphi}{\mathit{ſin}\,\varphi}$

$$a = -\frac{PK + \Pi Q}{(QQ + KK) f.\,\mathit{ſin}\,\varphi}.$$

uare ex denominatoris factore $pp - 2pqx \cos\varphi + qqxx$ ritur iſta fractio partialis

$$\frac{(PQ + \Pi K) f.\,\mathit{ſin}\,\varphi + (PK - \Pi Q)(f.\cos\varphi - x)}{(pp - 2pqx\cos\varphi + qqxx)(QQ + KK)\,\mathit{ſin}\,\varphi}, \quad \text{vel,}$$

b $= \dfrac{p}{q}$, iſta

$$\frac{(PQ + \Pi K) p.\,\mathit{ſin}\,\varphi + (PK - \Pi Q)(p.\cos\varphi - qx)}{(pp - 2pqx\cos\varphi + qqxx)(QQ + KK) p.\,\mathit{ſin}\,\varphi}; \quad \text{atque}$$

uanta P, Π, Q et K ſequenti modo ex functionibus M t Z inveniuntur:

$$\text{Poſito } x^n = \frac{p^n}{q^n} \cos\varphi \text{ fit } M = P$$
$$\text{et } Z = Q$$
$$\text{et poſito } x^n = \frac{p^n}{q^n} \,\mathit{ſin}\,\varphi \text{ fit } M = \Pi$$
$$\text{et } Z = K$$

i notandum eſt, functiones M et Z, antequam hæc bſtitutio fiat, omnino evolvi debere; ut hujusmodi abeant formas

$M = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4 +$ etc.

t $Z = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \epsilon x^4 +$ etc.

Erit

Erit itaque

$$P = A + B\frac{p}{q}\cos\varphi + C\frac{p^2}{q^2}\cos 2\varphi + D\frac{p^3}{q^2}\cos 3\varphi + \text{etc.}$$

$$R = \quad B\frac{p}{q}\,\mathit{ſin}\,\varphi + C\frac{p^2}{q^2}\,\mathit{ſin}\,2\varphi + D\frac{p^3}{q^3}\,\mathit{ſin}\,3\varphi + \text{etc.}$$

$$Q = \alpha + \beta\frac{p}{q}\cos\varphi + \gamma\frac{p^2}{q^2}\cos 2\varphi + \frac{p^3}{q^3}\cos 3\varphi + \text{etc.}$$

$$K = \quad \beta\frac{p}{q}\,\mathit{ſin}\,\varphi + \gamma\frac{p^2}{q^2}\,\mathit{ſin}\,2\varphi + \delta\frac{p^3}{q^3}\,\mathit{ſin}\,3\varphi + \text{etc.}$$

§. 393.

Ex his jam via patet ad ultimum caſum dijudicandum, quo denominator fractionis $\frac{M}{N}$ eundem factorem $pp - 2pqx\cos\varphi + qqxx$ aliquoties in ſe complectitur. Hoc caſu in æquatione $M = AZ + aZx$ facta ſubſtitutione $x^n = f(\cos. n\varphi \pm \surd -1.\,\mathit{ſin}\,\varphi)$ ipſa quantitas Z evaneſcit. Ideo ſi functionis fractæ $\frac{M}{N}$ denominator habeat factorem $(pp - 2pqx\cos\varphi + qqxx)^2$ vel altiorem poteſtatem, peculiari opus erit reſolutione. Sit primo $N = (p - 2pqx\cos\varphi + qqxx)^2 Z$; atque ex denominatoris factore $(pp - 2pqx\cos\varphi + qqxx)^2$ orientur hujusmodi duae fractiones partiales $\frac{A + ax}{(pp - 2pqx\cos\varphi + qqxx)^2}$ $+ \frac{B + bx}{pp - 2pqx\cos\varphi + qqxx}$, ubi quantitates conſtantes A, a, B, b ſunt definiendae. His vero poſitis debet iſta expreſſio

$$\frac{M - (A + ax)Z - (B + bx)Z(pp - 2pqx\cos\varphi + qqxx)}{(pp - 2pqx\cos\varphi + qqxx)^2}$$

et

ſſe functio integra, et proinde numerator erit diviſibilis per denominatorem. Primum itaque hæc expreſſio $M - AZ - AxZ$ diviſibilis eſſe debet per $pp - 2pqx \cos\phi + qqxx$, qui cum ſit caſus præcedens, eodem modo quantitates A et a determinabuntur. Quare

poſito $x^n = \frac{p^n}{q^n} \cos. n\phi$ ſit $M = P$

et $Z = N$

poſito $x^n = \frac{p^n}{q^n} \sin. n\phi$ ſit $M = \Pi$

et $Z = \nu$

Hisque factis ſecundum regulam præcedentem erit

$$A = \frac{PN - \Pi\nu}{N^2 + \nu^2} + \frac{P\nu - \Pi N}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{\cos\phi}{\sin\phi}.$$

$$a = -\frac{P\nu + \Pi N}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{q}{p.\sin\phi}.$$

Inventis hoc modo A et a; fiet $\frac{M - (A + ax)Z}{pp - 2pqx \cos\phi + qqxx}$ functio integra, quæ ſit $= P$, atque ſupereſt, ut $P - Z - bxZ$ diviſibile evadat per $pp - 2pqx \cos\phi + qqxx$, quae expreſſio cum ſimilis ſit præcedenti, ſi poſito $x^n = \frac{p^n}{q^n} \cos n\phi$ fiat $P = R$

poſito $x^n = \frac{p^n}{q^n} \sin. n\phi$, fiat $P = r$;

$$\text{it } B = \frac{RN + r\nu}{N^2 + \nu^2} + \frac{R\nu - rN}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{\cos\phi}{\sin\phi}$$

$$\text{et } b = -\frac{R\nu + rN}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{q}{p.\sin\phi}.$$

§. 394.

Ex his generaliter jam concludere licet, quomodo reſolutio inſtitui debeat, ſi denominator fractio-

 nis

nis $\frac{M}{N}$ factorem habeat $(pp-2pqx\cos\phi+qqxx)^k$.
Sit enim $N=(pp-2pqx\cos\phi+qqxx)^k Z$, ita ut hæc reſolvenda ſit functio fracta $\frac{M}{(pp-2pqx\cos\phi+qqxx)^k Z}$, atque factor denominatoris $(pp-2pqx\cos\phi+qqxx)^k$ praebeat has partes $\frac{A+ax}{(pp-2pqx\cos\phi+qqxx)^k}+$

$$\frac{B+bx}{(pp-2pqx\cos\phi+qqxx)^{k-1}}+\frac{C+cx}{(pp-2pqx\cos\phi+qqxx)^{k-2}}$$

etc. Jam poſito $x^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\phi$ ſit $M=M$
et $Z=N$

poſito $x^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\phi$ ſit $M=\mu$
et $Z=\nu$

$$\text{erit } A=\frac{MN+\mu N}{N^2+\nu^2}+\frac{M\nu-\mu N}{N^2+\nu^2}\cdot\frac{\cos\phi}{\sin\phi}.$$

$$a=-\frac{M\nu+\mu N}{N^2+\nu^2}\cdot\frac{q}{p.\sin\phi}.$$

Deinde ponatur $\frac{M-(A+ax)Z}{pp-2pqx\cos\phi+qqxx}=P$, atque

poſito $x^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\phi$ ſit $P=P$

et poſito $x^n=\frac{p^n}{q^n}\sin .n\phi$ ſit $P=\Pi$

$$\text{erit } B=\frac{PN+\Pi\nu}{N^2+\nu^2}+\frac{P\nu-\Pi N}{N^2-\nu^2}\cdot\frac{\cos\phi}{\sin\phi}$$

$$b=-\frac{P\nu+\Pi N}{N^2+\nu^2}\cdot\frac{q}{\sin\phi}.$$

Porro

Porro vocetur $\frac{P-(B+bx)Z}{pp-2pqx\cos\varphi\; qqxx} = \mathfrak{Q}$, atque

poſito $x^n = \frac{p^n}{q^n}\cos.n\varphi$ ſit $\mathfrak{Q} = Q$

& poſito $x^n = \frac{p^n}{q^n}\sin.n\varphi$ ſit $\mathfrak{Q} = K$, erit

$$B = \frac{QN+K\nu}{N^2+\nu^2} + \frac{Q\nu-KN}{N^2+\nu^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

$$b = -\frac{Q\nu+KN}{N^2+\nu^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

Eodem modo progrediendum eſt, donec ultimæ fractionis, cujus denominator eſt $pp-2pqx\cos\varphi+qqxx$, numerator ſit determinatus.

§. 395.

Quodſi jam integranda proponatur functio rationalis fracta hujus formæ $\frac{Mdx}{(pp-2pqx\cos\varphi+qqxx)^k Z}$; ea reſolvatur in fractiones partiales formae

$$\frac{Adx+axdx}{(pp-2pqx\cos\varphi+qqxx)^k}+\frac{Bdx+bxdx}{(pp-2pqx\cos\varphi+qqxx)^{k-1}}$$

$$+\frac{Cdx+cxdx}{(pp-2pqx\cos\varphi+qqxx)^{k-2}} \;.\;.\;.\;.\;.\; +$$

$$\frac{Fdx+fxdx}{pp-2pqx\cos\varphi+qqxx}+\frac{Y}{Z},$$ ubi $\frac{Y}{Z}$ eſt pars ex evolutione factoris Z orta, quam integrare jam novimus. Omnibus vero reliquis fractionibus ex evolutione factoris $pp-2pqx\cos\varphi+qqx$ ſibi invicem additis atque ad communem denominatorem $(pp-2pqx\cos\varphi+qqxx)^k$ reductis, ſumma ſequentem habebit formam

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3+\varepsilon x^4+\;.\;.\;.\;.\;\theta x^k}{(pp-2pqx\cos\varphi+qqxx)^k}dx;$$ unde

generaliter univerſa integratio reducitur ad integrationem fractionis formæ $\frac{Ax^m dx}{(B+Cx+Dxx)^k}$. m et k exiſtentibus integris poſitivis. Sed per præcepta §. 390. hæc fractio transformatur in aggregatum fractionum partialium hujus formæ $\frac{Gz^r dz}{(zz+pp)^k}$, r exiſtente numero integro pari aut impari. Priori caſu poſito $zz+pp=uu$ fractio $\frac{Gz^r dz}{(zz+pp)^k}$ transformatur in functionem, cujus termini hanc habent formam $Hu^q du$, exiſtente q poſitivo vel negativo, atque tum integratio nulla prorſus laborabit difficultate. Poſteriori caſu ſi r eſt numerus impar poſito $zz+pp=uu$ functio poſt transformationem conſtabit ex terminis formae $\frac{Cu^s du}{\surd(uu-pp)}$, exiſtente s numero pari poſitivo, vel negativo, atque tum habebitur aut integrale algebraicum ſi s ſit negativus (§. 379.) aut a quadratura circuli pendens ſi s fuerit poſitivus (§. *cit.*).

§. 396.

Methodus expoſita fractionem quamvis propoſitam in ſimpliciores reſolvendi calculi differentialis ope ſic perfici poteſt, ut ſæpe numero multo minori negotio ad optatum perveniri poſſit ſcopum. Nil itaque ſupereſt, niſi ut uſus calculi differentialis in hoc quoque negotio ob oculos ponatur. Primo itaque fractionis $\frac{M}{N}$ denominator N habeat unum factorem ſimplicem formæ $f+gx$, ita ut ſit $N=(f+gx)S$. Sit fractio ſimplex ex iſto factore orta $=\frac{A}{f+gx}$, et complementum hu-

jus-

jusmodi formam habebit $\frac{V}{S}$, ut ſit $\frac{M}{N} = \frac{A}{f+gx}$ $+\frac{V}{S}$. Erit itaque $\frac{V}{S} = \frac{M}{N} - \frac{A}{f+gx} =$ $\frac{M-AS}{(f+gx)S}$, et $V = \frac{M-AS}{f+gx}$. Quia vero eſt V functio pſius x integra, $M - AS$ per $f+gx$ diviſibilis erit. roinde ſi ponatur $x = -\frac{f}{g}$, id eſt $f+gx = 0$, exreſſio $M-AS$ pariter evaneſcet. Fiat ergo $x = -$ $\frac{f}{g}$, erit $M - AS = 0$, et $A = \frac{M}{S}$. Sed $S = \frac{N}{f+gx}$, roinde $A = \frac{(f+gx)M}{N}$. Quoniam itaque hujus actionis numerator et denominator caſu $x = -\frac{f}{g}$ vaneſcit, ex §. 249. erit $A = \frac{(f+gx)\,dM + Mg\,dx}{dN}$ $= \frac{gM\,dx}{dN}$, ob $\frac{(f+gx)\,dM}{dN} = 0$. Atque ſic var numeratoris A per differentiationem expedite innitur.

§. 397.

Sit denominatoris N factor quadratus $(f+gx)^2$, fractiones hinc oriundæ ſint $\frac{A}{(f+gx)^2} + \frac{B}{f+gx}$; onamus $N = (f+gx)^2 S$, et complementum $= \frac{V}{S}$, ut ſit $\frac{V}{S} = \frac{M}{N} - \frac{A}{(f+gx)^2} - \frac{B}{f+gx}$, erit V

=

$= -\frac{M - AS - B(f+gx)S}{(f+gx)^2}$, unde functio M—AS—BS $(f+gx)$ eſt diviſibilis per $(f+gx)^2$; et quia S factorem $f+gx$ amplius non continet, etiam formula $\frac{P}{S} - A - B(f+gx)$ per $(f+gx)^2$ diviſibilis erit. Caſu itaque $x = -\frac{f}{g}$ ſeu $f+gx=0$, non ſolum ipſa hæc formula evaneſcit, ſed etiam ejus differentiale $d.\frac{M}{N} - Bgdx$ per dx diviſum erit nihilo æquale. Sit itaque $x = -\frac{f}{g}$, eritque ex priori aequatione $A = \frac{M}{S}$ et ex poſteriori fit $B = \frac{1}{gdx}\, d.\frac{M}{S}$.

Si N habeat factorem cubicum, atque ſit $N = (f+gx)^3 S$, unde fractiones inveniendæ ſint ſequentes $\frac{A}{(f+gx)^3}$, $\frac{B}{(f+gx)^2}$, $\frac{C}{f+gx}$, complementum vero $\frac{V}{S}$; erit $V = \frac{M - AS - BS(f+gx) - CS(f+gx)^2}{(f+gx)^3}$. Unde formula $\frac{M}{S} - A - B(f+gx) - C(f+gx)^2$ diviſibilis erit per $(f+gx)^3$, et poſito $x = -\frac{f}{g}$, non ſolum ipſa hæc formula, ſed et ipſius differentiale primum per dx et differentiale ſecundum per dx^2 diviſum ſit $=0$. Ponendo itaque $x = -\frac{f}{g}$, erit

$$\frac{M}{S} - A - B(f+gx) - C(f+gx)^2 = 0$$

$$d.\frac{M}{S} dx - Bg - 2Cg(f+gx) = 0$$

$$dd.\frac{M}{S} : dx^2 - Cgg = 0$$

Erit itaque ex prima æquatione $A = \frac{M}{S}$

ex ſecunda $B = \frac{1}{2ggdx} d.\frac{M}{S}$

ex tertia $C = \frac{1}{2ggdx^2} dd.\frac{M}{S}$.

§. 398.

Quodſi denique generatim N habeat factorem $(f+gx)^n$, ita ut ſit $N = (f+gx)^n S$; poſitis fractionibus ſimplicibus ex hoc factore oriundis ſequentibus $\frac{A}{(f+gx)^n}$ $+ \frac{B}{(f+gx)^{n-1}} + \frac{C}{(f+gx)^{n-2}} + \frac{E}{(f+gx)^{n-3}} +$ $\frac{E}{(f+gx)^{n-4}} \ldots + \frac{K}{f+gx}$: eodem modo ut ante ratiocinando functio $\frac{M}{S} - A - B(f+gx) -$ $C(f+gx)^2 - D(f+gx)^3 - E(f+gx)^4 -$ etc, diviſibilis deprehenditur per $(f+gx)^n$. Ideo tam ipſa hæc functio quam ſingula ejus differentialia usque ad gradum $n-1$ per convenientem ipſius dx dignitatem diviſa erunt $= 0$ caſu $x = -\frac{f}{g}$. Atque ex hiſce æquationibus concluduntur ſequentes numeratorum partia-

lium

lium valores $A = \frac{M}{S}$, $B = \frac{1}{1gdx} d\frac{M}{S}$, $C = \frac{1}{1.2ggdx^2} dd.\frac{M}{S}$, $D = \frac{1}{1.2.3.g^3 dx^3} d^3 \frac{M}{S}$, $E = \frac{1}{1.2.3.4.g^4 dx^4} d^4.\frac{M}{S}$, etc. Ubi notandum eſt, differentialia iſta ipſius $\frac{M}{S}$ ante quæri debere, quam ponitur $x = -\frac{f}{g}$, quia alias variabilitas ipſius x tolleretur.

§. 399.

Si fractionis $\frac{M}{N}$ denominator N duos habet factores impoſſibiles formæ $x = \frac{f}{g} \cos\phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin\phi$, quorum productum eſt $ff - 2fgx \cos\phi + ggxx$, ita ut habeatur $N = (ff - 2fgx \cos\phi + ggxx)S$; ſit fractio ex iſto denominatoris factore duplici oriunda $\frac{A + ax}{ff - 2fgx \cos\phi + ggxx}$, et complementum ad propoſitam $\frac{M}{N}$ ſit $= \frac{V}{S}$. Erit $V = \frac{M - (A + ax)S}{ff - 2fgx \cos\phi + ggxx}$ unde $M - (A + ax)S$, et proinde quoque $\frac{M}{S} - A - ax$ per $ff - 2fgx \cos\phi + ggxx$ dividi poteſt absque reſiduo. Ergo $\frac{P}{S} - A - ax$ evaneſcit poſito vel $x = \frac{f}{g} \cos\phi + \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin\phi$, vel $x = \frac{f}{g} \cos\phi - \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin\phi$. Quia M et S ſunt functiones integræ variabilis x, fiat in utraque ſeorſim

im utraque ſubſtitutio. Et quia $x^n = \frac{f^n}{g^n} \cos n\phi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}$ $\sin. n\phi$, ponatur primo ubique $\frac{f^n}{g^n} \cos n\phi$ pro x^n, atque hoc facto abeat M in $\mathfrak{M}$ et S in $\mathfrak{S}$. Deinde ponatur ubique $\frac{f^n}{g^n}\, \sin. n\phi$ pro x^n, hocque facto abeat M in $\mathfrak{m}$ eſt S in $\mathfrak{s}$. His valoribus $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{s}$, inventis manifeſtum eſt, ſi ponatur $x = \frac{f}{g} \cos \phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin \phi$, functionem M abituram eſſe in $\mathfrak{M} \pm \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{-1}}$, functionem vero S in $\mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$. Cum itaque $\frac{M}{S} - A - ax$ ſeu $M - (A + ax)S$ utroque caſu evaneſcere debeat, erit $\mathfrak{M} \pm \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{-1}} = \left(A + \frac{af}{g} \cos \phi \pm \frac{af}{g\sqrt{-1}} \sin \phi\right)\left(\mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}\right)$, unde ob ſigna ambigua duæ æquationes deducuntur nimirum

$$\mathfrak{M} = A\mathfrak{S} + \frac{af\mathfrak{S}}{g} \cos \phi - \frac{af\mathfrak{s}}{g} \sin \phi$$

$$\mathfrak{m} = A\mathfrak{s} + \frac{af\mathfrak{s}}{g} \cos \phi + \frac{af\mathfrak{S}}{g} \sin \phi$$

quibus eliminando A deducitur $\mathfrak{S}\mathfrak{m} - \mathfrak{s}\mathfrak{M} = \frac{af(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)}{g} \sin \phi$, atque $a = \frac{g(\mathfrak{S}\mathfrak{m} - \mathfrak{s}\mathfrak{M})}{f(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2) \sin \phi}$. inde eliminando $\sin \phi$ invenitur $\mathfrak{S}\mathfrak{M} + \mathfrak{s}\mathfrak{m} = (\mathfrak{S}^2$

$+ \mathfrak{s}^2)(A + \frac{cf}{g}\cos\phi)$. Ergo $A = \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{M} + \mathfrak{s}\mathfrak{m}}{\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2} - \frac{(\mathfrak{S}\mathfrak{m} - \mathfrak{s}\mathfrak{M})\cos\phi}{(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\sin\phi}$. Præterea eſt $S = \frac{N}{ff - 2fgx\cos\phi + ggxx}$ cujus fractionis numerator et denominator $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx = 0$ ſimul evaneſcunt. Ideo ex §. 249. fit hoc caſu $S = \frac{dN : dx}{2ggx + 2fg\cos.\phi}$. Ponamus jam, ſi ubique ſubſtituatur $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos.n\phi$ functionem $\frac{dN}{dx}$ abire in $\mathfrak{N}$, eandem autem abire in $\mathfrak{n}$ a ſubſtituto $x^n = \frac{f^n}{g^n}$ $\sin.n\phi$, atque patet, poſito $x = \frac{f}{g}\cos\phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}$ $\sin.\phi$ functionem $\frac{dN}{dx}$ abire in $\mathfrak{N} \pm \frac{\mathfrak{n}}{\sqrt{-1}}$, unde fun- ctio S abibit in $\frac{\mathfrak{N} \pm \mathfrak{n} : \sqrt{-1}}{\pm 2fg\sin\phi : \sqrt{-1}}$. Sed $S = \mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$ unde eodem valore pro x poſito habetur $\mathfrak{N} \pm \frac{\mathfrak{n}}{\sqrt{-1}} = \pm \frac{2fg\mathfrak{S}}{\sqrt{-1}}\sin\phi - 2fg\mathfrak{s}\sin\phi$. Ergo eſt $\mathfrak{s} = \frac{-\mathfrak{N}}{2fg\sin\phi}$ et $\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{n}}{2fg\sin\phi}$, quibus valoribus ſubſtitutis obtinetur $a =$ $\frac{2gg(\mathfrak{m}\mathfrak{n} + \mathfrak{M}\mathfrak{N})}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}$ et $A = \frac{2fg(\mathfrak{M}\mathfrak{n} - \mathfrak{m}\mathfrak{N})\sin\phi}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} - \frac{2fg(\mathfrak{m}.\mathfrak{n} + \mathfrak{M}\mathfrak{N})\cos\phi}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}$.

SECT

SECTIO XXV.

DE INTEGRATIONE FVNCTIONVM VNIVS VARIABILIS TRANSSCENDENTIVM.

§. 400.

Quia propoſita formula differentiali $dy = Pdx$, cujus integrale quæritur, functio P non tantum algebraica, ſed quoque transſcendens eſſe poſſit; in primo autem caſu omnes fere explicatæ ſint methodi, quibus ad integrationem æquationis $dy = Pdx$ pervenitur: reſtat alter caſus, quo functio P transſcendens eſt, quem hac ſectione contemplaturi ſumus. Sit itaque primo P functio logarithmica, et integranda propoſita ſit formula differentialis $\frac{dx}{xlx}$. Pono $lx = y$, ex quo fit $\frac{dx}{x} = dy$, et his ſubſtitutis habetur $\frac{dx}{xlx} = \frac{dy}{y}$, cujus integrale eſt ly, et reſtituto valore ipſius y, erit $\int\frac{dx}{xlx} = llx$

Sit $dy = m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x}$ et quæritur y. Pono $lx = z$, ut fit $\frac{dx}{x} = dz$, $(lx)^{m-1} = z^{m-1}$ et $m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x} = mz^{m-1}dz$; integrale quæſitum erit $= z^m = (lx)^m$.

Sit $dy = m.(llx)^{m-1}\frac{dx}{xlx}$ et quæritur y. Pono $llx = z$,

$= z$, ex quo ſit $\frac{dx}{x} = dz$, $llx = lz$, proinde eſt $dy =$
$m(lz)^{m-1}\frac{dz}{z}$, ac $y = (lz)^m = (llx)^m$.

Sit $dy = nm\,(lx^m)^{n-1}\frac{dx}{x}$, et quæritur y. Po[illegible]
$x^m = z$, ut fiat $dx = \frac{dz}{mx^{m-1}}$, $lx^m = lz$, et $dy =$[illegible]
$(lz)^{n-1}\frac{dz}{mx^m} = n.\,(lz)^{n-1}\frac{dz}{z}$, ex quo habetur $y = (lz$[illegible]
$= (lx^m)^n$.

Sit $dy = nm\,(l(lx)^m)^{n-1}\frac{dx}{xlx}$, et quæritur y. P[illegible]
no $lx = z$, ex quo habetur $\frac{dx}{x} = dz$, $(lx)^m = z$[illegible]
et $dy = nm\,(lz^m)^{n-1}\frac{dz}{z}$, proinde $y\,(lz^m)^n =$ [illegible]
$(lx)^m)^n$.

§. 401.

Ad functiones exponentiales quod attinet, cum ge-neraliter quantitatis exponentialis differentiale ſit ipſa il-la quantitas per differentiale logarithmi ſui multiplicat[a], viciſſim, ſi proponatur formula differentialis exponentia-lis, *ejus integrale erit ipſa hæc quantitas per differentia[le] logarithmi ſui diviſa.* Ita ſi fuerit $dy = c^x\,dx$, erit $y =$ c^x. Si ſit $du = xy\,dy\,lx + xy^{-1}ydx$, invenitur $u =$ xy. Ad hujusmodi integralia invenienda iterum mu[l]tum utilitatis afferunt ſubſtitutiones, qua exponentia[lis] quantitas alii variabili æqualis ponitur. Propoſita nimi-rum ſit æquatio $dy = c^x\,dx$, et quæritur y. Pono c^x $= z$, ex quo fit $xlc = lz$, vel $x = lz$, ſi c ſit baſis lo-garith

arithmorum naturalium. Porro erit $dx = \frac{dz}{z}$, et

roinde $dy = z\frac{dz}{z} = dz$, et $y = z = c^x$.

Si propoſita ſit æquatio $du = x^y\, dylx + x^{y-1}ydx$,
quæratur u, pono $x^y = z$, $x^{y-1} = \frac{z}{x}$, ex quo
ibetur $ylx = lz$, et $y\frac{dx}{x} + dylx = \frac{dz}{z}$. Fit igi-
r $du = z\frac{dz}{z} - zy\frac{dx}{x} + \frac{z}{x}ydx = dz$, et $u = z$
x^y.

Si ſit $du = x^{y^z}(y^z x^{-1}dx + y^z dz lx ly + y^{z-1}zdylx)$, po-
$x^{y^z} = s$, ut fiat $y^z lx = ls$, et $y^z x^{-1}dx + y^z dz lx ly$
$y^{z-1}zdylx = \frac{ds}{s}$. Proinde factis ſubſtitutionibus
it $du = ds$, atque $u = s = x^{y^z}$.

§. 402.

Cum quævis functio y unius variabilis x repræſen- F.294.
lineam quandam, patet, ſi ratio variabilium y et
ad ſe invicem detur per æquationem exponentialem,
c ipſa æquatione lineam quandam definiri a natura hu-
æquationis *exponentialem* vocatam. Aequatio quae-
indeterminata duarum variabilium x et y mutuam a
invicem dependentiam exprimens conſtrui dicitur, ſi
earum x per rectam indefinitam repræſentata et
ovis ipſius x valore per partem DE in eadem abſciſ-
exhibito huic DE applicetur alia recta EF alterius
iabilis y valorem ipſi DE reſpondentem repræſentans.
uirendum igitur nobis erit in methodum æquationes
oque exponentiales conſtruendi. Propoſita igitur ſit
uatio $x^x = y$, atque ex eadem elicitur ſequens æqua-
tio

tio logarithmica, $xlx = ly$. Sit deſcripta logarithmica PB, cujus ſubtangens $= 1 =$ AD, ſitque DE $=$ BC$=x$, erit DC $= lx$. Fiat AD : BC $=$ DC : DM, erit DM$=$ $xlx = ly$, et proinde MN $= y$, cui ſi æqualis applicetur EF ad abſciſſam DE, erit punctum F in curva quæſita HGF. Poſitio tangentis in F ſic invenitur. Aequatione $x^x = y$ differentiata fit $x^x\,dx + x^x\,lxdx = dy$, et ſubſtituto y loco x^x erit $dy = ydx + ylxdx$, proinde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y(1+lx)} \text{ et ſubtangens} = \frac{1}{1+lx} = \frac{AD}{AD+DC}.$$

Sumta igitur AD $+$ DC : AD $=$ AD : EL, erit EL ſubtangens et FL tangens curvæ in puncto F.

Quodſi proponatur curva, cujus æquatio $x^y = a$, habebitur ad logarithmos redacta $ylx = la$, unde, ut in caſu præcedente factum eſt, per logarithmicam elicitur curvæ conſtructio. Differentiando autem erit $xlxdy = -aydx$, id quod ſubtangentem determinat.

§. 403.

Eſto curvae aequatio $x^x = ay$, et proinde $xlx = ly$ quod conſtructioni inſervit. Sumtis differentialibus obtinetur $dx + lxdx = dyla$, ex quo pariter ſubtangentis determinatio fluit. Obſervatu dignum eſt, quod hujus curvæ quadratura citra ſeriem poſſit exhiberi. Eſt enim

$$\int ydx = \frac{2xxlx - xx}{4la}.$$ conf. §404.

Si proponeretur $a^x = y$, ideoque eſſet $xla = ly$ prodiret $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{la} =$ conſtanti, unde concludendum æquationem ipſiſſimæ logarithmicæ competere.

Data jam ſit exponentialis plurium terminorum, v. g. $x^x + x^c = x^y + y$. Sumtis differentialibus cujusque termini ſeparatim invenitur $d.\,x^x = x^x\,dx + x^x\,lxdx$; $d.\,x^c = cx^{c-1}dx$; $d.\,x^y = yx^{y-1}dx + x^y\,lxdy$, quæ rite diſpoſita dabunt hanc æquationem $x^x\,dx + x^x\,lxdx + cx^{c-1}\,dx - yx^{y-1}dx = x^y\,lxdy + dy$. Inferendo itaque

t dy ad dx, id eſt ut $x^x + x\, lx + cx^{c-1} - yx^{y-1}$ ad x^y $x + 1$; ita y ad quartam proportionalem; erit haec uarta proportionalis ſubtangens quæſita curvæ propoſitæ. Multitudo terminorum conſtructionem plane non npedit. Cum enim mediante logarithmica ſingulis eorſim aſſignari poſſit quantitas æqualis; patet utique, uantitates iſtas hoc modo aſſignatas ſimul ſumtas forare ipſam illam, quæ quæritur.

Haec exempla allata abunde illuſtrant proceſſum ſtituendum circa alias primi gradus exponentiales; atue ex illis haud difficulter perſpicitur, quomodo methous adplicanda ſit ad altiores gradus; in omnibus enim par perandi ratio obſervanda eſt.

§. 404.

Præter has methodos inveniendi integralia formularum differentialium logarithmicarum et exponenlium etiam alia uti poſſumus, quæ ſequentibus nititur tiociniis. Si integrari debeat formula ydx et y ſit nctio ipſius x; erit $ydx = ydx + xdy - xdy$, et ideo $dx = \int(ydx + xdy) - \int xdy = xy - \int xdy$. Pari moo exiſtentibus y et z functionibus ipſius x ſi integrant ſit formula $yzdx + xzdy$; erit $yzdx + xzdy = yzdx$ $xzdy + xydz - xydz$, ac proinde $\int(yzdx + xzdy) =$ $yzdx + xzdy + xydz) - \int xydz = xyz - \int xydz$. His ſitis quærendum ſit integrale formulae $xdx \,.\, lx$; ac ſervo xdx eſſe differentiale ipſius xx per $\frac{1}{2}$ multiplicam, ita ut poſito $xx = z$ ſit $xdx = \frac{1}{2}dz$, et $xdx.lx =$ $zdz = ydz$, ſi loco $\frac{1}{2}lx$ ponatur y. Sed eſt $ydz + z.dy$ $zdy = ydz$, ideo integrale quæſitum $= yz - \int zdy =$

$$xlx - \int xx \,.\, \frac{dx}{2x} = \tfrac{1}{2}xxlx - \int \tfrac{1}{2}xdx = \tfrac{1}{2}xxlx - \tfrac{1}{4}xx.$$

ecundum eandem methodum generatim invenietur $\int x^m$

$$.dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}lx - \int \frac{x^m dx}{m+1} = \frac{x^{m+1}}{m+1}lx - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}.$$

§. 405.

§. 405.

Si propoſitum ſit differentiale $x^m dx . (lx)^n$, iterum obſervo, $x^m dx$ eſſe differentiale ipſius x^{m+1} per $\frac{1}{m+1}$ multiplicatum. Pono itaque $x^{m+1} = z$, erit $x^m dx = \frac{1}{m+1} dz$. Pono præterea $\frac{1}{m+1}(lx)^n = y$, erit $dy = \frac{1}{m+1} n (lx)^{n-1} \frac{dx}{x}$ atque $x^m dx . (lx)^n = ydz$, ideoque integrale quæſitum $= \int(ydz + zdy) - \int zdy = yz - \int zdy = \frac{x^{m+1}}{m+1}(lx)^n - \int \frac{nx^m dx}{m+1}(lx)^{n-1}$. Eadem operatione continuata ſecundi termini integrale invenitur $- \frac{nx^{m+1}}{(m+1)^2}(lx)^{n-1} + \int \frac{n.n-1.x^m}{(m+1)^2}(lx)^{n-2}dx$. Tertii termini per eadem principia invenitur $\frac{n.n-1.x^{m+1}}{(m+1)^3}(lx)^{n-2} - \int \frac{n.n-1.n-2.x^m}{(m+1)^3}(lx)^{n-3}dx$, atque hæc operatio quoties n eſt numerus integer poſitivus tandem finietur et ſeries abrumpetur. Alias eadem ſeries in infinitum excurrrit. Forma ſeriei generalis hæc erit $\int x^m dx(lx)^n$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(lx^n - \frac{n(lx)^{n-1}}{m+1} + \frac{n.n-1.(lx)^{n-2}}{(m+1)^2} - \frac{n.n-1.n-2}{(m+1)^3}(lx)^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{(m+1)^4}(lx)^{n-4} - \text{etc.}\right).$$

§. 406.

Adplicemus hæc quoque ad functiones exponentiales; atque ſi proponatur functio $zeg^z dz$, ejus integrale ſic quæritur. Obſervo, quod $eg^z dz$ ſit differentiale ipſius

ſius e^{gz} per conſtantem g diviſum. Poſito itaque $\frac{e^{gz}}{g} = y$, erit $e^{gz}dz = dy$. Proinde $ze^{gz}dz = zdy$. Eſt vero $\int zdy = \int(zdy + ydz) - \int ydz = yz - \int e^{gz}dz = yz - \int \frac{e^{gz}dz}{g} = \frac{e^{gz}z}{g} - \frac{e^{gz}}{gg}$. Eadem methodo invenitur $\int z^2 e^{gz}dz = \frac{z^2 e^{gz}}{g} - \int \frac{2ze^{gz}dz}{g}$, et $-\int \frac{2ze^{gz}dz}{g} = -\frac{2ze^{gz}}{gg} + \frac{2e^{gz}}{g^3}$. Proinde $\int z^2 e^{gz}dz = \frac{z^2 e^{gz}}{g} - \frac{2ze^{gz}}{gg} + \frac{2e^{gz}}{g^3}$. Haud difficile eſt, applicare hanc methodum ad formulam generalem $z^m e^{gz}dz$. Invenietur enim $\int z^m e^{gz}dz = e^{gz}\left(\frac{z^m}{g} - \frac{mz^{m-1}}{gg} + \frac{m.m-1.z^{m-2}}{g^3} - \frac{m.m-1.m-2.z^{m-3}}{g^4} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.z^{m-4}}{g^5} - \text{etc.}\right)$, quae ſeries verum ſi m eſt numerus integer poſitivus tandem abrumpitur.

§. 407.

Quod attinet ad quantitates transſcendentes ex circulo ortas; primo quia differentiale ſinus arcus cujusvis aequale eſt differentiali arcus per coſinum multiplicato; ipſum habemus regulam: *Integrale coſinus per differentiale arcus ipſius multiplicati, ſinus ejusdem arcus eſt*, id eſt $\int dx\, \cos. x = \sin. x + C$. Conſtans C definitur ex §. ... Sic quoque eſt $\int dx\, \cos. ax = \frac{\sin. ax}{a} + C$, quod integrale ſic invenitur. Pono $ax = y$, erit $adx =$

$= dy$, et $dx = \frac{dy}{a}$, hisque valoribus ſubſtitutis habetur $\frac{1}{a} dy \, cos.y$ loco $dx \; cos.ax$, et proinde integrale quæſitum eſt $\frac{1}{a} ſin.y + C = \frac{ſin.\, ax}{a} + C$.

Si proponeretur formula $dx \; cos. \frac{x}{a}$; cujus integrale quæritur; pono $\frac{x}{a} = y$, erit $\frac{dx}{a} = dy$ et $dx = ady$, unde $dx \; cos \frac{x}{a} = ady \; cos.y$, cujus integrale $a \; ſin, y$, et proinde $\int dx \; cos \frac{x}{a} = a \; ſin \frac{x}{a} + C$.

Quia deinde eſt differentiale coſinus cujusque arcus aequale differentiali arcus negative ſumto per ſinum ejusdem arcus multiplicato; inde fluit regula: *Integrale coſinus per differentiale arcus ipſius multiplicati eſt ſinus ejusdem arcus cum ſigno contrario.* Ita eſt $\int dx \; ſin.x = - cos.x + C$. Eodem itaque modo ut ante invenitur $\int dx \; ſin.ax = - \frac{cos.\, ax}{a} + C$, et $\int dx \; ſin \frac{x}{a} = -a \; ſin \frac{x}{a} + C$.

§. 408.

Integranda jam ſit formula $dx \; cos.ax \; ſin.\beta x$, atque integrale habetur per eadem præcepta. Eſt enim $ſin ax \; cos \beta x = \frac{ſin(a+\beta)x}{2} + \frac{ſin(a-\beta)x}{2}$, et proinde $dx \; cos\, ax.\; ſin \,\beta x = \frac{dx \; ſin.(a+\beta)x}{2} + \frac{dx \; ſin\,(a-\beta)x}{2}$

Erg

Ergo $\int dx \cos \alpha x . \sin \beta x = - \frac{\cos (\alpha + \beta) x}{2(\alpha + \beta)} - \frac{\cos (\alpha - \beta) x}{2(\alpha - \beta)}$. Supponimus hic formulam $\sin \alpha . \cos \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{2} + \frac{\sin (\alpha - \beta)}{2}$, atque hæc facili deducitur negotio ex formulis §.40. demonſtratis. Eſt enim $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha . \sin \beta$, et $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha . \cos \beta - \cos \alpha . \sin \beta$, ergo $\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha . \cos \beta$, et $\frac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{2} = \sin \alpha . \cos \beta$. Habetur ex iisdem formulis quoque alia pro $\sin \alpha . \sin \beta$, ut et pro $\cos \alpha . \cos \beta$. Eſt enim $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha . \cos \beta - \sin \alpha . \sin \beta$, et $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha . \cos \beta + \sin \alpha . \sin \beta$. Ergo $\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha . \cos \beta$; $\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha . \sin \beta$; $\cos \alpha . \cos \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)}{2}$; $\sin \alpha . \sin \beta = \frac{\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)}{2}$. Harum itaque transformationum ope expedite integrantur formulæ $dx \sin \alpha x . \sin \beta x$, vel $dx \cos \alpha x . \cos \beta x$.

Uſum quoque in hoc integrationis negotio nonnunquam habent iſtæ ſinuum et coſinuum transformationes, quibus ut exponentiales imaginariae repræſentantur. (§. 359.). Sic loco formulæ $dx \cos \alpha x . \sin \beta x$ ſcribi poteſt $dx \left(\frac{e^{\alpha x \sqrt{-1}} + e^{-\alpha x \sqrt{-1}}}{2} \right)$

$$\times \left(\frac{e^{\beta x \sqrt{-1}} - e^{-\beta x \sqrt{-1}}}{2 \sqrt{-1}} \right) =$$

$$=dx\,\frac{e^{(\alpha+\beta)x\sqrt{-1}}-e^{(-\alpha-\beta)x\sqrt{-1}}-e^{(\alpha-\beta)x\sqrt{-1}}+e^{(\beta-\alpha)x\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$$

Atque hac transformatione differentiale reducitur ad integrationem functionis hujus formæ $dz e^{gz}$.

§. 409.

Tangentis arcus cujusvis differentiale eſt quotus differentialis arcus per quadratum coſinus ejusdem arcus diviſi; et cotangentis ejusmodi arcus differentiali æquatur differentiali arcus negative ſumto per quadratum ſinus ejusdem arcus diviſo (§. 348.). Ergo *ſi proponatur differentiale arcus circularis per quadratum coſinus diviſum; ejus integrale eſt ejusdem arcus tangens*, ſeu $\int\frac{dx}{cos.x^2}=tang.x+C$. Atque *ſi proponatur differentiale arcus per quadratum ſinus ſui diviſum; ejus integrale eſt cotangens illius arcus cum ſigno contrario*, id eſt $\int\frac{dx}{ſin\,x^2}=-cot.x+C$. Denique coſecantis differentiale eſt productum ex differentiali arcus in rectangulum ex tangente in ſecantem: coſecantis vero differentiale eſt productum ex differentiali arcus in rectangulum ex cotangente in coſecantem, unde inverſa regula pro integratione ejusmodi differentialium facile deducitur. Erit nimirum $\int dx\,tang.x\,ſec.x=ſec.x$, et $\int dx\,cot.x\,coſec.x=coſec.x$.

§. 410.

His bene perſpectis integratio quoque ſuccedet, ſi una plures operationes transſcendentes in formula differentiali propoſita deprehendantur.

Sit $dy=\frac{dx}{x}\,ſin.\,l\frac{1}{x}$; pono $l\frac{1}{x}=z$, erit $dz=-\frac{x^{-2}dx}{x^{-1}}=-\frac{dx}{x}$, et proinde $dy=-dz\,ſin.z$

Ergo $y=cos.z=cos.\,l\frac{1}{x}$.

Si

Sit $dy = e^{\sin. x} dx \cos. x$; pono $\sin. x = z$, erit $dz = dx \cos. x$, et proinde $dy = e^z dz$. Ergo $y = e^z = e^{\sin. x}$.

Si ſit $dy = \frac{-n e^{\frac{-n}{\cos. x}} dx \sin. x}{\cos. x^2}$; pono $-\frac{n}{\cos. x} = z$, erit $dz = \frac{-n dx \sin. x}{\cos. x^2}$, quo ſubſtituto erit $dy = e^z dz$, et proinde $y = e^z = e^{\frac{-n}{\cos. x}}$.

Si ſit $dy = \frac{-n e^{\frac{-n}{\sin. x}} dx \cos. x}{2 \sin. x^2 (1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}})}) \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}})}}$;

ad inveniendum integrale y, pono $e^{\frac{-n}{\sin. x}} = z$, erit $dz = \frac{e^{\frac{-n}{\sin. x}} n dx \cos. x}{\sin. x^2}$. Hoc valore ſubſtituto invenitur $dy = \frac{-dz}{2(1 - \sqrt{(1 - z)}) \sqrt{(1 - z)}}$. Pono præterea $1 - \sqrt{(-z)} = u$, erit $-\frac{1}{2}(1 - z)^{-\frac{1}{2}} dz = du$, unde fit $dy = \frac{du}{u}$, et $y = lu = l(1 - \sqrt{(1 - z)}) = l(1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}})})$.

Sit $dy = e^{\tan g. x} . \frac{dx \cos. x}{\sin. x} + l \sin. x . \frac{e^{\tan g. x} dx}{\cos. x^2}$; atque poſito $e^{\tan g. x} = u$, erit $\frac{e^{\tan g. x} dx}{\cos. x^2} = du$. Poſito præterea

terea $l\,ſin.\,x = z$, erit $\frac{dx\,cot.\,x}{ſin.\,x} = dz$. Proinde $dy = udz + zdu$, et $y = uz = e^{tang.\,x}\,l\,ſin.\,x$.

SECTIO XXVI.

DE CALCVLO DIFFERENTIALI FVNCTIONVM, QVAE VNA PLVRES INVOLVVNT VARIABILES.

§. 411.

Quodſi generatim V denotet functionem plurium variabilium z, y, x, u, etc; incrementum quod functio V capit, ſi ſingulæ variabiles z, y, x, u, etc, differentiis ſuis Δz, Δy, Δx, Δu, etc, augeantur, hic vocatur *differentia* functionis V. Indicet V functionem duarum variabilium x et y quamcunque, ſive algebraicam, ſive transcendentem, isque valor, in quem tranſit V, ſi in eadem ſimul $x + \Delta x$ loco x et $y + \Delta y$ loco y ponatur, exprimatur per V^{I}, erit $\Delta V = V^{I} - V$. Deinde iſtius ipſius V valor, in quem tranſit, ſi tantum loco x ponatur $x + \Delta x$, per $[x + \Delta x]V$; is vero, in quem V tranſit, ſi in eadem tantum loco y ponatur $y + \Delta y$, per $[y + \Delta y]V$ indicetur. Jam manifeſtum eſt, quod eadem oriri debeat quantitas, ſi primum pro ſolo x ſtatuatur $x + \Delta x$, et deinde in quantitate reſultante $y + \Delta y$ loco y; vel quod eodem redit, primum $y + \Delta y$ loco y et deinde in quantitate reſultante $x + \Delta x$ loco x: ac ſi ſimul $y + \Delta y$ loco y et $x + \Delta x$ loco x ſtatuatur. Valor itaque $[x + \Delta x]V$ abit in V^{I} ſi loco y ponatur $y + \Delta y$; atque valor

valor $[y+\Delta y]V$ abit in V^{I}, ſi loco x ponatur $x+\Delta x$. Incrementum functionis V, quod capit, ſi tantum ponatur $x+\Delta x$ loco x, quantitas y vero tanquam conſtans ſpectetur, denotabimus per $\overset{x}{\Delta}V$. Pari ratione incrementum ipſius V, quod capit, ſi tantum $y+\Delta y$ loco y ſcribatur, x vero pro conſtante habeatur, indicabimus per $\overset{y}{\Delta}V$. Eodem modo incrementum $\overset{x}{\Delta}V$, ſi in hac functione loco y ponatur $y+\Delta y$, ſigno $\overset{yx}{\Delta\Delta}V$; et incrementum, quod capit $\overset{y}{\Delta}V$, ſi loco x ponatur $x+\Delta x$ ſigno $\overset{xy}{\Delta\Delta}V$ exprimendum erit. Quodſi iam in functione V ponatur $x+\Delta x$ loco x, ut V abeat in $[x+\Delta x]V$, fiet $[x+\Delta x]V = V+\overset{x}{\Delta}V$. Si præterea in valore ſic invento $[x+\Delta x]V$ ponatur $y+\Delta y$ loco y, $[x+\Delta x]V$ abit in V^{I}, V mutatur in $V+\overset{y}{\Delta}V$, et $\overset{x}{\Delta}V$ tranſit in $\overset{x}{\Delta}V+\overset{yx}{\Delta\Delta}V$. Proinde habemus $V^{\mathrm{I}} = V+\overset{x}{\Delta}V+\overset{y}{\Delta}V+\overset{yx}{\Delta\Delta}V$. Eſt vero $\Delta V = V^{\mathrm{I}}-V$; ergo eſt $\Delta V = \overset{x}{\Delta}V+\overset{y}{\Delta}V+\overset{yx}{\Delta\Delta}V$, vel quod idem eſt, $\Delta V = \overset{x}{\Delta}V+\overset{y}{\Delta}V+\overset{xy}{\Delta\Delta}V$, quia $\overset{yx}{\Delta\Delta}V = \overset{xy}{\Delta\Delta}V$, quod ſequenti ratione demonſtrari poteſt. Quando ex functione V quæritur V^{I}, idem prodit quantitas ſi primo in eadem ponatur $x+\Delta x$ loco x, et $y+\Delta y$ in quantitate reſultante $[x+\Delta x]V$ loco y; ac ſi in V primo $y+\Delta y$ loco y et deinde in quantitate reſultante $[y+\Delta y]V$ loco x ſcribatur $x+\Delta x$. Priori vero caſu habemus $V^{\mathrm{I}} = V+\overset{x}{\Delta}V+\overset{y}{\Delta}V+\overset{yx}{\Delta\Delta}V$, in poſteriori caſu $V^{\mathrm{I}} = V+\overset{y}{\Delta}V+\overset{x}{\Delta}V+\overset{xy}{\Delta\Delta}V$. Proin-

de eſt $V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V = V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V$, et æqualibus utrinque ſubtractis $\overset{yx}{\Delta\Delta}V = \overset{xy}{\Delta\Delta}V$.

§. 412.

Sit V functio trium variabilium x, y, z; atque oritur V^{1}, ſi variabiles x, y, z, ſuis differentiis $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, ſimul augeantur. Poteſt vero quoque primo una earum variabilium ut x ſola augeri ſua differentia Δx, atque hoc facto in quantitate reſultante poni $y + \Delta y$ loco y, tumque demum in functione ſic orta ſcribi $z + \Delta z$ loco z, ut producatur V^{1}, ubi perinde eſt, quo ordine li variabilium x, y, et z valores ſubſtituantur. Poſito $x + \Delta x$ loco x functio V tranſeat in $[x + \Delta x]V$; poſito deinde in hac quantitate $y + \Delta y$ loco y, eadem abeat in $[y + \Delta y; x + \Delta x]V$; atque ex hac ultima functione fiet V^{1} ſi in eadem $z + \Delta z$ loco z ponatur. Similibus itaque, ut in §. *praec.* adhibitis ſignis patet, fieri $[x + \Delta x]V = V + \overset{x}{\Delta}V$, ſi primo ſola x variabilis aſſumatur. Deinde ſi utrinque loco y ponatur $y + \Delta y$, fiet $[y + \Delta y; x + \Delta x]V = V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V$. Denique ſi utrinque etiam $z + \Delta z$ loco z ponatur, habemus $V^{1} = V + \overset{z}{\Delta}V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{zy}{\Delta\Delta}V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{zx}{\Delta\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V + \overset{zyx}{\Delta\Delta\Delta}V$, et proinde $\Delta V =$

$$V^{1} - V = \overset{z}{\Delta}V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{zy}{\Delta\Delta}V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{zx}{\Delta\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V + \overset{zyx}{\Delta\Delta\Delta}V.$$

Simili ratione quoque pergere licet ad eum caſum, quo V eſt functio quatuor variabilium x, y, z, u. Poſitis enim ſucceſſive ipſis x, y, z, u, ſolis variabilibus, ut ante concluditur, eſſe $[z + \Delta z; y + \Delta y; x + \Delta x]V = V + \overset{z}{\Delta}V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{zy}{\Delta\Delta}V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{xz}{\Delta\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V + \overset{zyx}{\Delta\Delta\Delta}V$. Scripto itaque nunc utrinque $u + \Delta u$ loco u, invenitur

$$V^{1} = V + \overset{u}{\Delta}V + \overset{z}{\Delta}V + \overset{uz}{\Delta\Delta}V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{uy}{\Delta\Delta}V + \overset{zy}{\Delta\Delta}V + \overset{uzy}{\Delta\Delta\Delta}V$$

$\overset{zy}{\Delta\Delta}V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{ux}{\Delta\Delta}V + \overset{zx}{\Delta\Delta}V + \overset{uzx}{\Delta\Delta\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V + \overset{uyx}{\Delta\Delta\Delta}V$
$\overset{yx}{\Delta\Delta}V + \overset{uzyx}{\Delta\Delta\Delta\Delta}V$. Ex his concludi poteſt formula ge-
eralis pro differentia functionis V quotcunque variabi-
ium. Continet enim iſta differentia primo ſummam
mnium differentiarum ejusdem functionis V, quæ pro-
eunt, ſi primo quævis variabilis ſeorſim ſua differentia
ugeatur; deinde ſummam omnium differentiarum, quæ
rodeunt, ſi ſingulæ binæ ſolæ ſpectentur ut variabiles,
a quidem ut hic iterum primo pro quavis ſola variabili
uæratur differentia ipſius V, et deinde hujus differen-
æ capiatur differentia, poſita altera variabili; præterea
ummam omnium differentiarum, quæ deſcripto modo
odeunt, poſitis ſingulis ternis variabilibus, donec
rveniatur ad differentiam ipſius V, quæ prodit, ſi
mnes ſed ſucceſſive ſpectentur ut variabiles, ita qui-
em, ut primo quæratur ipſius V differentia poſita una
la variabili, deinde hujus differentiæ differentia, po-
a ſecunda variabili, ſicque pergendo uſque ad ulti-
am. Si enim iſta lex valet pro functione n variabi-
um, eadem quoque lex valere debet pro functione
$+1$ variabilium, quod ex antecedentibus ultro patet.
æterea, prouti pro functione duarum variabilium x et
$\overset{yx}{\Delta\Delta}V = \overset{xy}{\Delta\Delta}V$; ita quoque pro functione trium va-
bilium eſt $\overset{zyx}{\Delta\Delta\Delta}V = \overset{yxz}{\Delta\Delta\Delta}V = \overset{xzy}{\Delta\Delta\Delta}V = \overset{zyx}{\Delta\Delta\Delta}V$. Simi-
proprietas de functionibus quatuor et plurium varia-
ium demonſtrari poteſt.

§. 413.

Quando problema aliquod mathematicum ad fun-
onem quandam plurium variabilium perducit; iſtæ
riabiles omnes ab una quadam variabili determinata,
üs differentiae conſtantes aſſumuntur, ſic pendent,
hac variata, illæ omnes differentiis ſuis augeantur.

duarum tantum variabilium, ut methodus generalis poſtea eo diſtinctius explicari queat.

§. 415.

Sit itaque V functio duarum variabilium x et y, ambæ vero variabiles x et y pendeant a variabili t, cujus differentia Δt ſumitur conſtans. Ac primo quidem demonſtravimus, eſſe $\Delta V = \overset{x}{\Delta} V + \overset{y}{\Delta} V + \overset{yx}{\Delta\Delta} V$; ipſa vero quæſtio eo redit, ut rationis $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ limes $\frac{dV}{dt}$ aſſignetur. Quia jam incrementum Δy functionis y unius variabilis x ſequentem habet formam $\Delta y = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4 +$ etc; deducere hinc poſſumus formulam pro incremento functionis V duarum variabilium x et y generalem. Habemus enim $\overset{x}{\Delta} V = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4$ etc, $\overset{y}{\Delta} V = \mathfrak{P}\Delta y + \mathfrak{Q}\Delta y^2 + \mathfrak{R}\Delta y^3 + \mathfrak{S}\Delta y^4 +$ etc, $\overset{y}{\Delta} P = p\Delta y + q\Delta y^2 + r\Delta y^3 + s\Delta y^4 +$ etc, $\overset{y}{\Delta} Q = \mathfrak{p}\Delta y + \mathfrak{q}\Delta y^2 + \mathfrak{r}\Delta y^3 + \mathfrak{s}\Delta y^4 +$ etc, $\overset{y}{\Delta} R = \pi\Delta y + \varrho\Delta y^2 + \sigma\Delta y^3 + \tau\Delta y^4 +$ etc, $\overset{y}{\Delta} S = \beth\Delta y + \daleth\Delta y^2 + \gimel\Delta y^3 + \text{ט}\Delta y^4 +$ etc. Proinde $\overset{yx}{\Delta\Delta} V = p\Delta y\Delta x + q\Delta y^2\Delta x + r\Delta y^3\Delta x + s\Delta y^4\Delta x +$ etc, $+ \mathfrak{p}\Delta y\Delta x^2 + \mathfrak{q}\Delta y^2\Delta x^2 + \mathfrak{r}\Delta y^3\Delta x^2 + \mathfrak{s}\Delta y^4\Delta x^2 +$ etc, $+ \pi\Delta y\Delta x^3 + \varrho\Delta y^2\Delta x^3 + \sigma\Delta y^3\Delta x^3 + \tau\Delta y^4\Delta x^3 +$ etc, $+ \beth\Delta y\Delta x^4 + \daleth\Delta y^2\Delta x^4 + \gimel\Delta y^3\Delta x^4 + \text{ט}\Delta y^4\Delta x^4 +$ etc. Omnibus igitur in ſummam collectis et terminis ſecundum dimenſiones variabilium Δx et Δy collocatis fiet $\Delta V = P\Delta x + \mathfrak{P}\Delta y + Q\Delta x^2 + p\Delta y\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta y^2 + R\Delta x^3 + \mathfrak{p}\Delta y\Delta x^2 + q\Delta y^2\Delta x + \mathfrak{R}\Delta y^3 + S\Delta x^4 + \pi\Delta x^3\Delta y + \mathfrak{q}\Delta x^2\Delta y^2 + r\Delta x\Delta y^3 + \mathfrak{S}\Delta y^4 +$ etc. Utrinque jam per Δt diviſo habetur $\frac{\Delta V}{\Delta t} = P\frac{\Delta x}{\Delta t} + \mathfrak{P}$

$+ Q\frac{\Delta x^2}{\Delta t} + p\frac{\Delta y \Delta x}{\Delta t} + \mathfrak{Q}\frac{\Delta y^2}{\Delta t}$ + etc. Evaneſcente vero Δt, et cum eo ſimul Δx et Δy, erit limes rationis $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ ſeu $\frac{dV}{dt} = P\frac{dx}{dt} + \mathfrak{P}\frac{dy}{dt}$; omnes enim termini ſequentes ſunt $= 0$. Quodſi itaque ipſa x foret $= t$, ſeu differentia Δx conſtans, eſſet $\frac{dV}{dx} = P + \mathfrak{P}\frac{dy}{dx}$. Vtroque caſu æquatio ſic quoque poteſt exprimi $dV = Pdx + \mathfrak{P}dy$, atque tum $Pdx + \mathfrak{P}dy$ dicitur differentiale proximum ipſius V, ob eandem rationem, quam ſupra §. 28. allegavimus. Eſt enim formula $dV = Pdx + \mathfrak{P}dy$ eadem cum formula $dV + (P\frac{dx}{dt} + \mathfrak{P}\frac{dy}{dt})\,dt$, ubi $\frac{dx}{dt}$ atque $\frac{dy}{dt}$ ſunt quantitates finitae. Si vero ſit z alia ipſarum x et y functio, atque inventum ſit $dz = (F\frac{dx}{dt} + G\frac{dy}{dt})dt$; ſimul habetur ultima ratio

$$\frac{dV}{dz} = \frac{P\frac{dx}{dt} + \mathfrak{P}\frac{dy}{dt}}{F\frac{dx}{dt} + G\frac{dy}{dt}} = \frac{Pdx + \mathfrak{P}dy}{Fdx + Gdy},$$

quæ pariter fit ex æquationibus $dV = Pdx + \mathfrak{P}dy$ et $dz = Fdx + Gdy$. Ex antecedentibus denique patet, eſſe $Pdx = \overset{x}{d}V$, $\mathfrak{P}dy = \overset{y}{d}V$, unde concluditur $dV = \overset{x}{d}V + \overset{y}{d}V$, quæ formula ſequentem pro differentiandis functionibus duarum variabilium præbet regulam generalem. *Ad functionem duarum variabilium differentiandam, propoſita functio pro qualibet variabili ſeorſim differentietur, quaſi altera*

ra conſtans eſſet; et aggregatum duarum differentialium o modo inventorum eſt differentiale quaeſitum.

§. 416.

Quod autem nunc adtinet ad functiones trium vel plurium variabilium x, y, z, u, etc, differentiandas ſequentem in modum concludo. Generaliter eſt $\Delta V = \overset{x}{\Delta}V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{z}{\Delta}V + \overset{u}{\Delta}V + \text{etc,} + \overset{xy}{\Delta\Delta}V + \overset{xz}{\Delta\Delta}V + \overset{xu}{\Delta\Delta}V + \overset{yz}{\Delta\Delta}V + \overset{yu}{\Delta\Delta}V + \text{etc. etc.}$ (§. 412.). Proinde ſi omnes iſtae variabiles x, y, z, u, etc, a variabili t pendere ponantur, cujus differentia Δt conſtans eſt, ac utrinque per Δt dividatur, tum vero Δt, atque cum hac differentia ſimul Δx, Δy, Δz, Δu, etc. evaneſcere ponantur;

invenitur $\frac{dV}{dt} = \frac{\overset{x}{d}V}{dt} + \frac{\overset{y}{d}V}{dt} + \frac{\overset{z}{d}V}{dt} + \frac{\overset{u}{d}V}{dt} + \text{etc,}$

reliquis terminis omnibus, ubi ſignum Δ plus una vice in numeratore adeſt, omnibus evaneſcentibus. Ae-

quatio autem $\frac{dV}{dt} = \frac{\overset{x}{d}V}{dt} + \frac{\overset{y}{d}V}{dt} + \frac{\overset{z}{d}V}{dt} + \frac{\overset{u}{d}V}{dt} +$

etc, ob allegatam in §. *praec.* rationem ita quoque ſcribi poteſt, $dV = \overset{x}{d}V + \overset{y}{d}V + \overset{z}{d}V + \overset{u}{d}V + \text{etc,}$ unde iſta pro differentiandis functionibus plurium variabilium fluit regula generalis: *In functione propoſita conſideretur ſeorſim qualibet quantitas variabilis et functio propoſita per qualibet differentietur, quaſi reliquae omnes eſſent conſtantes, tum ſingula haec differentialia, quae ex ſingulis variabilibus ſunt inventa, colligantur, eritque aggregatum differentiale quaeſitum functionis propoſitae.*

Exempla ejusmodi differentiationis erunt ſequentia.

$d.\,xy = xdy + ydx.$

$d.\,\frac{x}{y} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}.$

$$\frac{y}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(aa-xx)}} + \frac{yxdx}{(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$(\alpha x+\beta y+\gamma)^m(\delta x+\varepsilon y+\zeta)^n = m(\alpha x+\beta y+\gamma)^{m-1}(\delta x+\varepsilon y+\zeta)^n(\alpha dx+\beta dy)$$
$$+\,n(\alpha x+\beta y+\gamma)^m(\delta x+\varepsilon y+\zeta)^{n-1}(\delta dx+\varepsilon dy) = (\alpha x+\beta y+\gamma)^{m-1}(\delta x+\varepsilon y+\zeta)^{n-1}$$
$$\left(\begin{matrix} m\alpha\delta \\ n\alpha\delta \end{matrix} xdx \begin{matrix} +m\beta\delta \\ +n\alpha\varepsilon \end{matrix} xdy \begin{matrix} +m\alpha\varepsilon \\ +n\beta\delta \end{matrix} ydx \begin{matrix} +m\beta\varepsilon \\ +n\beta\varepsilon \end{matrix} ydy \begin{matrix} +m\alpha\zeta \\ +n\gamma\delta \end{matrix} dx \begin{matrix} +m\beta\zeta \\ +n\gamma\varepsilon \end{matrix} dy\right)$$

$$ylx = dylx + \frac{ydx}{x}.$$

$$dx^y = yx^{y-1}dx + x^y\,dylx.$$

$$A\,tang\,\frac{y}{x} = \frac{xdy-ydx}{xx+yy}.$$

$$\sin.x\cos.y = dx\cos.x\cos.y - dy\sin.x\sin.y.$$

$$\frac{e^z y}{\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{e^z ydz}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{e^z(xxdy-yxdx)}{(xx+yy)\sqrt{(xx+yy)}}.$$

$$e^z A\sin\frac{x-\sqrt{(xx-yy)}}{x+\sqrt{(xx-yy)}} = e^z dz A\sin\frac{x-\sqrt{(xx-yy)}}{x+\sqrt{(xx-yy)}}$$
$$+\,e^z\frac{xydy-yydx}{(x+\sqrt{(xx-yy)})(xx-yy)^{\frac{3}{4}}\sqrt{x}}.$$ conf. §. 360.

§. 417.

Quoniam itaque differentiale functionis V duarum riabilium x et y ſequentem habet formam $dV = Pdx$ Qdy, in qua ſunt P et Q functiones a functione V ndentes; ſequitur, has duas functiones P et Q certo odam modo a ſe invicem pendere, quia utraque ab dem functione V pendet. Ut iſta relatio inter funiones P et Q inveniatur, ſequentem in modum poſt argumentari. Demonſtratum eſt §. 411., exiſtente V

V functione duarum variabilium x et y, ſemper eſſe $\overset{yx}{\Delta\Delta}V = \overset{xy}{\Delta\Delta}V$, et proinde ratio $\frac{\overset{yx}{\Delta\Delta}V}{\overset{xy}{\Delta\Delta}V} = 1$ ratio conſtans, unde patet, etiam ipſius limitem $\frac{\overset{yx}{dd}V}{\overset{xy}{dd}V}$ eſſe = 1, ſeu $\overset{yx}{dd}V = \overset{xy}{dd}V$. Poſito nunc $dV = Pdx + Qdy$ ſit $dP = pdx + rdy$ et $dQ = qdx + sdy$. Ergo ſit $\overset{x}{d}V =$ Pdx et $\overset{yx}{dd}V = rdydx$. Deinde $\overset{y}{d}V = Qdy$ et $\overset{xy}{dd}V =$ $qdxdy$. Proinde $\frac{rdydx}{qdydx} = \frac{r}{q} = 1$, et $r = q$. Sit vero $r = \frac{\overset{y}{d}P}{dy}$ et $q = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$; proinde $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, que hæc ipſa eſt æquatio relationem functionum P et Q erga ſe invicem definiens. Quoties functio quædam trium variabilium x, y et z induit naturam functionis duarum tantum variabilium, toties proprieta[tes] hujus etiam illi competunt. Evenit autem hoc perpetuo, ſi una ex tribus variabilibus, quas functio y involvit, ſumatur conſtans. Triplici igitur modo hoc fieri poteſt, quia unaquæque ex tribus variabilibus x, y et z ſigillatim ſumta poni poteſt conſtans. Ponamus primo z conſtantem, et $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ induet formam $dV = Pdx + Qdy$; proinde erit $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$. Ponatur y conſtans, et ob $dV = Pdx + Rdz$, eva[det] $\frac{\overset{z}{d}P}{dz} = \frac{\overset{x}{d}R}{dx}$. Denique poſita x conſtante fit $dV =$

Qdy + Rdz, ideoque $\frac{d\overset{z}{Q}}{dz} = \frac{d\overset{y}{R}}{dy}$. Functiones itaque, P, Q et R in differentiali $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ ejusmodi ad ſe invicem habent relationem, ut ſit $\frac{d\overset{y}{P}}{dy} = \frac{d\overset{x}{Q}}{dx}$; $\frac{d\overset{z}{P}}{dz} = \frac{d\overset{x}{R}}{dx}$; $\frac{d\overset{z}{Q}}{dz} = \frac{d\overset{y}{R}}{dy}$. Eadem hæc ad functiones quatuor et plurium variabilium extendi poſſe, facile patet.

§. 418.

Inventa ſic regula pro inveniendo differentiali functionis V plurium variabilium ſimul via patet ad differentiale ſecundum et altiora ejusmodi functionum invenienda. Quem in finem adtendi debet ad ſequentia.

Si y eſt functio variabilis t, expreſſio $\frac{dy}{dt}$, vel generaliter $\frac{d^n y}{dt^n}$, denotat functionem quandam variabilis t, niſi ſit y functio ipſius t rationalis integra, cujus exponens ordinis numero n minor eſt, quem caſum hic quidem ſeponere poſſumus, quippe quo $\frac{d^n y}{dt^n}$ conſtanti vel nihilo æqualis eſſe poteſt, licet revera univerſalitati methodi exponendæ non noceat. Sit itaque $\frac{d^n y}{dt^n}$ functio variabilis t, cujus differentia Δt conſtans ponitur: et hujus functionis $\frac{d^n y}{dt^n}$ differentiale erit $\frac{d^{n+1} y}{dt^n}$, quod ex §. 241. ultro patet. Deinde ſi fuerit $\frac{d^n y}{dt^n} =$ T, ita ut T ſit functio ipſius t, erit $\left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)^m =$

 T^m

T^m (§. 254.), proinde $d. \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)^m = m T^{m-1} dT$.
Quia vero eſt $T^{m-1} = \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)^{m-1}$ (§. *cit.*), atque $dT = \frac{d^{n+1} y}{dt^n}$; concluditur eſſe $d. \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)^m = m \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)^{m-1} \cdot \frac{d^{n+1} y}{dt^n} = \frac{m (d^n y)^{m-1} d^{n+1} y}{(dt^n)^m}$. *Functiones itaque per hujusmodi expreſſiones* $\frac{d^n y}{dt^n}$, $\frac{(d^n y)^m}{(dt^n)^m}$ *datae, ſi ipſius* t *differentia ſit conſtans, non alia ratione differentiantur, ac ſi* $d^n y$ *eſſet quantitas variabilis,* dt^n *vero conſtans.*

§. 419.

Eſt vero non tantum $\frac{(d^n y)^m}{(dt^n)^m} = T^m$, ſi $\frac{d^n y}{dt^n} = T$, ea ſub hypotheſi, qua Δt aſſumitur conſtans; ſed quoque, ſi fuerit $\frac{d^n y}{dx^n} = P$, exiſtente P functione ipſarum y et x, y vero et x functionibus ipſius t, et Δt conſtans: erit $\frac{(d^n y)^m}{(dx^n)^m} = P^m$. Sit enim $\frac{d^n y}{dt^n} = F$, $\frac{dx}{dt} = G$, erit $\frac{dx^n}{dt^n} = G^n$, atque proinde $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{F}{G^n} = P$. Praeterea eſt $\frac{(d^n y)^m}{(dt^n)^m} = F^m$ et $\frac{(dx^n)^m}{(dt^n)^m} = G^{nm}$, ideo $\frac{(d^n y)^m}{(dt^n)^m} = \frac{F^n}{G^{nm}} = P^m$. Idem proinde etiam obtinet propoſitis formulis hujusmodi $\frac{d^n x}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dy^n}$, ſi ſit x vel y ipſius t functio et Δt conſtans. S… enim

enim fuerit $\frac{d^n x}{dt^n} = F$, $\frac{dx}{dt} = G$, erit $\frac{dx^n}{dt^n} = G^n$, et pro-
inde $\frac{d^n x}{dx^n} = \frac{F}{G^n} = P$. Sed $\frac{(d^n x)^m}{(dt^n)^m} = F^m$, et
$\frac{(dx^n)^m}{(dt^n)^m} = G^{nm}$, ideo $\frac{(d^n x)^m}{(dx^n)^m} = \frac{F^m}{G^{mn}} = P^m$. His
innititur methodus differentiandi functiones, quæ dantur
per hujusmodi expreſſiones $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n x}{dx^n}$, $\frac{(d^n y)^m}{(dx^n)^m}$, ſi y
et x a variabili quadam t pendent, et Δt conſtans ſit.

Sit itaque *primò* $\frac{d^n y}{dx^n} = P$, ſit præterea $\frac{d^n y}{dt^n} = F$,
$\frac{dx^n}{dt^n} = G^n$, erit $P = \frac{F}{G^n}$, atque $dP = \frac{G^n dF - F d.G^n}{G^{2n}}$.
Eſt vero $dF = \frac{d^{n+1} y}{dt^n}$, atque $d.G^n = nG^{n-1} dG =$
$\frac{n dx^{n-1} ddx}{dt^n}$, proinde $dP = \left(\frac{dx^n}{dt^n} \cdot \frac{d^{n+1} y}{dt^n} - \frac{d^n y}{dt^n} \cdot \frac{n dx^{n-1} ddx}{dt^n}\right) : \frac{dx^{2n}}{dt^{2n}} = \frac{dx^n d^{n+1} y - n d^n y dx^{n-1} ddx}{dx^{2n}}$. Eo-
dem modo invenitur $d.\frac{d^n x}{dx^n} = \frac{dx^n d^{n+1} x - n d^n x dx^{n-1} ddx}{dx^{2n}}$.

Si jam *ſecundo* propoſita ſit functio $\frac{(d^n y)^m}{(dx^n)^m} = P^m$, erit-
que $d.P^m = mP^{m-1} dP$. Aſt $P^{m-1} = \frac{(d^n y)^{m-1}}{(dx^n)^{m-1}}$, et $dP =$
$\frac{dx^n d^{n+1} y - n d^n y dx^{n-1} ddx}{dx^{2n}}$. Proinde $d.P^m = \frac{m(d^n y)^{m-1}}{(dx^n)^{m-1}} \cdot$
$\frac{dx^n d^{n+1} y - n d^n y dx^{n-1} ddx}{dx^{2n}}$. Patet vero, *quod hæc quo-*

 que

que differentialia ex ipſis propoſitis formulis differentiali- bus immediate inveniantur, ſi ſigna dx, *et* $d^n y$ *ut quanta variabilia conſiderentur.*

§. 420.

His poſitis propoſita ſit functio V duarum variabilium x et y, ac differentiale ipſius V ſequentem habet formam $dV = Pdx + Qdy$, ubi P et Q ſunt functiones variabilium x et y. Proprie autem hæc æquatio ſic exprimenda eſſet $\frac{dV}{dt} = P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}$. Hinc nullo negotio patet, eſſe $\frac{ddV}{dt} = P\frac{ddx}{dt} + dP\frac{dx}{dt} + Q\frac{ddy}{dt} + dQ\frac{dy}{dt}$, et proinde $\frac{ddV}{dt^2} = P\frac{ddx}{dt^2} + \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + Q\frac{ddy}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{dy}{dt}$; unde porro fluit $\frac{d^3V}{dt^2} = P\frac{d^3x}{dt^2} + dP\frac{ddx}{dt^2} + \frac{dP}{dt} \cdot \frac{ddx}{dt} + \frac{ddP}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + Q\frac{d^3y}{dt^2} + dQ\frac{ddy}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{ddy}{dt} + \frac{ddQ}{dt} \cdot \frac{dy}{dt}$. Ex quibus ſimul via patet ad differentialia ipſius V ſequentium ordinum invenienda. Quodſi Δx fuerit conſtans, invenitur $\frac{ddV}{dx} = dP + Q\frac{ddy}{dx} + dQ\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^3V}{dx^2} = \frac{ddP}{dx} + Q\frac{d^3y}{dx^2} + dQ\frac{ddy}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{ddy}{dx} + \frac{ddQ}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}$. Hæ autem æquationes differentiales ob rationes ſupra jam allegatas ſic ſcribi ſolent $ddV = Pddx + dP.dx + Qddy + dQ.dy$, $d^3V = Pd^3x + 2dP.ddx + ddP.dx + Qd^3y + 2dQddy + ddQ.dy$. Unde patet, *iſta quæ differentialia ex ipſa forma differentiali propoſita* $dV = Pdx + Qdy$ *inveniri, ſi* $d^n x$ *et* $d^n y$ *ut variabiles ſpectentur. Vel ſub hypotheſi* Δx *conſtantis ipſum* dx *pro* ...

ſtante habeatur. Tum enim fit $ddV = dP.dx + Qddy + dQ.dy$, $d^3V = ddP.\,dx + Qd^3y + 2dQddy + ddQ.\,dy$. Quodſi jam fuerit $dP = pdx + rdy$, et $dQ = rdx + qdy$; (debet enim eſſe $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx} = r$) erit $ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2$, atque ſi dx conſtans, fit $ddV = pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2$. Generatim itaque differentiale ſecundum ipſius V eam habet formam, ut ſit $ddV = Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdy^2 + Tdxdy$. Coefficientes vero P, Q, R, S, T, ita a ſe invicem pendent, ut ſit $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$ $R = \frac{\overset{x}{d}P}{dx}$; $S = \frac{dQ}{dy}$, $T = 2\frac{\overset{x}{d}Q}{dx} = 2\frac{\overset{y}{d}P}{dy}$.

§. 421.

Ex iis omnibus, quae §§. 418-420. expoſita ſunt, generatim concludimus, quod *methodus differentiandi generatim expoſitus non ſolum ad functiones finitas adſtricta ſit, ſed etiam eodem negotio cujusvis expreſſionis, quae non differentialia in ſe continet, differentiale inveniri poſſit.* Semper enim dabitur differentiale aliquod conſtans, ut dt^n, per quod dividi poſſunt ſinguli æquationis propoſita termini, ut æquatio ſub forma finita repræſentetur. Tum autem ipſa differentiatio nulla laborat difficultate. Denominator autem conſtans dt^n ipſa differentiatione non variabitur, quare ſi peracta differentiatione omnia per dt^n iterum multiplicentur; habebitur formula differentialis ex propoſita forma ſecundum conſuetam differentiationis methodum. Exemplo res clara erit. Sit propoſita æquatio $ddV = Pddx + pdx^2 + rdxdy + Qddy + qdy^2$, atque ſupponi poteſt, tam x, quam y pendere a variabili quadam t, cujus differentia

 At

dt conſtans eſt. Poni itaque poteſt $ddx = q dt^2$, $dx = p dt$, $ddy = \varrho dt^2$, $dy = \pi dt$, quibus valoribus ſubſtitutis fit $ddV = Pq dt^2 + pp^2 dt^2 + 2rp dt \pi dt + Q \varrho dt^2 + q\pi^2 dt^2$, atque $\frac{ddV}{dt^2} = Pq + pp^2 + 2rp\pi + Q\varrho + q\pi^2 =$

$$P\frac{ddx}{dt^2} + p\frac{dx^2}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + Q\frac{ddy}{dt^2} + q\frac{dy^2}{dt^2}.$$

Unde generaliter patet, quod ex iisdem rationibus, ſi propoſita ſit formula pro $d^n V$, ſinguli hujus formulæ termini diviſi per dt^n poſſint intelligi, atque ſimili modo formula pro $d^{n+1} V$ inveniri. Cæterum hæc omnia ad functiones trium vel plurium variabilium facili extendi poſſunt negotio.

§. 423.

Quia differentialia altiora functionis V, quae duas involvit variabiles x et y, aliam habent formam, ſi vel dx vel dy conſtans ſtatuatur, ac eo caſu, quo neque dx neque dy conſtans eſt; utile interdum eſt, eam hujusmodi differentialis formam noſſe, qua nullum eorum differentialium conſtans ponitur, ſi in forma propoſita vel dx vel dy ſit conſtans aſſumtum. Poteſt vero quævis formula differentialis, in qua differentiale quoddam conſtans et aſſumtum, transformari in aliam, quæ nullum differentiale conſtans ſupponit, ſic ratiocinando. Si differentialia ipſius y altiora et primum tantum differentiale ipſius x, quod conſtans ponitur, in formula differentiali propoſita occurrant; erunt functiones $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. finitæ. Unde poſito $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, etc, erit $\frac{ddy}{dx^2} = q$, $\frac{d^3y}{dx^3} = r$, etc. Atque his valoribus introductis, differentialia ſecunda et altiora prorſus ex calculo eliminantur. Dantur autem valo-

valores ipſarum p, q, r, etc, pro dy variabili et dx conſtante. Sumto itaque dx cum dy variabili in aequatione $\frac{dy}{dx} = p$, ex eadem deduci poterunt valores differentialium dp, dq, dr, etc, pro utroque dy et dx variabili. Fiet enim $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, et proinde $\frac{dp}{dx} = q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, unde fluit $dq = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^4}$, unde $\frac{dq}{dx} = r = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^5}$, etc. His itaque valoribus loco quantitatum p, q, r, etc, ſubſtitutis formula propoſita in aliam mutatur, quae nullum differentiale conſtans involvit, ac iterum poſitis $ddx = 0$, $d^3x = 0$, etc, in priorem mutatur; poſitis vero $ddy = 0$, $d^3y = 0$, etc, in talem, ubi dx variabile et dy conſtans eſt,

Sit propoſita formula $x\frac{ddy}{dx^2}$, ubi dx conſtans eſt. Poſito $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, fit $x\frac{ddy}{dx^2} = xq$. Subſtituto itaque valore $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, invenitur $\frac{xdxddy - xdyddx}{dx^3}$.

Data ſit formula $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx^3}$, in qua d$y$ eſt conſtans. Ponatur $\frac{dx}{dy} = p$, $\frac{dp}{dy} = q$, erit $\frac{ddx}{dy^2} = q$, ddx

 =

$= q\mathrm{d}y^2$, $\mathrm{d}x^2 = pp\mathrm{d}y$, quibus valoribus ſubſtitutis habe-tur $\frac{1+pp}{q}$ loco $\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{\mathrm{dd}x}$. Eſt vero $pp = \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^2}$ et $q = \frac{\mathrm{d}y\mathrm{dd}x - \mathrm{d}x\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}y^3}$, quibus valoribus ſubſtitutis habetur $\frac{\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^2} : \frac{\mathrm{d}y\mathrm{dd}x - \mathrm{d}x\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}y(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)}{\mathrm{d}y\mathrm{dd}x - \mathrm{d}x\mathrm{dd}y}$

§. 423.

Idem negotium ſuccedit, ſi in formula differentiali conſtans aſſumtum ſit differentiale quodpiam ejusmodi functionis, quæ ab x vel y pendet, ut v. g. differentiale areæ cujusdam curvilineæ $y\mathrm{d}x$, cujus curvæ applicata y et x abſciſſa, vel differentiale arcus ejusmodi curvæ $\surd(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$. Sic ſi propoſita ſit formula, quædam, in qua differentiale $y\mathrm{d}x$ eſt conſtans aſſumtum; primo quidem ob $y\mathrm{d}x$ conſtans, erit $y\mathrm{dd}x + \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 0$, unde eſt $\mathrm{dd}x = -\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y}$. Sit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = q$, $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = r$, etc. eritque $\mathrm{dd}x = -\frac{p\mathrm{d}x^2}{y}$, quæ formula differentiata dat $\mathrm{d}^3x = -\frac{q\mathrm{d}x^2}{y} + \frac{pp\mathrm{d}x^3}{yy} - \frac{2p\mathrm{d}x\mathrm{dd}x}{y}$, quæ expreſſio valore $-\frac{p\mathrm{d}x^2}{y}$ loco $\mathrm{dd}x$ ſubſtituto abit in ſequentem $\mathrm{d}^3x = -\frac{q\mathrm{d}x^3}{y} + \frac{3pp\mathrm{d}x^3}{yy}$, quæ denuo differentiata dat $\mathrm{d}^4x = -\frac{r\mathrm{d}x^4}{y} + \frac{py\mathrm{d}x^4}{yy} + \frac{6pq\mathrm{d}x^4}{yy} - \frac{6p^3\mathrm{d}x^4}{y^3} + \left(\frac{3pp}{yy} - \frac{q}{y}\right)3\mathrm{d}x^2\mathrm{dd}x$, et ſubſtituto $-\frac{p\mathrm{d}x^2}{y}$ loco $\mathrm{dd}x$ fit $\mathrm{d}^4x = (-\frac{r}{y} + \frac{10pq}{yy}$

$-\frac{15p^3}{y^3}\Big)dx^4$, etc. Deinde eſt $dy = pdx$, unde $ddy = qdx^2 + pddx = (q - \frac{pp}{q})dx^2$, ſicque porrò continuo valore $-\frac{pdx^2}{y}$ ſubſtituendo loco ddx, invenitur

$$d^3y = (r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy})dx^3, \text{ et}$$

$$d^4y = (s - \frac{7pr}{y} - \frac{4qq}{y} + \frac{25ppq}{yy} - \frac{15p^4}{y^3})dx^4$$

etc. Iſti valores loco differentialium altiorum variabilium x et y ſubſtituti mutabunt formulam propoſitam in talem, quæ nulla amplius differentialia altiora continet.

Propoſita igitur ſit formula $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$, in qua differentiale ydx conſtans eſt. Ac poſito $dy = pdx$, et $dp = qdx$, erit $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, et $ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$. His ſubſtitutis formula propoſita in ſequentem mutatur: $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$, quæ nullo differentiali conſtante aſſumto in iſtam transformatur $-1 - \frac{xdxddy + xdyddx}{dx^2dy} + \frac{xdy}{ydx} = \frac{xdxdy^2 - ydx^2dy - yxdxddy + yxdyddx}{ydx^2dy}$.

§. 424.

Propoſita denique formula differentiali, in qua $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ eſt conſtans aſſumtum; ponatur $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $dr = sdx$, etc. Atque differentiale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ induit hanc formam $dx\sqrt{(1+pp)}$, quod differentiale cum conſtans ſit, eſſe debet ddx

 $\sqrt{(1+}$

$\surd(1+pp) + \frac{pqdx^2}{\surd(1+pp)} = 0$, unde $ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}$.

Ergo præterea eſt $d^3x = -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{2ppqqdx^3}{(1+pp)^2} - \frac{2pqdxddx}{1+pp}$

$= -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{4ppqqdx^3}{(1+pp)^2}$

$= -\frac{prdx^3}{1+pp} + \frac{(3pp-1)qqdx^3}{(1+pp)^2}$.

Ex his erit $d^4x = -\frac{psdx^4}{1+pp} + \frac{(10pp-3)qrdx^4}{(1+pp)^2} - \frac{(15pp-13)pq^3dx^4}{(1+pp)^3}$, etc. Ex æquatione deniq. $dy = pdx$ differentiando fiet $ddy = qdx^2 + pddx = qdx^2 - \frac{ppqdx^2}{1+pp} = \frac{qdx^2}{1+pp}$, $d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{4pqqdx^3}{(1+pp)^2} + \frac{2qdxddx}{1+pp} = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{4pqqdx^3}{(1+pp)^2}$,

$d^4y = \frac{sdx^4}{1+pp} - \frac{13pqrdx^4}{(1+pp)^2} + \frac{4(6pp-1)q^3dx^4}{(1+pp)^3}$ etc.

Data jam ſit formula $\frac{dx^2+dy^2}{ddy}$, in qua $\surd(dx^2+dy^2)$ eſt conſtans poſitum, ac poſito $dy = pdx$, $dp = qdx$ erit $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$, unde hæc formula ſic transmutatur: $\frac{(1+pp)^2}{q}$. Quia igitur $p = \frac{dy}{dx}$ et $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ nullo differentiali conſtante aſſumto habetur

$\frac{(dx^2+dy^2)^2}{dx^2ddy - dxdyddx}$

§. 425.

§. 425.

His transformationibus paullo attentius perpenſis patebit, easdem expeditius inveniri poſſe, ita ut non opus ſit quantitates p, q, r, etc, in formulas propoſitas introducere, atque tum demum valores earundem poſito nullo differentiali conſtante reſtituere. Sit itaque primum in formula propoſita dx conſtans, et quia loco dy poſitum eſt pdx, iterumque $\frac{dy}{dx}$ loco p, differentialia prima dx et dy ubicunque in formula propoſita occurrunt, immutata relinquuntur. Ubi autem occurrit ddy, quia ejus loco ponitur qdx^2, tumque iterum loco q valor $\frac{ddx\,ddy - dy\,ddx}{dx^3}$; eadem transmutatio abſolvitur, ſi ubique loco ddy ſtatim ponatur $\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx}$ vel $ddy - \frac{dy\,ddx}{dx}$. Si inſuper in expreſſione propoſita occurrat d^3y, quia ejus loco poſitum eſt rdx^3, tumque denuo $r =$

$$\frac{dx^2 d^3y - 3dx\,ddx\,ddy + 3dy\,ddx^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^5}$$

ſtatim loco d^3y poni poteſt $d^3y - \frac{3ddx\,ddy}{ddx} + \frac{3dy\,ddx^2}{dx^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx}$. Quodſi itaque dy fuerit conſtans aſſumtum, loco ddx ſcribi debet $ddx - \frac{dx\,ddy}{dy}$, et $d^3x - \frac{3ddx\,ddy}{dy} + \frac{3dx\,ddy^2}{dy^2} - \frac{dx\,d^3y}{dy}$ loco d^3x. Sin vero ydx fuerit

fuerit conſtans, quia $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$ et $ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$; loco ddx ubique ponendum eſt $-\frac{dxdy}{y}$, et $ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$ loco ddy. Si denique $\sqrt{}(dx^2 + dy^2)$ conſtans fuerit, ob $ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}$ et $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$, ponendum eſt $\frac{dy^2ddx - dxdyddy}{dx^2+dy^2}$ loco ddx et $\frac{dx^2ddy - dxdyddx}{dx^2+dy^2}$ loco ddy. Formulae pro d^3x, d^4x, etc, d^3y, d^4y, etc, his caſibus ſubſtituenda eadem facilitate ex antecedentibus colliguntur.

§. 426.

Completa differentiae functionis V duarum variabilium x et y forma §. 415. inventa haec erat: $\Delta V = P\Delta x + \mathfrak{P}\Delta y + Q\Delta x^2 + p\Delta y\Delta x + q\Delta y^2 + R\Delta x^3 + p\Delta y \Delta x^2 + q\Delta y^2\Delta x + \mathfrak{R}\Delta y^3 +$ etc; unde, ſi $o = P = \mathfrak{P}$, habetur $\Delta V = \mathfrak{Q}\Delta x^2 + p\Delta y\Delta x + q\Delta y^2 + R\Delta x^3 + p\Delta y\Delta x^2 + q\Delta y^2\Delta x + \mathfrak{R}\Delta y^3 +$ etc, ac $\frac{\Delta V}{\Delta t^2} = Q\frac{\Delta x^2}{\Delta t} + p\frac{\Delta y\Delta x}{\Delta t^2} + q\frac{\Delta y^2}{\Delta t^2} +$ etc. Ergo hujus rationis ultima $\frac{dV}{dt^2} = Q\frac{dx^2}{dt^2} + p\frac{dydx}{dt^2} + q\frac{dy^2}{dt^2}$. Similibus ratiociniis invenitur, caſu $o = P = \mathfrak{P} = Q = p = q$ eſſe $\frac{dV}{dt^3} = R\frac{dx^3}{dt^3} + p\frac{dydx^2}{dt^3} + q\frac{dy^2dx}{dt^3} + \mathfrak{R}\frac{dy^3}{dt^3}$, et caſu $o =$

P =

$= \mathfrak{P} \ldots\ldots = \mathfrak{X}$, eſſe $\frac{dV}{dt^4} = S\frac{dx^4}{dt^4} +$

$\mathfrak{r}\frac{dx^3dy}{dt^4} + q\frac{dx^2dy^2}{dt^4} + r\frac{dxdy^3}{dt^4} + \mathfrak{S}\frac{dy^4}{dt^4}$.

Inde concluduntur ſimul valores pro $\frac{dV}{dt^5}$, $\frac{dV}{dt^6}$, etc, i conſequentium quoque terminorum coefficientes evaneſcant. Eædem æquationes ſic quoque ſcribi poſſunt $= Qdx^2 + pdydx + qdy^2$; $dV = Rdx^3 + pdydx^2 + \mathfrak{q}dy^2dx + \mathfrak{R}dy^3$; etc. Quia eo in caſu, quo $o = P = \mathfrak{P}$, eſt $Qdx^2 = \overset{x}{d}V$, $\mathfrak{Q}dy^2 = \overset{y}{d}V$, et $pdydx = \overset{xy}{dd}V$, rit nunc $dV = \overset{x}{d}V + \overset{y}{d}V + \overset{yx}{dd}V$. Manifeſtum igitur ſt, regulam pro differentiandis functionibus duarum ariabilium §. 415. expoſitam eo ſolum in caſu locum abere, quo non eſt utraque functio P et $\mathfrak{P} = o$. Qui nim hoc caſu regulam iſtam ſequeretur, is differentiae completum non obtineret, quia terminus $\overset{yx}{dd}V$ neglectus eſſet, qui tamen hoc caſu negligi non debet. Regula ergo, quæ ſequitur, hoc caſu obſervanda eſt. *Ponatur primum ſola quantitas* x *variabilis, altera* y *vero tanquam conſtans tractetur, et quaeratur ipſius V differentiale poſita* y *conſtante. Deinde ponatur ſola quantitas* y *variabilis, et quæratur ipſius V differentiale, quantitate* x *habita pro conſtante. Denique tertio, cum jam inventum ſit* $\overset{x}{d}V$, *quaeratur ipſius* $\overset{x}{d}V$ *differentiale poſita ſola* y *variabili et* x *habita pro conſtante, vel quod eodem redit, quaeratur ipſius* $\overset{x}{d}V$ *differentiale poſita* y *conſtante* (§. 417.). *Tria hæc differentialia in unam colligantur ſummam, qua erit ipſius V differentiale quæſitum.*

Eadem regula obſervanda quoque eſt, ſi $o = P = \mathfrak{P} \ldots = \mathfrak{Q}$, vel $o = P \ldots = \mathfrak{R}$, vel

$o = P$

o = P . . . = Ꞩ . etc, dummodo ſingula differentialia partialia capiantur ſecundum ea, quae §. 247. ſunt expoſita.

§. 427.

Ea quae de inveniendo valore functionis unius variabilis maximo vel minimo Sect. XVII. expoſita ſunt, in uſum quoque vocari poſſunt, quando functionis duarum vel plurium variabilium maximus vel minimus valor reperiendus proponitur. Quodſi enim ſit V functio duarum variabilium x et y; quaeſtio eo redit, ut iſti variabilium x et y valores reperiantur, quibus ſubſtitutis habeat V vel maximum valorem, vel minimum. Ad hoc efficiendum, ponamus y jam eum habere valorem, qui requiritur ad functionem V maximam vel minimam reddendam: atque hoc poſito opus tantum erit, ut pro altera variabili x idoneus quoque valor inveſtigetur, quod fiet ponendo $\frac{\overset{x}{d}V}{dx} = 0$. Simili modo ſi variabilis x jam eum habeat valorem, qui requiritur ad functionem V maximam vel minimam efficiendam, valor pro y ſubſtituendus invenitur ponendo $\frac{\overset{y}{d}V}{dy} = 0$. Si itaque ſit dV $= Pdx + Qdy = 0$, eſſe debet $P = 0$ et $Q = 0$, ex quibus duabus aequationibus convenientes variabilium x et y valores deducuntur. Inventis ex hiſce aequationibus utriusque variabilis valoribus inquirendum eſt, utrum ambo ſimul functioni V vel maximum vel minimum valorem inducant. Omnes enim eos caſus rejici debere, quibus altera functioni V maximum, altera minimum valorem inducit, manifeſtum eſt. Utrum vero valores pro x et y reperti maximum efficiant vel minimum valorem, eodem modo, quo §. 259. dijudicandum eſt.

SECT.

SECTIO XXVII.

DE
AEQVATIONIBVS DIFFERENTIALIBVS.

§. 428.

Si fuerit $V = 0$, exiſtente V functione duarum variabilium quacunque; hac aequatione $V = 0$ certa ædam exprimitur relatio inter variabiles x et y, qua a ſit alterius functio, vel uniformis vel multiformis. que eodem caſu functione V differentiata ſit $Pdx +$ $dy = 0$, atque $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$ et $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}$ quæ quatio differentialis eandem inter variabiles x et y eximit relationem, quam æquatio $V = 0$ (§.240.) eaque præciſe caſu, quo functio $-\frac{P}{Q}$ utramque variabim involvit, *æquatio differentialis implicita*, vel ſimpliciter *æquatio differentialis* vocatur. Quando æquatio V o eſt quadratica, vel cubica, vel altioris quoque grais, hæc ultima ratio cognoſci non poteſt, niſi ipſa funlo y ſit cognita. Eſt enim una variabilis y hoc caſu terius x functio multiformis, ita ut pro quovis valore ſius x determinato functio y uno plures obtineat valo, et proinde quivis eorum valorum peculiari augea differentia ſi x differentia ſua Δx augetur. Haec uſſa eſt, cur ratio ultima $\frac{dy}{dx}$ invenietur alia atque a, prouti hic vel ille valor ipſius y ſubſtituatur. Sit y ismodi ipſius x functio, quae datur per æquationem adraticam $yy + Py + Q = 0$, in qua ſunt P et Q fun-

functiones ipſius x uniformes, ac patet, pro unoqu-
que valore ipſius x functionem y habere valorem dupli-
cem. Differentiando autem ex hac æquatione deducitur
$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0$. Si itaque ſit $dP = pdx$
et $dQ = qdx$, erit $2ydy + Pdy + ypdx + qdx = 0$, un-
de fit $\frac{dy}{dx} = -\frac{yp - p}{2y + P}$, quae functio non poteſt non
duplicem habere valorem, prouti unus vel alter ipſius y
valor ex æquatione $yy + Py + Q = 0$ eidem convenien-
ſubſtituatur. Simili modo, ſi functio y per æquatio-
nem cubicam definitur, valor functionis $\frac{dy}{dx}$ erit tri-
plex, triplici ſcilicet ipſius y valori reſpondens. Atque
ſi in æquatione propoſita finita y quatuor vel plures ha-
beat dimenſiones, neceſſe eſt, ut $\frac{dy}{dx}$ pariter totidem
valores ſortiatur. Poteſt quoque ipſa functio y ex æ-
quatione eliminari, quia duæ habentur æquationes y con-
tinentes, finita ſcilicet, et differentialis. Tum aute
dy et dx ad totidem dimenſiones aſſurgent, quot an
habuerat y, ſicque iſta æquatio omnes diverſos ipſi
$\frac{dy}{dx}$ valores ſimul complectetur. Sic ex æquatione d
ferentiali $2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0$ habetur $y = -\frac{Pdy - dQ}{2dy + dP}$, qui valor in æquatione $yy + Py + Q =$
ſubſtitutus dabit $(4Q - PP)\,dy^2 + (4Q - PP)\,dPdy$
$QdP^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0$, vel ſubſtitutis pdx lo
dP et qdx loco dQ erit $(4Q - PP)\,dy^2 + (4Q - PP)\,pdx$
$+ (Qpp - Ppq + qq)\,dx^2 = 0$, unde fit $\frac{dy^2}{dx^2} + p$
$+ \frac{Qpp - Ppq + qq}{4Q - PP} = 0$, ex qua æquatione dupl
ipſius $\frac{dy}{dx}$ valor invenitur.

§. 4

§. 429.

Quodſi igitur propoſita ſit æquatio indeterminata inter duas variabiles quæcunque x et y, quae ſit $V = o$, ex eadem per differentiationem ſemper obtinebitur $Pdx + Qdy = o$, atque $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$, vel $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}$. Si vero y in æquatione $V = o$ habeat n dimenſiones, etiam pro quolibet valore ipſius x functio y recipit n valores, quibus ſucceſſive loco y in functione $-\frac{P}{Q}$ ſubſtitutis, totidem diverſi pro $\frac{dy}{dx}$ obtinentur valores. Præterea autem notari meretur, quod ipſa hæc functio $\frac{dy}{dx}$ vel $\frac{dx}{dy}$ nonnunquam multiplicem pro eodem ipſius y valore recipiat valorem. Si poſito $x = f$, valores functionis y fuerint $\alpha, \beta, \gamma \ldots \eta$, ſubſtituto $y = \alpha$ in functione $-\frac{P}{Q}$ obtinetur valor ipſius $\frac{dy}{dx}$ pro $y = \alpha$. Sed completa differentiæ ipſius V forma ex §. 415. eſt $P\Delta x + \mathfrak{P}\Delta y + Q\Delta x^2 + p\Delta y\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta y^2 + R\Delta x^3 + p\Delta y\Delta x^2 + q\Delta y^2\Delta x + \mathfrak{R}\Delta y^3 + S\Delta x^4 + s\Delta x^3\Delta y + q\Delta x^2\Delta y^2 + r\Delta x\Delta y^3 + \mathfrak{S}\Delta y^4 + \text{etc.} = o$. Quodſi itaque a ſubſtituto α loco y fit $o = P = \mathfrak{P}$, exinde concludendum eſt, fore $Q\frac{dx^2}{dy^2} + p\frac{dx}{dy} + \mathfrak{Q} = o$, vel $Q + p\frac{dy}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dy^2}{dx^2} = o$, ex quibus æquationibus ultimæ rationes $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{dy}{dx}$ hoc caſu duplices inveniuntur. Quodſi itaque a ſubſtituto $y = \alpha$, non tan-

tum P et $\mathfrak{P}$, ſed etiam Q, p, et $\mathfrak{Q}$ evaneſcant; habentur æquationes $R\frac{dx^3}{dy^3} + \mathfrak{p}\frac{dx^2}{dy^2} + q\frac{dx}{dy} + \mathfrak{R} =$ o, vel $R + \mathfrak{p}\frac{dy}{dx} + q\frac{dy^2}{dx^2} + \mathfrak{R}\frac{dy^3}{dx^3} = 0$, unde triplex pro $\frac{dx}{dy}$ vel $\frac{dy}{dx}$ eruitur valor, qui valor quadruplex invenitur ſi inſuper fuerit $0 = R = \mathfrak{p} = q = \mathfrak{R}$, ſicque porro.

§. 430.

Invento valore $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$, vel $Pdy + Qdx =$ o ex æquatione $V = 0$ per continuatam differentiationem inveniuntur $\frac{ddy}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$, etc, poſito dx conſtante, vel $\frac{ddx}{dy^2}, \frac{d^3x}{dy^3}, \frac{d^4x}{dy^4}$ etc, poſito dy conſtante, vel denique $\frac{ddy}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}, \frac{d^4y}{dt^4}$ etc, ſi tam x quam pendeant a valore cujusdam variabilis t, cujus differentia Δt ſumitur conſtans. Prouti hoc modo æquatio differentiales ſive *primi* ſive *altioris gradus*, quæ d variabiles x et y continent, ex æquationibus finitis untur; iis etiam relatio inter binas iſtas variabiles exp mitur, qua y fit functio ipſius x. Atque natura æq tionis differentialis perſpicitur, ſi loco y ea ipſius x f ctio aſſignari poteſt, quæ per illam æquationem ind tur. In hujus autem functionis inveſtigatione ver *calculus integralis*, cujus finis eo tendit, ut propoſit quatione differentiali quacunque functio illa ipſius cui altera variabilis y æqualis eſt, definiatur; ſeu q eodem redit, ut æquatio finita inveniatur, qua re inter x et y exprimitur.

§. 431.

Si ſit V functio trium variabilium x, y, z; æqua-
io $V = 0$ exprimit, qualis functio ſit una harum varia-
ilium z reliquarum x et y, atque eandem relationem
nter tres variabiles æquatio differentialis $Pdx + Qdy +$
$dz = 0$ exprimere cenſenda eſt. Quemadmodum igi-
ur æquatio $V = 0$ reſolvitur, ſi inveniatur qualis fun-
tio ipſarum x et y loco z ſubſtitui debeat, ut æquationi
tisfiat; ita quoque æquatio differentialis tres variabi-
s complectens reſolvetur ab eo, qui determinabit eam
inarum variabilium x et y functionem, quæ loco tertiæ
ſubſtituta efficit, ut V evaneſcat, ſeu quod eodem re-
it, qui indicare poterit æquationem finitam, qua idem
ebitus ipſius z valor exprimitur. Licet vero omnis
quatio differentialis duas tantum variabiles involvens
mper determinatam inter easdem exprimat relationem;
oc tamen non ſemper evenit in æquationibus trium va-
abilium. Dantur enim ejusmodi æquationes, quibus
ullo modo ſatisfieri poteſt, quæcunque functio varia-
ilium x et y loco z ſubſtituatur. Primo enim patet,
mnes æquationes differentiales trium variabilium x, y,
, in quibus tantum binarum differentialia ut dx et dy
ccurrunt, eſſe impoſſibiles. Nulla enim exhiberi po-
ſt functio ipſarum x et y, quæ loco z ſubſtituta, fun-
ionem V evaneſcere faciat, quia differentialia dx et dy
ullo modo tolli poterunt. His itaque caſibus nulla
mnino datur æquatio finita eidem ſatisfaciens, niſi for-
e ejusmodi relatio inter x et y aſſignari queat, quae
uidquid ſit z ſubſiſtere poſſit, uti fit in æquatione zdy
$zdx = ydy - xdx$, cui ſatisfacit æquatio $y = x$. Qui-
s vero caſibus hoc eveniat facile inveſtigatur, quæren-
 relationem inter x et y primo ſi $z = 0$, tumque in-
ſtigando, an iſta relatio pro quocunque ipſius z valore
tisfaciat.

§. 432.

Poteſt vero æquatio differentialis trium variabilium

 eo

eo quoque caſu impoſſibilis eſſe, ſi in ea omnia tria diffe-rentialia occurrunt. Ad quos caſus evolvendos pona-mus primo, propoſitam eſſe æquationem hujus formæ $dz = Pdx + Qdy$, atque P et Q eſſe functiones tantum variabilium x et y, tertiam z non involventes. Atque ſi hæc æquatio poſſibilis ſit, erit z functio quædam va-riabilium x et y, cujus differentiale ſit $dz = pdx + qdy$, eritque $P = p$ et $Q = q$. Sed $pdx + qdy$ eſſe non poteſt differentiale cujuſdam functionis variabilium x et y, ni-

ſi ſit $\frac{\overset{y}{dp}}{dy} = \frac{\overset{x}{dq}}{dx}$. Proinde æquatio $dz = Pdx + Q$

realis eſſe nequit, niſi ſit $\frac{\overset{y}{dP}}{dy} = \frac{\overset{x}{dQ}}{dx}$. Similis erit ra-

tio hujus æquationis $dZ = Pdx + Qdy$, ſi Z ſit functio ip-ſius z, P vero et Q ſint functiones ipſarum x et y non involventes z. Ut enim Z æqualis fieri poſſit functioni

ipſarum x et y, neceſſe eſt, ut ſit $\frac{\overset{y}{dP}}{dy} = \frac{\overset{x}{dQ}}{dx}$. Pot

vero criterium ad omnes ejuſmodi æquationis form æque patens inveſtigari. Forma generalis æquationis di ferentialis trium variabilium eſt $Pdx + Qdy + Rdz =$ ubi ſunt P, Q, R, functiones trium variabilium, x, et z quæcunque. Quoties hæc æquatio eſt realis, z qualis erit functioni cuidam variabilium x et y, et pr inde ejus differentiale erit hujus formæ $dx = pdx +$ Quare ſi in æquatione propoſita iſta functio ipſarum et y loco z, atque $pdx + qdy$ loco dz ſubſtituatur, nec ſe eſt, ut oriatur æquatio identica $0 = 0$. Cum præ rea ex æquatione propoſita $Pdx + Qdy + Rdz = 0$

$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$, ſi in P, Q et R valor ille

ſubſtituatur, fieri debet $p = -\frac{\overset{y}{P}}{R}$, et $q = -\frac{\overset{x}{Q}}{R}$.

uſt ob $dz = pdx + qdy$, eſſe debet $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, unde ubſtituto loco z ipſius valore per x et y, eſſe debet $\left(\overset{y}{d}. - \frac{P}{R}\right) : dy = \left(\overset{x}{d}. - \frac{Q}{R}\right) : dx$, id eſt $-$

$$\frac{R\overset{y}{d}P + P\overset{y}{d}R}{RRdy} = -\frac{R\overset{x}{d}Q + Q\overset{x}{d}R}{RRdx},$$ unde per RR mul-

iplicando deducitur $P\frac{\overset{y}{d}R}{dy} - R\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = Q\frac{\overset{x}{d}R}{dx} - R\frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$.

ed hæc differentialia $\frac{\overset{y}{d}P}{dy}$, $\frac{\overset{x}{d}R}{dx}$, $\frac{\overset{y}{d}R}{dy}$, $\frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, ante co-
noſci non poſſunt, quam in P, Q et R debitus pro z alor fuerit ſubſtitutus, qui cum ſit incognitus, ſequen- modo erit concludendum.

§. 435.

Quia P, Q, R, ſunt functiones ipſarum x, y, z, arum differentialia erunt hujus formæ

$$dP = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$
$$dQ = \delta dx + \varepsilon dy + \zeta dz$$
$$dR = \eta dx + \vartheta dy + \iota dz$$

oncipiatur nunc loco z ubique valor ipſius in x et y ubſtitui et loco dz valor $pdx + qdy$; eritque

$$dP = (\alpha + \gamma p)dx + (\beta + \gamma q)dy$$
$$dQ = (\delta + \zeta p)dx + (\varepsilon + \zeta q)dy$$
$$dR = (\eta + \iota p)dx + (\vartheta + \iota q)dy.$$

Ergo habetur $\frac{\overset{y}{d}R}{dy} = \vartheta + \iota q$, $\frac{\overset{x}{d}R}{dx} = \eta + \iota p$, $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \beta +$

 γp

γp. et $\frac{d\overset{x}{Q}}{dx} = \delta + \zeta p$. Sed ad realitatem æquationi[s]

requiritur, ut ſit $P\frac{d\overset{y}{R}}{dy} - R\frac{d\overset{y}{P}}{dy} = Q\frac{d\overset{x}{R}}{dx} - R\frac{d\overset{x}{Q}}{dx}$, in

qua æquatione ſi inventi valores ſubſtituantur, eſſe de-
bet $P(\vartheta + \iota p) - R(\beta + \gamma q) = Q(\eta + \iota p) - R(\delta + \zeta p)$,

vel $P\vartheta - \frac{PQ\iota}{R} - R\beta + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\iota}{R} - R\delta +$

$P\zeta$, vel denique $o = P(\zeta - \vartheta) + Q(\eta - \gamma) + R(\beta - \delta)$

ob $p = -\frac{P}{R}$ et $q = -\frac{Q}{R}$. Quantitatibus igitur β,

$\delta, \gamma, \eta, \zeta, \vartheta$, more conſueto denotatis, eſſe debet $o = P$

$\left(\frac{d\overset{z}{Q}}{dz} - \frac{d\overset{y}{R}}{dy}\right) + Q\left(\frac{d\overset{x}{R}}{dx} - \frac{d\overset{z}{P}}{dz}\right) + R\left(\frac{d\overset{y}{P}}{dy} -\right.$

$\left.\frac{d\overset{x}{Q}}{dx}\right)$. Aequatio $Pdx + Qdy + Rdz = o$ quoq[ue]

per diviſionem ſemper ad hujuſmodi formam red[uci]
poteſt $Pdx + Qdy + dz = o$, in quam cum prior abe[at]
ſi fiat $R = 1$, criterium hoc modo ſimplicius exprim[i-]

tur $P\frac{d\overset{z}{Q}}{dz} - Q\frac{d\overset{z}{P}}{dz} + \frac{d\overset{y}{P}}{dy} - \frac{d\overset{x}{Q}}{dx} = o$.

SECT[IO]

SECTIO XXVIII.

DE INTEGRATIONE FVNCTIONVM PLVRIVM VARIABILIVM ET AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM.

§. 434.

Cujusvis functionis V duarum variabilium x et y differentiale ſequentem habet formam $dV = Pdx + Qdy$, ubi P et Q ſunt functiones variabilium x et y, uæ ita a ſe invicem pendent, ut ſit $\frac{\overset{y}{dP}}{dy} = \frac{\overset{x}{dQ}}{dx}$. Propſita igitur formula differentiali duarum variabilium itegranda præ omnibus eo diſpiciendum eſt, utrum eaem habeat deſcriptam proprietatem; nec ne. Quodſi rius ſit, integratio peragetur ſecundum regulam ſeentem. *Integretur primo una pars ut* Pdx, *variabili* y, *ea in P deprehendatur habita pro conſtante. Integrale ventum* $\overset{x}{\int}$Pdx *differentietur habita nunc* x *pro conſtante ſola* y *pro variabili, atque differentiale inventum* $d\overset{y\,x}{\int}$Pdx *btrahatur ab altera parte* Qdy. *Quodſi jam differentia eniatur* = 0, *id indicio eſt, integrale jam inventum eſſe. differentia non eſt* = 0, *ea erit formula differentialis ſolam involvens. Qua integrata, et hoc integrali ad prius intum addito, habetur integrale quod quæritur; cui vero denda eſt conſtans ex conditionibus problematis propoſiti erminanda.* Ratio hujus regulae manifeſta erit ei, i adtendit ad modum, quo differentiale $Pdx + Qdy$ ſuo integrali V oritur. Ponitur nimirum primo in

V ſola x variabilis atque tum quæritur ejus differentiale $\overset{x}{d}V$, quod eſt Pdx. Deinde in V ponitur ſola y variabilis, et quæritur $\overset{y}{d}V$, quod eſt Qdy. Quodſi igitur in omnibus terminis functionis V tam x quam y deprehendatur, etiam y tanquam conſtans in omnibus terminis ipſius $\overset{x}{d}V$ invenitur. Integrato igitur $\overset{x}{d}V$ ſeu Pdx, integrum V invenitur. Si igitur hoc integrale inventum differentietur poſita ſola y variabili, inveniri debet $\overset{y}{d}V$ ſeu Qdy, et proinde $Qdy - \overset{yx}{d\int} Pdx$ erit $= 0$. Quodſi vero non in omnibus terminis ipſius V tam x quam y, ſed in quibusdam ſola y deprehendatur; denotabimus eam ipſius V partem, in qua ſola y invenitur, per v alteram per u erit $V = u + v$, et patet priora ratiocinia jam ad partem u adplicari poſſe. Habebit enim nunc differentiale ipſius V hanc formam $dV = du + dv$ et cum u ſit functio ipſarum x et y, v vero functio ſolius y, erit $dV = Pdx + Qdy + Ydy$, exiſtentibus P et Q functionibus ipſarum x et y, Y vero functione ſolius y. Proinde $\overset{yx}{d\int} Pdx = Qdy$, et ideo $Qdy + Ydy - \overset{yx}{d\int} Pdx = Ydy$, quæ eſt formula differentialis ſolam y involvens.

§. 435.

Adplicemus regulam ad exempla quædam. Datur $ydx + xdy$, et quæritur hujus integrale. Cum ſit $\overset{x}{\int} ydx = yx$, et $\overset{y}{d}.\,yx = xdy$, porro $xdy - xdy = 0$; erit integrale quæſitum $= xy + C$.

Si fuerit $dV = \frac{ydx - xdy}{yy} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$; habetur $\overset{x}{\int}\frac{dx}{y} = \frac{x}{y}$ $\overset{y}{d}.\,\frac{x}{y} = -\frac{xdy}{yy}$, quod differentiale

$- \frac{xdy}{yy}$ ſubtractum relinquit o, proinde $V = \frac{x}{y} + C$.

Si fuerit $dV = \frac{dy}{\sqrt{(aa-xx)}} + \frac{yxdx}{(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}$, fiet $\overset{x}{\int}. \frac{yxdx}{(aa-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{(aa-xx)^{\frac{1}{2}}}$, et $\overset{y}{d} \frac{y}{(aa-xx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dy}{(aa-xx)^{\frac{1}{2}}}$, quod ab $\frac{dy}{\sqrt{(aa-xx)}}$ ſubtractum relinuit o, proinde eſt $V = \frac{y}{\sqrt{(aa-xx)}} + C$.

Si fuerit $dV = dylx + \frac{ydx}{x}$, erit $\overset{y}{\int} \frac{ydx}{x} = ylx$, ræterea $\overset{y}{d}. ylx = dylx$, quod a $dylx$ ſubtractum o relinuit: ideo eſt $V = ylx + C$.

Si ſit $dV = yx^{y-1}dx + x^y dylx$; erit $\overset{x}{\int} yx^{y-1}dx = x^y$, porro $\overset{y}{d}. x^y = x^y dylx$, quod differentiale cum tera parte dati coincidit, proinde eſt $V = x^y + C$.

Si fuerit $dV = dx\sqrt{y} + \frac{xdy}{2\sqrt{y}} - ady\sqrt[3]{x} - \frac{aydx}{3x^{\frac{2}{3}}}$: ro $\overset{x}{\int}(dx\sqrt{y} - \frac{aydx}{3x^{\frac{2}{3}}})$ quod erit $x\sqrt{y} - ayx^{\frac{1}{3}}$. Eſt ro $\overset{y}{d}. (x\sqrt{y} - ayx^{\frac{1}{3}}) = \frac{xdy}{2\sqrt{y}} - ax^{\frac{1}{3}}dy$; proinde $V = x\sqrt{y} - ayx^{\frac{1}{3}} + C$.

Sit $dV = \frac{xdy - ydx}{xx+yy} = \frac{xdy}{xx+yy} - \frac{ydx}{xx+yy}$.

Quæro $\int^{y} \frac{xdy}{xx-yy}$, quod erit $=$ A *tang.y*, exiſtente ra-
dio $= x$, proinde $\int^{y} \frac{xdy}{xx-yy} = \text{A } tang. \frac{y}{x}$. Eſt vero
$\overset{x}{d}\text{A } tang\ \frac{y}{x} = -\frac{ydx}{xx+yy}$, quod cum altera ipſius dV
parte idem eſt; proinde eſt $V = \text{A } tang \frac{y}{x} + C$.

Sit $dV = (dx + dy)\sqrt{}(x+y)$. Quaero $\int^{x} dx\sqrt{}(x+$
$y)$, quod eſt $\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}}$ deinde quæro $\overset{y}{d}\ \frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}}$, quod
eſt $dy(x+y)^{\frac{1}{2}}$, ex quo patet eſſe $V = \frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}} + C$.

Si ſit $dV = \frac{dx + dy}{x+y}$, quæro $\int^{x} \frac{dx}{x+y}$, quod erit
$l(x+y)$ et cum ſit $\overset{y}{d}.l(x+y) = \frac{dy}{x+y}$ fiet $V = l(x+y)$
$+ C$.

§. 436.

Poteſt methodus inveniendi hujusmodi integrali in caſibus quibusdam ſpecialibus abbreviari, et integra le inveniri, ſecundum ea præcepta, quæ ſupra pro inve niendo integrali formulæ differentialis unius variabili ſunt tradita. Novimus enim quod generaliter ſit $\int a X^p$
$dX = \frac{a}{p+1} X^{p+1}$, quamcunque variabilem denotet X proinde quoque x poteſt eſſe functio duarum vel ad plurium variabilium. Quodſi igitur alicujus for mulæ differentialis plurium variabilium integrale in veniendum ſit, explorari debet, utrum formula diffe rentialis propoſita conſtet ex duobus factoribus, quorum unus ſit functio quæcunque variabilium x, y, etc. ad ce

tam quandam dignitatem elevata, alter vero differentiale hujus functionis per conſtantem quandam multiplicatum. Quod ſi ita ſe habeat, integrale quæſitum hic quoque per regulam fundamentalem totius calculi integralis haberi poteſt, eo quidem modo, quo ſupra §. 365. uſi ſumus. Sit igitur iterum propoſita formula $(dx + dy)\sqrt{(x+y)} = dV$ atque ſtatim patet, conditionem memoratam hic locum habere. Pono igitur $x+y=z$, ut ſit $dx+dy=dz$, et fiet $dV=z^{\frac{1}{2}}dz$, cujus integrale eſt $V=\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}}+C$.

Pari ratione, ſi proponatur $dV=(2adx+2bdv)(ax+by)^{-\frac{1}{2}}$, pono $ax+by=z$, ex quo fit $adx+bdy = dz$, et $2abx+2bdy=2dz$, $dV=2z^{-\frac{1}{2}}dz$, proinde $V=\frac{2z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C, = 4z^{\frac{1}{2}}+C = 4(ax+by)^{\frac{1}{2}}+C.$

Præterea novimus ex præcedentibus, quod omnis fractio rationalis, in qua numerator eſt denominatoris differentiale, ſit differentiale logarithmi denominatoris, erit proinde generaliter $\int\frac{dX}{X}=lX$ quidquid X ſignificet. Quodſi igitur ejusmodi fractionis denominator ſit functio duarum vel plurium variabilium, ejus integrale absque ambagibus habetur. Sic propoſito differentiali $V=\frac{dx+dy}{x+y}$ ſtatim patet, eſſe $V=l(x+y)+C$. Pari ratione ſi fuerit $dV=\frac{xdy+ydx}{xy}$, erit $V=lxy+C$. Si vero ſit $dV=\frac{xdy+ydx-2ydy}{2xy-2yy}$, habetur $V=\frac{1}{2}l(xy-yy)+C=l(xy-yy)^{\frac{1}{2}}+C$.

§. 437.

§. 437.

Quando problema aliquod mathematicum ſolvendum proponitur, atque ex conditionibus problematis deducitur æquatio vel una vel plures; ſæpe numero iſtæ æquationes problematis fundamentales ſunt differentiales duas vel plures variabiles involventes. Tum vero ad problema ſolvendum opus eſt, ut loco cujuslibet quæratur æquatio, quæ nullis differentialibus implicatur eandem tamen relationem variabilium exprimit, quam exponit æquatio differentialis; atque hoc ipſum negotium non aliud eſt, niſi integratio æquationis differentialis propoſitæ. Eum in finem omnes æquationis differentialis termini mutatis ſignis ad eandem ſigni æqualitatis partem ſunt transponendi, ut ipſa æquatio $= 0$ evadat. Quodſi igitur æquatio duas tantum involvat quantitates variabiles, x et y, eadem ſequentem habebit formam $Pdx + Qdy = 0$, atque tum modus ejusmodi æquationes differentiales ad hanc formam reductas integrandi non differt ab eo, quem deſcripſimus. Propoſita ſit aequatio differentialis integranda ſequens $\frac{2xdx}{y}$ $= \frac{xxdy}{yy}$, et fiet $\frac{2xdx}{y} - \frac{xxdy}{yy} = 0$. Quæro $\int\frac{2xdx}{y}$, quod eſt $\frac{xx}{y}$, quæro $d\frac{xx}{y}$, quod eſt $-\frac{xxdy}{yy}$, hinque fit $\frac{xx}{y} + C = A$ vel $\frac{xx}{y} = A - C$, vel $xx = (A - C)\,y$. Conſtans $A - C$ ex conditionibus problematis eſt determinanda proinde non opus eſt, ut ad utramque partem addatur conſtans. Ipſum integrale inventum æquale erit conſtanti cuidam, quae hic una litera ad alteram ſigni æqualitatis partem poſita poteſt indicari, ut fiat $\frac{xx}{y} = C$, vel $xx = Cy$, quæ eſt æquatio

int

ntegralis quæſita. Facile quidem et hic patet, prae omnibus explorandum eſſe, utrum data aequatione differentiali eaque ad formam $Pdx + Qdy = 0$ redacta, criterium integrabilitatis adſit $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, ne fruſtra tenetur integratio.

§. 438.

Propoſita jam ſit formula differentialis trium variabilium integranda, quæ ſemper habebit ſequentem formam $dV = Pdx + Qdy + Rdz$, atque ſi integratio ſuccedere debet, ea formula hæc gaudere debet proprietate, ut ſit $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, $\frac{\overset{z}{d}Q}{dz} = \frac{\overset{y}{d}R}{dy}$, $\frac{\overset{z}{d}P}{dz} = \frac{\overset{x}{d}R}{dx}$. Prae omnibus igitur eo inquirendum eſt, utrum differentiale propoſitum hanc habeat proprietatem, nec ne. Si prius ſit, ipſa integratio nititur regula ſequente. *Integretur primus terminus* Pdx *poſita ſola* x *variabili. Integrale inventum differentietur poſita* x *conſtante reliquis* y *et* z *poſitis variabilibus. Hoc differentiale ſubtrahatur a reliqua integralis dati parte* Qdx + Rdz. *Si differentia ſit* = 0, *erit integrale inventum id quod quaeritur. Si differentia non ſit* = 0, *ea erit formula differentialis duarum tantum variabilium* y *et* z, *quae integranda eſt ſecundum praecepta praecedentia, ejusque integrale ante invento addendum.* Regulae ratio iterum manifeſta eſt, ex modo quo dV ex ipſa V invenitur: eſt enim $dV = \overset{x}{d}V + \overset{y}{d}V + \overset{z}{d}V$ Quodſi igitur in omnibus ipſius V terminis omnes quoque variabiles x, y, z, deprehendantur, etiam y et z tanquam conſtantes in omnibus ipſius $\overset{x}{d}V$ terminis manent. Integrato igitur $\overset{x}{d}V$ poſita x ſola variabili integrum V invenitur. Quare ſi hoc integrale inven-

inventum differentietur poſitis y et z variabilibus, x vero conſtante, prodire debet $Qdy + Rdz$, atque ideo erit $Qdy + Rdz - \overset{yzx}{d}\int Pdx = 0$. Quodſi vero non in omnibus terminis ipſius V omnes tres deprehendantur variabiles, ſed in quibusdam tantum: denotabimus eam functionis V partem, quæ non omnes tres involvit variabiles littera v et alteram littera u, ut ſit $V = u + v$, et patet ratiocinia ante allata jam ad partem u adplicari poſſe. Erit enim $dV = du + dv$: cum autem ſit u functio trium x, y, z, et v functio duarum variabilium y et z, vel adeo unius tantum y, vel z, erit $du = Pdx + Qdy + Rdz$, et $dv = pdy + qdz$, vel tantum $= pdy$, vel $= qdz$. Sit primum, et erit $dV = Pdx + Qdy + Rdz + pdy + qdz$, exiſtentibus p, et q functionibus duarum variabilium y et z, vel unius tantum earum. Eſt vero $\overset{yxx}{d}\int Pdx = Qdy + Rdz$ per demonſtrata, et adeo $Qdy + Rdz + pdy + qdz - \overset{xyx}{d}\int Pdx = pdy + qdz$, quae eſt formula differentialis tantum y et z, involvens. Simul ex his patet, in eo caſu, quo v eſt functio unius tantum variabilium y vel z, hanc differentiam quoque unam tantum variabilem involvere. Eadem prorſus via incedendum eſt, ſi detur aequatio differentialis trium variabilium reducibilis ad formam $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, eo tantum diſcrimine, ut integrale inventum aequale ponendum ſit quantitati cuidam conſtanti, prouti hoc antea jam factum eſt, cum de aequationibus differentialibus duarum variabilium ſermo erat.

§. 439.

Propoſita ſit aequatio $\frac{1}{2}abz^2y^{-1}x^{-\frac{1}{2}}dx + 2ab$ $y^{-1}zdz - abx^{\frac{1}{2}}z^2y^{-2}dy = 0$, et primi termini integrale poſita ſola x variabili eſt $abz^2y^{-1}x^{\frac{1}{2}}$ cujus di

fere

rentiale poſitis y et z variabilibus eſt aequale reliquae ifferentialis propoſiti parti. Proinde quaeſita aequatio ntegralis eſt $abz^2y^{-1}x^{\frac{1}{2}} = C$. Si fuerit $abx^{-1}dz +$ $\frac{bxydy - by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{abzdx}{xx} = 0$, inſtituto examine, trum criterium integrabilitatis adſit, quod adeſſe repeetur; quaero $\int^{z} abx^{-1}dz$, quod eſt $= \frac{abz}{x}$. Differenato hoc integrali et poſita z conſtante, invenitur $-\frac{bzdx}{xx}$, quod differentiale ſubtractum a reliqua diffentialis propoſiti parte relinquit $\frac{bxydy - by^2dx}{xx\sqrt{(xx+yy)}} =$ $\frac{bydy}{x\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{byydx}{xx\sqrt{(xx+yy)}}$. Quaero igitur $\int\frac{bydy}{x\sqrt{(xx+yy)}}$, quod eſt $\frac{b\sqrt{(xx+yy)}}{x}$, hujus diffentiale poſita ſola x variabili eſt $\frac{-byydx}{xx\sqrt{(xx-yy)}}$, quod m ultima parte propoſitae idem eſt. Integrale igir quaeſitum erit $\frac{abz+b\sqrt{(xx+yy)}}{x} = C$.

§. 440.

Ea quae hactenus ſunt expoſita oſtendunt, quod aequaones differentiales duarum variabilium quas ſemper ad nc formam reductas eſſe ſuppono $Pdx+Qdy=0$, ad as revocari poſſint claſſes, quarum primam conſtitut, quae eam habent proprietatem, ut ſit $\frac{d^{y}P}{dy} = \frac{d^{x}Q}{dx}$, teram, quae hac proprietate deſtituuntur. Prioris neris aequationum non difficulter reperiuntur integralia,

lia: Sed majoris negotii eſt integratio aequationum, quae pertinent ad alteram claſſem. Videri hic poſſet, rite concludi, ſi in aequatione differentiali non ſit

$\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, eam non fore functionis cujusdam differentialem, et proinde integrale ipſius per nullam functionem explicabile, atque problema ipſum eſſe impoſſibile. Non autem probavimus, cujusvis functionis duarum variabilium differentiale gaudere eadem proprietate neceſſario, ſed tantum hanc proprietatem locum habere; ſi differentiale ita capiatur, uti per differentiationem immediate prodit, nulla accedente alia mutatione. Poſſibiles autem ſunt mutationes ejusmodi, quae licet aequalitatem differentialis cum o non tollant, adductam tamen tollunt proprietatem. Fit nempe hoc ſemper, ſi tota aequatio differentialis per functionem quandam variabilium x et y multiplicari vel dividi intelligatur. Si enim aequatio memoratam habens proprietatem ducatur in factorem μ qui eſt functio variabilium x et y, erit ob $Pdx + Qdy = o$, etiam μPdx + $\mu Qdy = o$. Quodſi igitur quis aſſumere velit, in poſteriori hac aequatione proprietatem eandem adhuc

cum habere, foret $\frac{\mu \overset{y}{d}P + P\overset{y}{d}\mu}{dy} = \frac{\mu \overset{x}{d}Q + Q\overset{x}{d}\mu}{dx}$; p

inde ob $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, et ideo $\frac{\mu \overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\mu \overset{x}{d}Q}{dx}$, fiet $\frac{P\overset{y}{d}\mu}{dx}$

$\frac{Q\overset{x}{d}\mu}{dx}$ et $R\overset{y}{d}\mu dx = Q\overset{x}{d}\mu dy$. Quia vero $Pdx = -Q$

utrinquo diviſo fit $\overset{y}{d}\mu = -\overset{x}{d}\mu$, et $\overset{y}{d}\mu + \overset{x}{d}\mu = d\mu$
quare μ eſſet quantitas conſtans non pendens a vari

bus x et y, quod eſt contra hypotheſin. Idem locum habere, ſi aequatio per functionem quandam variabilium x et y, quae ſit $= \nu$, dividatur ex eo liquet, quia dividere per ν idem eſt, ac per $\frac{1}{\nu}$ multiplicare. Quanquam taque aequationes differentiales non habeant eam formam, ut ſit $\frac{\overset{y}{dP}}{dy} = \frac{\overset{x}{dQ}}{dx}$, tamen integrale earum eſt oſſibile. Erunt vero hujus generis iſtae, in quibus proprietas hæc ob æquationis per functionem quandam vaiabilium x et y factam multiplicationem aut diviſionem, ut generaliter, quia multiplicare per μ ſit idem, quod ividere per $\frac{1}{\mu}$, per diviſionem ſublata eſt. Reſtitui aque poterit in qnavis earum hæc proprietas, ſi ipſa er functionem, per quam diviſa erat, denuo multiplicetr, quo facto hic caſus ad priorem reducitur et integrale quationis per regulas ſupra traditas ſine negotio inveſtitur. Proinde abſolvi poterit ejusmodi æquationum ingratio, ſi in poteſtate fuerit functionis iſtius, cujus viſione proprietas ſæpius dicta ſublata eſt, inveſtigatio. ujus rei adferamus primo exempla aliquot ſpecialia: inde tentabimus, quouſque in hoc problemate geneliter ſolvendo pertingat analyſis.

§. 441.

Quando propoſita eſt æquatio differentialis duarum riabilium hujus formae $nxy^{n-1}dy + y^n dx = 0$ proprie- iſta $\frac{\overset{y}{dP}}{dy} = \frac{\overset{x}{dQ}}{dx}$ adeſſe deprehenditur. Quod ſi ro haec æquatio dividatur per y^{n-1} ut prodeat $nxdy + $ $y = 0$, ea ſublata eſt. Hinc vice verſa ſequitur, od ſi æquatio quædam differentialis formæ $nxdy + ydx$

 $= 0$

$=0$ ſit propoſita, ad integrale inveniendum ea multiplicanda ſit per y^{n-1}, ut iſta proprietas reſtituatur. Pari ratione ſi æquatio differentialis hanc habeat formam

$$\frac{nxy^{n-1}dy - y^n dx}{xx} = 0, \text{ proprietas iſta } \frac{d\overset{y}{P}}{dy} = \frac{d\overset{x}{Q}}{dx}$$

locum habere invenitur, atque integrale ejus æquationis eſt $\frac{y^n}{x} = C$. Quodſi vero hæc æquatio differentialis dividatur per $\frac{y^{n-1}}{xx}$, ut prodeat $nxdy - ydx = 0$ tollitur eadem proprietas. Ex his vice verſa ſequitur, quod, ſi æquatio differentialis quaedam formæ $nxdy - ydx = 0$ proponatur, ad inveniendum illius integrale ipſa multiplicanda ſit per $\frac{y^{n-1}}{xx}$, quo facto iſta proprietas erit reſtituta. Quia inter problemata geometrica, quæ calculi integralis ope ſolvuntur, præcipue notari merentur ea, quibus ex datis tangentium, vel arearum curvilinearum, vel aliis curvarum proprietatibus, aequationes naturam curvae definientes quaeruntur; etiam hujusmodi quaedam problemata adferamus ad ea quae dicta ſunt illuſtranda. Cum ipſe calculus differentialis primam ſuam originem debeat illis problematibus, quæ poſitionem rectae curvam dato puncto tangentis ſpectant, et ob hanc ipſam rationem *methodus tangentium* vocata ſit: vice verſa ea methodus, qua ex data poſitione tangentis ipſa curva quaeritur, *methodus tangentium inverſa* vocata eſt. Et cum inventó demum calculo integrali ad hujusmodi problemata hic calculus potiſſimum applicatus fuerit; univerſus hic calculus a quibusdam methodus tangentium inverſa vocata eſt, licet uſum habeat multo latius patentem. Generaliter hic iterum monenda ſunt ea, quae ſupra §. 11. ratione univerſae Analyſeos ſunt

modi-

monita. Calculus integralis proprie non docet, quomodo aequatio problematis fundamentalis inveniri queat. Iſte modus hauriri debet ex diſciplina, ad quam problema propoſitum pertinet. Docet tantum iſte calculus, quomodo data problematis propoſiti aequatione fundamentali ad perfectam problematis ſolutionem pervenire queamus. Cujus rei ratio ut eo melius perſpiciatur, problemata geometrica, quae ſequuntur, ſunt adpoſita.

§. 442.

Quaeritur curva, cujus ſubtangens PT ſemper aequalis eſt duplae abſciſſae AP. Quando x abſciſſam AP et y applicatam PM denotat, ratio ſubtangentis ad ordinatam y ſemper aequalis eſt limiti rationis $\Delta x : \Delta y$, ſeu rationi $dx : dy$, uti ex praecedentibus conſtat; ſeu quod idem eſt, ſubtangens curvae ſemper eſt $= \frac{ydx}{dy}$. Data igitur functione ipſius x, vel ipſius y, vel utriusque, cui ſemper aequalis eſt ſubtangens, datur curvae aequatio differentialis, qua integrata, habetur aequatio curvae quaeſitae. Erit igitur ex conditionibus problematis propoſiti $\frac{ydx}{dy} = 2x$, ex qua reducta fit $2xdy - ydx = 0$. Continetur haec aequatio ſub forma $nxdy - ydx = 0$, poſito $n = 2$, quare multiplicanda eſt per $\frac{y}{xx}$, ut prodeat $\frac{2yxdy - yydx}{xx} = 0$, cujus integrale invenitur $\frac{yy}{x} = b$, ſeu $yy = bx$, ex quo patet, curvam quaeſitam eſſe parabolam apollonianam, cujus parameter aequalis eſt cuilibet aſſumtae b. F. 275.

§. 443.

F.276. Accidit interdum, ut aequatio problematis fundamentalis pluribus quam duobus conſtet terminis. Tum vero ſaepius ope ſubſtitutionis idoneae in talem transformari poteſt aequationem, quae duobus tantum terminis conſtat, et quae ſub forma §. 441. comprehenditur. Quaeritur curva AM, in qua abſciſſa $AP = x$, $PM = y$, E = conſtanti a, cujus ſubtangens ubique eſt $= \frac{2ax + xx}{a + x}$: erit ex conditionibus problematis $\frac{2ax + xx}{a + x} = \frac{ydx}{dy}$, quae reducta dat $2axdy + xxdy - aydx - xydx = 0$. In hac aequatione non deprehenditur $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Poſito vero $2ax + xx = zz$, ut fiat $2adx + 2xdx = 2zdz$, habetur facta ſubſtitutione $x = \frac{zz - xx}{2a}$ et $dx = \frac{zdz}{a+x}$ ſequens aequatio $zdy - ydz = 0$, quae multiplicata per $\frac{1}{zz}$ dabit $\frac{zdy - ydz}{zz} = 0$, cujus integralis eſt $\frac{y}{z} = b$, vel $y = bz$ et ſubſtituto pro z valore ipſius $\sqrt{(2ax + xx)}$ erit $y = b\sqrt{(2ax + xx)}$, vel $yy = 2abbx + bbxx$, quae eſt aequatio pro hyperbola.

§. 444.

F.280. Prouti hic ex data expreſſione ſubtangentis eruitur aequatio pro curva, cujus eſt ſubtangens, ita quoque ex data expreſſione pro area curvae APM quaeri poteſt aequatio naturam curvae definiens. Requiritur hunc in finem, ut expreſſio pro area APM data ſit functio abſciſſae $x = AP$ et applicatae $y = PM$. Differentianda enim eſt functio, quae pro area datur, et cum generaliter differentiale areae APM in qualibet curva ſit ydx; differentiale inventum huic expreſſioni ydx aequandum erit,

qu-

qua aequatione integrata habetur aequatio naturam curvae definiens, quae quaerebatur. Sit igitur invenienda aequatio pro curva, cujus area AMN $= s$ ſit ſemper ſubtriplum rectanguli circumſcripti APMN; erit poſita AN $= x$, et NM $= y$, ex conditionibus problematis $3s = xy$, proinde $3ds = xdy + ydx$. Cum vero generaliter ſit $ds = ydx$, ponendum erit $3ydx = xdy + ydx$, ex qua deducitur $2ydx - xdy = 0$. Continetur haec aequatio differentialis ſub forma $nydx - xdy = 0$, multiplicanda igitur erit per $\frac{x}{yy}$, ut prodeat $\frac{2yxdx - xxdy}{yy}$ $= 0$, cujus integralis eſt $\frac{xx}{y} = b$, vel $xx = by$; curva igitur quaeſita parabola eſt.

§. 445.

Cum generaliter formulae differentialis duarum variabilium hujus formae $Pdy + Qdx$ integrale per haec praecepta haberi poſſit, ſi modo fuerit $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$; earum quoque aequationum differentialium integralia haberi poſſunt, quae ita reduci poſſunt, ut vel utrumque ejus membrum ſit formula differentialis duarum variabilium formae $Pdx + Qdy$, in qua eſt $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, vel unum ſaltem, alterum vero formula differentialis unius tantum variabilis formae pdx, cujus integrale per antecedentia haberi poteſt: id quod iterum in caſibus aliquot ſpecialibus tantum locum habet. Ad ejuſmodi aequationem deducunt duo, quae ſequuntur, problemata.

Invenire qualis ſit curva AM, in qua eſt $E^2 : PM^2 = PM : AT$, ubi eſt E conſtant quaedam data. Poſito $AP = x$, $PM = y$, $E = a$, ex conditionibus pro- F. 296

 ble-

blematis eſt AT $= \frac{y^3}{aa}$, et proinde PT $= \frac{y^3}{aa} + x = \frac{y^3 + aax}{aa} =$ ſubtangenti. Ex his ſequens deducitur aequatio: $\frac{ydx}{dy} = \frac{y^3 + aax}{aa}$, et exinde fit $y^3dy = aaydx - aaxdy$, quae aequatio utrinque per yy diviſa in hanc transformatur $ydy = \frac{aaydx - aaxdy}{yy}$. Sumto igitur integrali ex utroque membro habetur $\frac{1}{2}yy = \frac{aax}{y}$ vel $y^3 = 2aax$, quare curva quaeſita eſt ordinis tertii.

Quodſi invenienda ſit natura curvae AC, cujus ſubtangens eſt $= \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$; ex conditionibus problematis habetur $\frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx} = \frac{ydx}{dy}$, et reducta aequatione fit $3xxydx + 3x^3dy = 2axydy - ayydx$. Quodſi hæc æquatio dividatur per xx habetur $3ydx + 3xdy = \frac{2axydy - ayydx}{xx}$, ex qua ſumtis utrinque integralibus deducitur $3xy = \frac{ayy}{x}$, vel $xx = \frac{1}{3}ay$, quod oſtendit, curvam eſſe parabolam, cujus parameter eſt $\frac{1}{3}a$.

§. 446.

Caſus iſti ſpeciales eum in finem adducti ſunt, ut pateat quomodo methodis ſæpe ſpecialibus via admodum brevi ad optatum perveniri poteſt ſcopum. Sat multa problemata, quæ ad æquationes differentiales duarum variabilium deducunt, ſuam propriam habent methodum ſpecialem, qua æquationi ejusmodi indui poteſt forma, ut ejus integralis per regulas fundamendales ſat expedite capi

capi poſſit, cujus autem inveſtigatio relinquenda eſt ſagacitati illius, qui problema reſolvere ſuſcipit. Cæterum illud manifeſtum eſt, quod methodis iſtis ſpecialibus non egeremus, ſi generalis extaret methodus inveniendi factorem, per quem multiplicari debeat æquatio differentialis formæ $Pdx + Qdy = 0$, ad quam formam omnes æquationes differentiales duarum variabilium reduci poſſunt, ut fiat $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, ſi eadem, prouti proponitur, hac proprietate ſit deſtituta. Tentandum itaque erit, quousque analyſis hic pertingere valeat.

§. 447.

Data ſit æquatio differentialis $Pdx + Qdy = 0$, proprietate hac deſtituta, ſitque μ functio, per cujus diviſionem ipſa ſublata eſt. Si ergo æquatio hæc denuo per μ multiplicetur, in producto $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$, proprietas hæc reſtituta erit. Atque proinde fiet $\frac{P\overset{y}{d}\mu + \mu\overset{y}{d}P}{dy} - \frac{Q\overset{x}{d}\mu + \mu\overset{x}{d}Q}{dx} = \varphi$. Ex his concluditur $\frac{\overset{y}{d}\mu}{\mu} = \frac{\varphi dy}{\mu P} - \frac{\overset{y}{d}P}{P}$ et $\frac{\overset{x}{d}\mu}{\mu} = \frac{\varphi dx}{\mu Q} - \frac{\overset{x}{d}Q}{Q}$. Addantur iſtæ aequationes et prodit ſumma $\frac{\overset{y}{d}\mu + \overset{x}{d}\mu}{\mu} = \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\varphi dy}{\mu P} + \frac{\varphi dx}{\mu Q} - \frac{\overset{y}{d}P}{P} - \frac{\overset{x}{d}Q}{Q}$. Ex æquatione vero $Pdx + Qdy = 0$ concluditur $Q = -\frac{Pdx}{dy}$; quo valore pro Q

 in

in repertae æquationis termino ſecundo ſubſtituto fiet

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{\overset{y}{d}P}{P} - \frac{\overset{x}{d}Q}{Q}.$$ Quodſi igitur hæc æquatio fuerit integrabilis, ex eadem obtinetur log. μ, et capiendo numeros ipſa functio μ, quae quærebatur. Inſignis vero difficultatis in quovis fere caſu eſſe ſolet haec integratio. Dantur interim caſus aliquot ſpeciales, in quibus hoc negotium facilius ſuccedit. Simpliciſſimus eorum eſt is, in quo æquatio hæc differentialis non pendet niſi a ſola x, aut ſola y, quorum caſuum perfecte identicorum unicum attentius ſcrutari ſufficit. Cum ſit $Pdx +$ $Qdy = 0$, fiet $P = -\frac{Qdy}{dx}$, et ſubſtituto hoc valore habemus $$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\overset{y}{d}Pdx}{Qdy} - \frac{\overset{x}{d}Q}{Q},$$ quæ forma in quibusdam caſibus non niſi ſolum x involvit. Diſtinguendi itaque erunt caſus, in quibus hoc evenit. Ut formula non contineat, niſi x, functiones P et Q ejus formae eſſe debent, ut $\frac{\overset{x}{d}G}{G}$ et $\frac{\overset{y}{d}Pdx}{Qdy}$ debite reductae ab y omnino non pendeant. Indicemus in poſterum littera Y functionem ipſius y et minuſculis r, s, t, functiones ipſius x quaſcunque. Q itaque primo loco ejusmodi eſſe debet functio ipſius y, quae ſi ſola x in eadem variabilis ponatur, tale producit differentiale, quod per eandem functionem ipſius y diviſibile ſit, per quam Q ipſum dividi poteſt. Hoc vero evenire prorſus nequit, niſi ſit factum functionis cujusdam ipſius y per aliam quamcunque ipſius x, unde generaliter erit $G = Yr$. Forma ipſius P ejusmodi requiritur, ut $\overset{y}{d}P$ et Q per eandem functionem ipſius y, ſint diviſibilia. Cum itaque

jam

jam antea functionem ipſius y, per quam Q dividi poteſt, aſſumſerimus Y, hoc Y ipſius $\overset{y}{d}P$ diviſor exiſtere debet: unde forma ipſius $\overset{y}{d}P$ eſſe debet $Ytdy$, et forma ipſius P eſſe debet $t\int Ydy + s$. Quare ſi $\int Ydy$ ponatur $= Y'$, erit $P = tY' + s$. Aequationes itaque hac methodo integrabiles erunt, quae habent formam $(tY' + s)dx + Yrdy = 0$, aut quae ad hanc formam ſunt reducibiles. Solutum ſic habemus propoſiti problematis generalis caſum particularem, ſed reſtat adhuc potior pars, quo pertinent caſus, in quibus valor ipſius μ generaliter ſolutus eo reduci nequit, ut ſolum a variabili unica pendeat, qui multo majorem habent difficultatem, ita ut generalis hujus problematis ſolutio nondum ſit in poteſtate.

§. 448.

Hæc cauſſa eſt cur in methodis ſpecialibus inveſtigandis et emendandis magis occupati fuerint Analyſtae, quam in invenienda generali, cum generalis hunc in finem adhibenda methodus vix ſperanda ſit. Inter varias vero methodos ſpeciales ab iisdem excogitatas potiſſimum notanda eſt ea, qua æquationi $Pdx + Qdy = 0$ vel $Pdx = Qdy$ ea tribuitur forma, ut P ſit functio unius tantum variabilis x et Q functio ſolius y. Patet enim, quod in hoc caſu integratio æquationis differentialis propoſitæ non pendeat, niſi a methodis, quibus æquationum, non niſi unicam variabilem continentium, quæriuntur integralia, atque ad hunc ipſum caſum ſæpe reducuntur æquationes propoſitæ ope methodi generalis §. *praec.* expoſitæ. Iſta vero methodus, qua æquationi differentiali duarum variabilium ea tribuitur forma, ut ſit $Pdx = Qdy$, P vero non niſi functio ipſius x, Q functio ſolius y, vocatur *Separatio variabilium* x et y. Quædam occurrunt problemata, in quibus hæc ſeparatio indeterminatarum ſponte ſe offert; in aliis autem

major et in hoc negotio deprehenditur difficultas. Adferamus igitur primo quædam problemata, in quibus forma æquationis, ubi variabiles ſunt ſeparatæ, absque omni transformatione ſtatim ſe offert, cujusmodi erunt ſequentia.

F.275. Quæritur, qualis ſit curva AP, cujus applicata PM ſemper eſt media proportionalis inter datam conſtantem E et ſubtangentem PT. Sit $AP = x$ et $PM = y$, $E = a$, erit $PT = \frac{yy}{a}$, proinde ex conditionibus problematis fit $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a}$, ex qua reducta habetur $aydx = yydy$, et dividendo per y fit $adx = ydy$, in qua variabiles ſunt ſeparatæ. Sumtis igitur utrobique integralibus invenitur $ax = \frac{1}{2}yy + C$. Quia initium abſciſſarum ſumitur in puncto, A, ubi curva axem ſecat, patet poſito $x = 0$, eſſe $y = 0$, et proinde $C = 0$; æquatio igitur pro curva quæſita eſt $ax = \frac{1}{2}yy$, vel $2ax = yy$, quæ oſtendit, curvam quæſitam eſſe parabolam, cujus parameter $= 2a$.

F.281. Quaeritur curva, cujus applicata PN eſt media proportionalis inter ſubtangentem PT et datam conſtantem E demta abſciſſa AP. Pono $E = a$, $AP = x$, $PN = y$, erit $a - x : y = y : PT$, et proinde $PT = \frac{yy}{a-x}$, unde fit æquatio $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a-x}$, ex qua reducta obtinetur $aydx - yxdx = yydy$, quae diviſa per y dat $adx - xdx = ydy$, in qua iterum variabiles ſeparatae ſunt, et cujus integralis eſt $ax - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}yy$, conſtans iterum nulla adjicitur, quia poſito $x = 0$ fit $y = 0$. Aequatio vero inventa $ax - \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}yy$, ſeu $2ax - xx = yy$ indicat, quæſitam curvam eſſe circulum, cujus radius $= a$.

;Qu

Quæritur curva, quae hanc habet proprietatem, : quadratum applicatae PM ubique ſit medium propor- onale inter quadratum datæ conſtantis E et aream cur- lineam APM. Pono AP $= x$, PM $= y$, E $= a$, erit

ea APM $= \frac{y^4}{aa}$, et proinde d. APM $= ydx =$

$\frac{4y^3 dy}{aa}$, ex qua reducta fit $4y^3 dy = aaydx$, et diviſo

r y habetur $4yydy = aadx$, et ſumtis integralibus ob- ietur $\frac{4}{3} y^3 = aax$, vel $y^3 = \frac{3}{4} aax$. Curva igitur quæ- a eſt ordinis tertii.

§. 449.

Permulti occurrunt caſus, in quibus integralia am poſt ſeparationem variabilium vel tranſcendentia it, vel plane ſumi nequeunt; ob defectum methodus culi integralis functionum unius variabilis, cum nihi- ninus curva quæſita poſſit eſſe algebraica. In his ita- e et aliis ejusmodi occaſionibus recurrendum eſt ad i media, quorum unum erit, ut æquationi differentia- tribuatur forma $Pdx + Qdy = 0$, ita ut P involvat y, Q contineat x, et integratio tentetur ſecundum præ- ita §§. 437. ſqq. Alterum medium eſt, ut quidem uationi differentiali ea relinquatur forma, in quibus iabiles ſint ſeparatæ $Xdx = Ydy$, tum vero duo for- ntur ſpatia, quorum unum ſit $= \int Xdx$, alterum $=$ dy; et ſi ratio inveniri poteſt inter duo iſta ſpatia, id , ſi parti unius haberi poteſt pars alterius æqualis, ſi- um eſt, quod curva quæſita ſit geometrica, illiusque ura inveniri queat; ſi vero unum ſpatium alteri æqua- ion poſſit, erit curva quæſita tranſcendens. Prio- modi exemplum eſt problema §phi 442., ubi quae- atur curva, cujus ſubtangens PT æqualis ſit duplae ciſſae 2AP. Hinc erat ex conditionibus problematis

$= 2x$, et proinde $\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}$, ubi indeterminatae

qui-

quidem ſunt ſeparatae, ſed integrale utriusque membri aequationis tranſcendens eſt. Tribuendo autem aequationi hanc formam $2xdy - ydx = 0$ ſupra jam §. 44 ejus integrale inventum eſt.

§. 450.

Alter modus generalis eſt, tam pro curvis tranſcendentibus, quam geometricis, quotiescunque variabiles in data aequatione differentiali ſunt ſeparatae. Adplicemus eundem ad idem exemplum $\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}$, et patet $\frac{dy}{y}$ eſſe differentiale areae ejusmodi curvae, in qua y ſit abſciſſa, ſit $\frac{1}{y}$ = applicatae, quae ſi ponatur $= u$, erit $1 = uy$ aequatio pro hac curva, quam hyperbolam eſſe ad aſymtotum relatam, cognitum eſt. Pari ratione $\frac{dx}{x}$ eſt differentiale areae ejusmodi curvae, in qua applicata ponitur $= z$, fiet $\frac{1}{x} = z$, ſeu $1 = xz$, quae iterum eſt pro hyperbola ad aſymtotam relata. Ad

F.295. inveniendam per haec naturam curvae quaeſitae, ducatur recta AB, et per punctum A ducatur perpendicularis EF. Ad AE tanquam axem conſtruatur curva, cujus aequatio eſt $2 = uy$, ita ut quaevis applicata GH = fiat $= \frac{2}{y}$, et habebitur exinde hyperbola IKH ad aſymtotas AD, AG, cujus potentia eſt $= 2$. Infra AB vero conſtruatur curva, cujus aequatio eſt $1 = xz$, ita ut quaevis applicata BL fiat $= \frac{1}{x}$, formabitur inde hyperbola ad aſymtotas AF et AB, cujus potentia eſt = Sumtis igitur abſciſſis AO et AG ut et AP et AB, et

$G = \int \frac{2}{y} dy$, et $MB = \int \frac{1}{x} dx$. Cum igitur eſſe

ebeat $\frac{2}{y} dy = \frac{1}{x} dx$, erit $\int \frac{2}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$, id eſt

ımi debet KG = MB. Tum enim productis LB et HG
it punctum occurſus C in curva quaeſita. Talis enim

it $BC = AG = y$ functio ipſius $AB = x$, ut ſit $\int \frac{2dy}{y}$

$\int \frac{x}{dx}$. Reſtat igitur ad naturam curvae AC deter-
inandam, ut ſpatio hyperbolico KG ſumatur aliud
B aequale. Quodſi autem ſumatur $AO^2 : AG^2 = AP$
AB, erit area KG = areae MB (§. 332.). Proinde
rva conſtruenda AC eſt geometrica et quidem talis, ut
adrata adplicatarum PS, BC, ſint ut abſciſſae AP et
B, id eſt ratio $\frac{yy}{x}$ eſt = conſtanti a, ex quo ha-
tur aequatio $yy = ax$ pro parabola, quae jam ſupra
442. inventa eſt.

§. 451.

Problema, quod in §. praecedente ſolutum dedi-
s, licet caſum tantum exhibeat ſpecialem; haud diffi-
lter tamen ex eo abſtrahuntur regulae generales in
ovis alio caſu adhibendae. Omnia enim eo redeunt,
propoſita aequatione differentiali hujus formae Xdx
Ydy, in qua variabiles ſunt ſeparatae, conſtruantur
ae curvae, in quarum una quaevis applicata z ad ab-
ſſam x ſit = X, in altera vero quaevis applicata u ad
ſciſſam y ſit = Y. Quarum curvarum ſi cuivis areae
ius abſciſſae x reſpondenti reperiri poteſt aequalis area
erius, quae abſciſſae y reſpondebit; ad quamvis x
bebitur functio ei reſpondens y: et hoc quidem eſt id,
od requiritur ad cognoſcendam naturam curvae, cu-
aequatio eſt $\int Xdx = \int Ydy$, quae proponebatur.
Quodſi

Quodſi hic conſtans quaedam addenda ſit, illa ex conditionibus problematis ſpecialibus determinanda eſt. In problemate praecedentis § illud opus non eſt, quia, poſito $x = 0$, evadit $y = 0$. Prouti vero conceſſis quadraturis conſtruitur aequatio differentialis $Xdx = Ydy$, eodem quoque modo conſtrui poteſt, haec aequatio conceſſis rectificationibus curvarum. Exprimit enim formula Xdx differentiale arcus curvae cujus applicata ad quamvis abſciſſam x eſt $= \int dx \surd (X^2 - 1)$. Pari ratione Ydy exprimit differentiale arcus curvae cujus applicata ad quamvis abſciſſam y eſt $= \int dy \surd (Y^2 - 1)$. Conſtruendae igitur ſunt duae curvae, in quarum una quaevis applicata z ad abſciſſam x ſit $= \int dx \surd (X^2 - 1)$, in altera vero quaevis applicata u ad abſciſſam y ſit $= \int dy \surd (Y^2 - 1)$. Quo facto, ſi cuivis arcui unius curvae abſciſſae x reſpondenti reperiri poteſt aequalis arcus alterius curvae, qui abſciſſae y reſpondebit; ad quamvis x habebitur functio ei reſpondens y, et proinde conſtrui poterit aequatio $\int Xdx = \int Ydy$, quae proponebatur.

§. 452.

Caeterum methodus eadem manet, ſi unius memb... integrale haberi queat per regulam hujus calculi fundamentalem, et alterum membrum pendeat a rectificatione, vel quadratura cujusdam curvae. Ex quo ſimul perſpicitur methodus conſtruendi, ſi in data aequatione uno membro dx vel dy ſolitarium conſiſtat. Sic ſi in ſolutione alicujus problematis perventum ſit ad hujusmodi aequationem differentialem $dy = \frac{adx}{\surd (2ax - xx)}$ curv... quam haec aequatio exprimit, conceſſa rectificatione curvae, cujus differentiale arcus eſt $\frac{adx}{\surd (2ax - xx)}$ habe... F. 297. ſequentem in modum. Radio DA $= a$ deſcribatur ſe... circulus AHL, ductaque ordinata HBC ſumatur BC $=$ arcui AH, et erit punctum C in curva quaeſita. N... diff...

ifferentiale arcus AH eſt $= \frac{adx}{\surd(2ax - xx)} =$ differenti ipſius BC, et proinde aequatio ad curvam BC eſt y $\int \frac{adx}{\surd(2ax - xx)}$. Quodſi vero ejusmodi aequatio ifferentialis, in cujus uno membro dx vel dy ſolum onſiſtat, conſtruere velimus conceſſa quadratura cujusm curvae, multiplicanda eſt æquatio per conſtantem uandam ut a, ut ex una parte habeatur differentiale lx vel ady rectanguli, cujus baſis vel altitudo conſtans l, atque tum conſtructio ea eſt, quae in §. praecente fuit tradita. Exemplum hujus rei ſuppeditat ſeiens problema.

Quæritur curva, cujus ſubtangens ſemper æqualis conſtanti a; et erit ex conditionibus problematis $\frac{ydx}{dy}$ a, proinde $ydx = ady$ et $dx = \frac{ady}{y}$. Multiplico hanc uationem per conſtantem a, ut fiet $adx = \frac{aady}{y}$. ſita abſciſſa cujusdam curvæ $= y$, cujus applicata eſt $= \frac{aa}{y}$, ut habeatur $uy = aa$, quæ eſt æquatio pro perbola, cujus potentia eſt $= aa$. Ducatur itaque ad tam indefinitam LH normalis OI. Sumatur A pro tio abſciſſarum, atque in LH capiantur abſciſſæ AG, I $= x$, facta AI $= a$ per I ducatur recta IQ ipſi AH rallela, erunt rectangula AP, AQ, etc $= \int adx = ax$. axe AO vero capiantur abſciſſæ AB, AN, AO, etc, y, et fiant applicatae BK, NE, OF, etc, $= \frac{aa}{y} = u$, fiet curva KF hyperbola æquilatera, cujus entia eſt $= aa$. Sumto igitur rectangulo AP, eidem F. 298.

æqua-

æquale fieri debet ſpatium hyperbolicum BE, ut ſit $\int adx = \int \frac{aady}{y}$, et ideo productis EN et PG uſque ad concurſum in D, erit punctum D in curva quæſita. Tum enim eſt GD $= y$ talis functio ipſius x, quam æquatio $\int adx = \int \frac{aady}{y}$ poſcit. Sed ex proprietatibus hyperbolæ notum eſt, quod ſumtis areis BE, NF, etc æqualibus, ſeu in proportione arithmetica; AB, AN, AO, fiant geometrice proportionales. Sumtis vero rectangulis AP, GQ, etc, æqualibus, fiunt non tantum abſciſſæ AG, AH, etc, ſed et areæ BE, NF, etc, æquales. Curva igitur BDC hanc habet proprietatem, ut ſumtis AG $= a$, GD $= b$, fiat $a : x = lb : ly$, ſeu $xlb = al\frac{y}{b}$, et poſito $lb = 1$, $x = al\frac{y}{b}$, quod oſtendit, curvam quæſitam eſſe logarithmicam.

§. 453.

Ex omnibus hiſce adparet, quod unicum potiſſimum ſit, quod deſiderari queat ad perficiendam methodum tangentium inverſam, ſeu methodum integrandi æquationes differentiales duarum variabilium primi ordinis, ſeparatio nempe variabilium in ejusmodi æquationibus differentialibus, ſi problema conducat ad tales in qua variabiles non ſunt ſeparatae. Haec cauſa eſt cur permultae ab Analyſtis excogitatae ſunt methodi hunc in finem adhibendae, quarum quaedam in caſibus tantum ſpecialibus ſuccedunt: aliae vero uſum habent generaliorem, Quod ad primas attinet methodos; notandum eſt, quod ſaepe aequatio jam per ſe ſit ejus conditionis, ut vulgaribus Algebrae operationibus omnes illae partes, quae x et dx involvunt ad unam, reliquae vero quae y et dy involvunt, ad alteram partem diſponi poſ-

int. In aliis caſibus ope idoneae ſubſtitutionis et trans-ormationis ſeparantur variabiles. Atque in his per plu-es occurrunt, pro quibus certæ regulæ adhibendæ tra-i nequeunt, cum quodlibet exemplum peculiarem ha-eat regulam, quæ illi qui in calculo verſatus eſt, raro ffugiet. Adferamus tamen et hujus negotii ſpecimina ædam, qualia erunt ſequentia.

Si æquatio propoſita ſit $aaxdx + yyxdx = ydy\sqrt{(xx}$ $\cdot ff)$ fiet $(aa+yy)xdx = ydy\sqrt{(xx+ff)}$, ex qua dedu-itur $\frac{xdx}{\sqrt{(xx+ff)}} = \frac{ydy}{aa+yy}$.

Aequatio $\frac{xdx}{\sqrt[5]{(a^5+y^5)}} = \frac{ydy}{\sqrt[4]{(b^4-x^4)}}$ transfor-atur in eam $xdx(b^4-x^4)^{\frac{1}{4}} = ydy(a^5+y^5)^{\frac{1}{5}}$.

Aequationis $xxdx^2 + xydxdy = aady^2$ membrum imum eſſet quadratum, ſi eidem adderetur $\frac{1}{4}yydy^2$. ac igitur quantitate utrinque addita fit $xxdx^2 + xydxdy$ $\frac{1}{4}yydy^2 = aady^2 + \frac{1}{4}yydy^2$, proinde radice quadra-a utrinque extracta, habetur $xdx + \frac{1}{2}ydy = \pm dy$ $yy + aa)^{\frac{1}{2}}$.

In æquatione $aadx = x^2dy + 2xydy + yydy$, quae m hac coincidit $aadx = (x^2+2xy+yy)dy$, coefficiens ius dy eſt quadratum ipſius $x+y$. Poſito igitur $x+y$ habetur $dx + dy = dz$, et $dx = dz - dy$, unde fit z $- aady = z^2dy$, et $aadz = (aa+zz)dy$, proinde $= \frac{aadz}{aa+zz}$.

Quodſi ſequens propoſita ſit æquatio $(xdy + ydx)$ $-xxyy)^{\frac{1}{2}} = \frac{xdx+ydy}{(xx+yy)^{\frac{1}{2}}}$, obſervo, quod primi mbri factor $xdy + ydx$ ſit differentiale facti xy, et d hujus facti quadratum exiſtat ſub vinculo exponen-

 tis

tis in altero factore. Pono igitur $xy = z$, ut prius membrum fiat $dz\,(a^4 - zz)^{\frac{1}{2}}$. Præterea in ſecundi membri numeratore invenitur differentiale ipſius $xx + yy$ per 2 diviſum, quæ quantitas eſt ſub vinculo exponentis in numeratore. Quare pono $\frac{xx+yy}{2} = t$, ut fiat dt $(a^4 - zz)^{\frac{1}{2}} = \frac{dt}{\sqrt{2t}}$.

§. 454.

Licet in ejusmodi caſibus ſpecialibus ſeparatio indeterminatarum ingenio illius, qui problema ſolvere cupit, relinquenda ſit; habentur tamen regulæ quædam generales pro ſeparatione variabilium per ſubſtitutionem facienda. Atque inter has primaria eſt ea, quæ ad omnes æquationes differentiales homogeneas ſe extendit. Cum omnis æquatio differentialis primi ordinis hanc habeat formam $Pdx + Qdy = 0$, ea in ſequentem formam facile transformatur $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q}$, ubi p et q eſſe poſſunt functiones homogeneæ variabilium x et y. Poſito in hoc caſu $x = yz$, et ſubſtituto hoc valore tam in p quam q, ultro patet, quod in caſu, quo p et q ſunt functiones homogeneæ, ſinguli termini tam ipſius p quam q, per eandem ipſius y poteſtatem ſint multiplicati §. 123. Numeratore igitur et denominatore p… hanc ipſius y poteſtatem diviſo, valor fractionis … non mutatur, quæ tum non erit, niſi functio ipſius … Ex hypotheſi $x = yz$, porro ſequitur $dx = ydz + \ldots$ et proinde $\frac{dx}{dy} = \frac{ydz}{dy} + z$. Ex æquatione igi…

ropoſita $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q}$ fiet $\frac{ydz}{dy} + z = \frac{p}{q}$, et hinc oncluditur $\frac{ydz}{dy} = \frac{p}{q} - z$, et poro $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{\frac{p}{q} - z}$.

§. 455.

Eadem methodus ſeparandi variabiles extenditur ioque ad æquationes differentiales trium variabilium x, z, quarum forma generalis eſt $Pdx + Qdy + Rdz =$, ſi P, Q, R. ſint functiones variabilium x, y, z, homo-neæ m dimenſionum. Ponitur enim $y = xu$, et $z =$, atque hac ſubſtitutione facta functiones P, Q, R, nsmutabuntur in functiones duarum variabilium u et t, ultiplicatas per poteſtatem x^m. Sint itaque F, G, H, nctiones illæ variabilium u et t, ut ſit $P = Fx^m$, $Q =$ x^m, $R = Hx^m$; erit præterea $dy = xdu + udx$, atque $= xdt + tdx$. Quibus valoribus ſubſtitutis habetur uatio hujus formae $x^m dx\,(F + Gu + Ht) + x^{m+1}\,Gdu$ $x^{m+1}\,Hdt = 0$, unde per $x^{m+1}\,(F + Gu + Ht)$ utrin-e diviſo concluditur $\frac{dx}{x} + \frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht} = 0$, ubi iabilis x a reliquis u et t ſeparata eſt. Quare nunc eo tum diſpiciendum eſt, utrum formulae $\frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht}$ egrale capi poſſit modo §. 434. expoſito. Quod ea-n methodus ad æquationes differentialis plurium m trium variabilium pariter extendi queat, facile et.

§. 456.

Quia hæc methodus ſeparandi variabiles iterum ad ctiones homogeneas tantum adſtricta eſt; Analyſtae ſiverunt methodos, æquationes differentiales non nogeneas ita transformandi, ut evadant homogeneæ, ue hoc iterum caſu methodi generales non ſunt co-

 gnitæ.

gnitæ. Palmaria methodus iterum circa idoneas ſubſti-tutiones verſatur, quarum primo quaedam tantum in caſibus ſpecialibus adhibendae hic proponendae, erunt ſequentibus exemplis.

Si ſit $dx\sqrt{(aaxx + ay^3)} = yydy$, poni debet $y^3 =$ azz, ac fiet $dx\sqrt{(aaxx + aazz)} = \frac{2}{3}azdz$. Vel ponatur $\sqrt{(aaxx + ay^3)} = az$, erit $azdx = \frac{2}{3}azdz - \frac{2}{3}axdx$

Si ſit $z^3dz + \frac{zzdx}{\sqrt{(a+x)}} = dx$; pono $\sqrt{(a+x)} =$ t, et proinde $a+x = tt$, et $z^3dz + 2zzdt = 2tdt$. Si praeterea $zz = y$, erit $\frac{1}{2}ydy + 2ydt = 2tdt$.

Si ſit $(a + bxy + cx^2y^2 + ex^3y^3 + \text{etc.})\, dx + (kx^2$ $+ mx^3y + nx^4y^2 + \text{etc})\, dy = 0$, vel $(ay + bxy^2 + cx^2$ $y^3)\, dx + (kx + mx^2y + nx^3y^2 + \text{etc})\, dy = 0$, ubi di-menſiones terminorum ſunt in progreſſione arithmetica

poni debet $y = \frac{1}{xz}$, quo facto habetur $(a + \frac{bx}{z} + \frac{cx^2}{zz}$

$+ \frac{ex^3}{z^3} + \text{etc})\, dx - (kx^2 + \frac{mx^3}{z} + \frac{nx^4}{zz} + \text{etc})\, \frac{dz}{zz} =$

0, et $\left(\frac{a}{z} + \frac{bx}{zz} + \frac{cx^2}{z^3} + \text{etc}\right) dx - (kx + \frac{mx^2}{z}$ $+$

$\frac{nx^3}{zz} + \text{etc})\, \frac{dz}{zz} = 0$. Atque ſi fuerit generatim $(a$ $+ bz^r x^{k-1} + \text{etc})dx + (mx^k z^{r-1} + (nx^{k-1}z^{2r-1} + p$ $z^{3r-1} + \text{etc}) = 0$, ad obtinendam homogeneitatem poni

debet $z = y^{\frac{1}{r}}$.

§. 457.

Poſſunt deinde quoque a priori iſtae functiones quaeri, quae loco x vel y ſubſtitutae æquationem reddunt homogeneam. Propoſita ſit aequatio hujusmodi $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$; atque patet aequationem homogeneam fore, ſi ſit $n + m = q + p =$ $r + s$. Sed hanc aequalitatem jam non ſupponimus.

it itaque $y = z^t$, erit $dy = tz^{t-1}dz$; praeterea $y^s =$
z^{st}, $y^q = z^{qt}$, et facta ſubſtitutione habetur $az^{nt}x^m dx$
$bz^{qt}x^p dx + ctxz^{st+t-1}dz = 0$. Jam ad obtinendam
omogeneitatem eſſe debet $nt + m = qt + p = r + st + t$
-1. Ex harum aequationum priori fit $t = \frac{p-m}{n-q}$, quo
alore in altera ſubſtituto fit $(s-q+1)(p-m) = p-r$
$-1)(n-q)$, quae ultima aequatio exprimit conditionem
xponentium, ſub qua poſſibile eſt, ut aequatio fiat ho-
ogenea. Si aequatio propoſita quatuor conſtaret ter-
inis, eodem modo concludendo invenirentur duae
nditiones, ſub quibus homogeneitas reſtitui poſſit.
o quinque terminis invenirentur tres conditiones et
porro.

§. 458.

Unicus caſus particularis reſtat, nimirum iſte, quo
riabiles earumque differentialia primam dimenſionem
n excedunt, quique repraeſentari poteſt ſequente
quatione $axdx + bydx + cdx + gxdy + fydy + hdy = 0$,
e $(ax + by + c)dx + (gx + fy + h)dy = 0$. Atque ſta-
i obſervo, in caſu $b = g$, aequationem integrabilem
. Tum enim eadem ad ſequentem reducitur $\pm b$
$dx + xdy) = -axdx - fydy - cdy - hdy$, cujus inte-
lis eſt $\pm bxy + \frac{1}{2}axx + \frac{1}{2}fyy + cx + hy + C = 0$.
amus itaque b in $= g$, atque hoc caſu ſit $x = z + r$,
$= u + s$, ubi r et s conſtantes denotent, erit $dx = dz$,
ue $dy = du$. Subſtitutis his valoribus evadit

$$\left.\begin{array}{l} az + ar \\ bu + bs \\ + c \end{array}\right\} dz + \left.\begin{array}{l} gz + gr \\ fu + fs \\ + h \end{array}\right\} du = 0$$

aequatio eſſet homogenea, ſi $ar + bs + c = 0$, at-
$gr + fs + h = 0$, ex quibus aequationibus, pro r et
ntes deducuntur valores $r = \frac{cf - bh}{gb - af}$, atque s
=

$= \frac{ab - cg}{gb - af}$. Si foret $cf = bb$, vel $ab = cg$; una tan-
tum ſubſtitutione loco x vel y faciendae opus eſſet. Si
vero ſimul $cf = bb$ et $ab = cg$, foret $g = \frac{ab}{c}$ et $f =$
$\frac{bb}{c}$, unde ex æquatione propoſita fit $(ax + by + c)dx +$
$\left(\frac{ab}{c}x + \frac{bb}{c}y + b\right) dy = 0$ vel $(ax + by + c) dx +$
$(ax + by + c)\frac{bdy}{c} = 0$, vel denique $(ax + by + c)(dx +$
$\left.\frac{bdy}{c}\right) = 0$. Unde concluditur $ax + by + c = 0$, vel $x +$
$\frac{by}{c} + C = 0$, quae æquationes problemati ſatisfa-
ciunt.

Quodſi denique foret $bg = af$, quo caſu fiunt $r =$
∞ et $s = \infty$; eſſet $f = \frac{bg}{a}$, et proinde $(ax + bx +$
$dx + \left(gx + \frac{gby}{a} + b\right) dy = 0$. Ponatur $ax + by = z$
erit $g = \frac{z - ax}{b}$, $dy = \frac{dz - adx}{b}$, quibus ſubſtitu-
habetur $z\left(dx + \frac{gdz}{ab} - \frac{gdx}{b}\right) + cdx + \frac{bdz}{b}$
$\frac{abdx}{b} = 0$, vel $dx\left(z - \frac{g}{b}z + c - \frac{ab}{b}\right) + dz\left(\frac{g}{ab}\right.$

$z +$

$z + \frac{h}{b}\Big) = o$, unde concluditur $dx =$

$$\frac{dz\left(\frac{h}{b} + \frac{g}{ab}z\right)}{\frac{g}{b}z - z + \frac{ah}{b} - c}.$$

§. 459.

Explicatæ itaque ſunt methodi ex conditionibus exponentium earum, ad quas variabiles in æquatione propoſita elevatæ ſunt, dignitatum deducendi criteria integrabilitatis. Quia autem æquatio differentialis duarum variabilium quaecunque reduci poteſt ad formam $Pdx + Qdy = o$; ex conditionibus quoque coefficientium P et Q criteria integrabilitatis concludi poterunt. Palmarium integrabilitatis criterium ſupra §. 434. jam demonſtratum eſt. Oſtendimus enim, ſi fuerit $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$; propoſitæ æquationis integralem in poteſtate eſſe. Præterea §. 440. occupati jam ſumus in inveſtigando factore μ, per quem multiplicari debet æquatio differentialis formæ $Pdx + Qdy = o$, ut fiat $\frac{\overset{y}{d}P}{dy} = \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, ſi eadem prouti proponitur hac proprietate deſtituta ſit. Inventum porro eſt, quod reſolutio hujus problematis generalis pendeat ab integratione hujus æquationis $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\overset{y}{d}P}{P} - \frac{\overset{x}{d}Q}{Q}$, vel $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\overset{y}{d}Pdx}{Qdy} - \frac{\overset{x}{d}Q}{Q}$, quae integratio licet non ſemper in poteſtate ſit, tamen eo caſu tanta

 non

non laborat difficultate, quo formula $\frac{\overset{y}{d}P\,dx}{Q\,dy} - \frac{\overset{x}{d}Q}{dQ}$ non niſi variabilem x involvit. Demonſtravimus denique hanc conditionem locum habere, ſi P et Q ejusmodi habeant formas, ut ſit $P = tY^1 + s$, atque $Q = Yr$, ubi eſt Y functio ipſius y, $Y^1 = \int Y dy$, t vero r et s ſunt functiones ipſius x.

§. 460.

Secundum hæc integrabilis erit æquatio differentialis quæcunque duarum variabilium x et y, quæ tribus conſtat terminis, atque ſub forma generali ſequente comprehenditur: $AXy^n\,dy + BX^1 y^{n+1} dx + Cy^q X^{11} dx = 0$. Dividatur enim hæc æquatio primo per y^q, ut fiat $AXy^{n-q}dy + BX^1 y^{n+1-q}dx + CX^{11}dx = 0$. Ulterius per AX diviſo æquatio ſic reducitur $y^{n-q}dy + \frac{BX^1 y^{n+1-q}dx}{AX} + \frac{CX^{11}dx}{AX} = 0$, ubi coefficientes ipſarum dx et y debitam habent formam. Quæratur itaque μ ex formula $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\overset{y}{d}P\,dx}{Q\,dy} - \frac{\overset{x}{d}Q}{Q}$, quæ formula hoc caſu a ſola x pendebit, ac invenietur $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{(n-q+1)BX^1dx}{AX}$. Eſt itaque $l\mu = \int\frac{(n-q+1)BX^1dx}{AX}$, et capiendo numeros habetur $\mu = e^{\int\frac{(n-q+1)BX^1dx}{AX}}$, poſita e baſi logarithmica. Multiplicetur nunc æquatio propoſita per factorem μ, erit $\mu y^{n-q}dy + \left(\frac{\mu BX^1 y^{n+1-q}}{AX} + \frac{\mu CX^{11}}{AX}\right) dx$

$x = 0$. Integretur hæc æquatio ſecundum præcepta 434 et invenitur primo $\int^{y} \mu y^{n-q} dy = \frac{\mu y^{n-q+1}}{n-q+1}$; deinde $d \int^{xy} \mu y^{n-q} dy = \frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} d\mu = \frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} \cdot \frac{\mu (n-q+1) BX^{1} dx}{AX}$ $= \frac{\mu BX^{1} y^{n-q+1}}{AX} dx$, quod ſubtractum a termino $\left(\frac{\mu BX^{1} y^{n-q+1}}{AX} + \frac{\mu CX^{11}}{AX}\right) dx$ relinquit $\frac{\mu CX^{11} dx}{AX}$. Eſt itaque integrale quæſitum $\frac{\mu y^{n-q+1}}{n-q+1} + \int \frac{C \mu X^{11} dx}{AX}$ $\pm E = 0$. Quodſi valorem ipſius μ in hac æquatione integrata ſubſtituamus, fiet $\frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} e^{\int \frac{(n-q+1) BX^{1} dx}{AX}}$ $+ \int \frac{CX^{11} dx}{AX} e^{\int \frac{(n-q+1) BX^{1} dx}{AX}} = \mp E$, unde conditur $y^{n-q+1} = (n-q+1) \left(\mp E - \int \frac{CX^{11} dx}{AX} \times e^{\int (n-q+1) \frac{BX^{1} dx}{AX}}\right) e^{\int (-n+q-1) \frac{BX^{1} dx}{AX}}$, vel que $y = \left((n-q+1)(\mp E - \int \frac{CX^{11} dx}{AX} e^{\int (n-q+1) \frac{BX^{1} dx}{AX}}) e^{\int (-n+q-1) \frac{BX^{1} dx}{AX}}\right)^{\frac{1}{n-q+1}}$. Poſſunt igitur methodo ſemper variabiles a ſe invicem ſeparari. Hoc unum præterea notari meretur, quod in caſu quo $n-q+1 = 0$, methodus generalis adplicari poſſe non

 vi-

videatur; ſed hoc caſu ob $n-q=-1$, æquatio propoſita ſic mutatur $A\frac{dy}{y}+\frac{BX^{\mathrm{I}}dx}{X}+\frac{CX^{\mathrm{II}}dx}{X}=0$, ubi variabiles per ſe jam ſeparatae ſunt.

SECTIO XXIX.

DE

INTEGRATIONE ÆQVATIONVM DIFFERENTIALIVM SECVNDI ET ALTIORVM ORDINVM.

§. 461.

Formulas differentiales quae differentialia ſecunda in-volvunt, varias eſſe generis ex 418. ſq. conſtat. Quæd[am] tantum unam variabilem x cum ſuis differentialibus dx et ddx, quædam præterea aliam vel alias variabiles y, dy, ddy, z, dz, ddz, etc. involvunt. Si formula propoſita præter conſtantes non contineat niſi y, dy, [dx] et ddx, atque variabilis x in eadem non inſit, illud in-dicio eſt, hanc formulam ortam eſſe ex differentiatio[ne] cujusdam formulæ, quæ y et dx tanquam duas vari[abi]les continet. Scripto igitur z loco dx et dz loco $d[dx]$ omnia hic adplicanda ſunt, quae ſupra de integratio[ne] functionum duas variabiles involventium ſunt expo[ſita]. Hujus rei exemplum hoc erit. Sit $ddV=dydx+y$[ddx]. Ponendo z loco dx et dz loco ddx habetur $zdy+$[ydz] cujus integrale invenitur yz, proinde reſtituto val[ore] dx pro z, habetur $dV=ydx$.

Pari ratione, ſi in formula quadam differen[tiali] ſecundi ordinis tam ddx quam ddy inveniantur cum [...]

differentialibus primis *dx* et *dy*; ex illo concluditur, quod formula orta ſit ex differentiatione cujusdam functionis, quæ *dx* et *dy* tanquam duas continet variabiles. Talis formula eſt $dV = \frac{dyddx - dxddy}{dy^2}$. Pono igitur *t* loco *dx*, *dt* loco *ddx*, *z* loco *dy*, *dz* loco *ddy*, ut fiat $dV = \frac{zdt - tdz}{zz}$ cujus integrale invenitur $\frac{t}{z}$, et reſtitutis *dx* et *dy* loco *t* et *z*, habetur $V = \frac{dx}{dy}$.

Ex his patet, quod in formulis quæ componuntur ex *dx*, *ddx* et conſtantibus ſolis, ſcripto *t* loco *dx* et *dt* loco *ddx*, formula convertatur in talem, cujus integratio pendet a methodis, quibus functionum unam tantum variabilem involventium reperiuntur integralia, ſic ſi propoſita fuerit hujusmodi formula $ndx^{n-1}ddx$, ſcripto *t* loco *dx* et *dt* loco *ddx* habetur ejus integrale t^n, et reſtituto *dx* loco *t*, fit integrale quæſitum $= dx^n$.

§. 462.

Quando igitur in ſolutione problematis cujusdam pervenitur ad æquationem differentialem, quæ differentialibus ſecundis implicata eſt, ante omnia diſpiciendum eſt, utrumne et in hiſce caſibus æquatio ita transformari queat, ut unum ejus membrum ſit functio, quæ præter *dx* et *ddx* non niſi quantitates conſtantes; vel noque præter conſtantes quoque *y* et *dy*; vel denique præter conſtantes, *dx* et *ddx*, quoque *dy* et *ddy* complectatur; quo caſu alterum membrum vel ſimilem habere poterit formam, vel etiam functio ſolius *x* per *dx*, vel ſolius *y* per *dy* multiplicata eſſe poteſt, vel quoque formula differentialis utramque variabilem *x* et *y* involvens forma $Pdx + Qdy$. In omnibus hiſce caſibus integrale æquationis in poteſtate eſt: ubi tamen id præterea notandum

dum venit, quod in ejuſmodi æquationibus differentia-libus ſecundi ordinis quovis fere caſu habeatur differentiale primum quoddam conſtans, quod igitur in integrationis negotio non niſi alia conſtans finita conſiderandum eſt.

Sit igitur propoſita haec aequatio differentio-differentialis $\frac{by^m\,dy\,du}{c^m} = 2ayddx + adxdy$, ubi du eſt $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ et $ddu = 0$, ſeu du conſtans. Quodſi hic membrum ſecundum ſeparatim conſidero, quia prius per ſe integrabile eſt, obſervo hanc formulam $2ayddx + adxdy$, ſcriptos loco dx et dt loco ddx fieri $2aydt + atdy$, quae quidem functio per ſe non eſt integrabilis. Inveniretur quidem factor z ex §. 441. per quem multiplicata integrale ſumi poſſet, ſed ad æqualitatem conſervandam etiam prius membrum per z eſſet multiplicandum, tum vero integrale non poſſet capi. Diviſa autem formula $2aydt + atdy$ per 2, ut prodeat $aydt + \frac{1}{2}atdy$, factor, per quem multiplicata integrabilis evadit ex §. 441. invenitur $y^{-\frac{1}{2}}$ per quem ſi quoque prius membrum multiplicetur et ſimul per 2 ad æqualitatem conſervandam dividatur; integrabilitas non tollitur. Proinde multiplico integram æquationem propoſitam per $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$, ut prodeat

$$\frac{by^{m-\frac{1}{2}}dydu}{2c^m} = ay^{\frac{1}{2}}ddx + \frac{1}{2}adxy^{-\frac{1}{2}}dy,$$

cujus integralis igitur erit

$$\frac{by^{m+\frac{1}{2}}du}{2(m+\frac{1}{2})c^m} = ay^{\frac{1}{2}}dx + Cdu.$$

Propoſita jam ſit hæc æquatio $Y = \frac{dx^2 - yddy}{y^3dx^2}$ in qua Y repræſentat functionem quamcunque ipſius y, differentiale vero ydx conſtans eſt. Obſervo hanc æquatio-

ionem ita quoque exprimi poſſe $Y = \frac{dx^2}{y^3 dx^2} - \frac{yddy}{y^3 dx^2} = \frac{1}{y^3} - \frac{ddy}{yydx^2}$. Primum hujus aequatio-
is membrum Y, ut et primum ſecundi membri termi-
num $\frac{1}{y^3}$ obſervo fieri differentiale unius variabilis y,
i per dy multiplicetur. Tum vero ad aequalitatem con-
ervandam etiam ſecundus poſterioris membri terminus
er dy multiplicandus erit, qui tum evadit $dyddy$, et ſi-
mul ob denominatorem $yydx^2$ conſtantem fit integrabi-
s. Multiplicatione igitur per dy inſtituta fit $Ydy = \frac{dy}{y^3} - \frac{dyddy}{yydx^2}$, cujus integrale eſt $\int Ydy = -\frac{1}{2yy} - \frac{dy^2}{yydx^2} + C$. Poterat quoque aequatio differentialis
r $2dy$ multiplicari atque tum integrale ſumi, quod eo-
m redit.

§. 463.

Quodſi praeter differentiale primum et ſecundum
riabilis cujusdam ut dx et ddx, non vero x, occurrat
terius variabilis y quadratum yy, vel cubus y^3 vel alia
teſtas quaecunque y^n, diſpiciendum eſt, utrumne et hu-
s poteſtatis differentiale ut $2ydy$, $3y^2dy$, vel generali-
r $ny^{n-1}dy$ in eadem habeatur. Tum enim poſito z
co y^2 vel y^3, vel generaliter loco y^n, et dz loco
dy, vel $3y^2dy$, vel $ny^{n-1}dy$, reliquis ut ante peractis;
egrale quaeſitum invenietur. Idem obſervandum eſt, ſi
s cum ſuo differentiali $ndx^{n-1}ddx$ in formula adſit. Sic
poſita formula differentiali $\frac{2yydxddx - 2ydydx^2}{y^4}$ ſcri-
s z loco yy, dz loco $2ydy$, t loco dx^2 et dt loco $2dxddx$,
formu-

formula ſic mutatur $\frac{zdt - tdz}{zz}$, cujus integrale eſt $\frac{t}{z}$, et reſtitutis valoribus dx^2 pro t et yy pro z habetur integrale quæſitum $\frac{dx^2}{yy}$. Pari ratione, ſi fuerit propoſita formula $\frac{2ydydx^2 - 2yydxddx}{y^4}$, ejus integrale inveniretur $= -\frac{dx^2}{yy}$. Quoties igitur propoſita ſit æquatio differentialis, quadratum, cubum, vel poteſtatem quamcunque unius variabilis ut y^n et praeterea dy involvens, vel ſolum ddy eo diſpiciendum eſt, ut tali æquationi induatur forma, qua ſi pro y^n ponatur z, et dz pro $ny^{n-1}dy$, et ſi ddy occurrat, poſito t pro dy^n et dt pro $ndy^{n-1}ddy$ aequatio mutetur in differentialem primi ordinis, quam integrare novimus.

Sit propoſita aequatio $Y = \frac{du^2 - yddy}{y^3dx^2}$, in qua Y eſt functio quaecunque ipſius y, du differentiale arcus curvae $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, et dx differentiale conſtans. Subſtituto igitur pro du valore $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ fiet $Y = \frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{y^3dx^2}$. Quodſi haec aequatio multiplicetur per $2ydy$, ut habeatur $2yYdy = \frac{2ydy(dx^2 + dy^2) - 2yydyddy}{y^3dx^2}$; quodſi deinde, quia $dx^2 + dy^2 = du^2$ et dx conſtans, ponatur $2dyddy = 2duddu$ fiet $2yYdy = \frac{2ydydu^2 - 2yyduddu}{y^4dx^2}$, cujus integrale invenitur $\int 2yYdy = \frac{du^2}{yydx^2} + C.$

§. 464

§. 464.

Poſſunt quoque ejusmodi propoſitae eſſe formulae fferentio-differentiales, quae naturam differentialium ium vel plurium induunt variabilium, ſi loco differenlis cujusdam littera quaedam ut z, et loco differentiofferentialis ejusdem dz ponatur, quae tum, ſi integrales ſint, integrantur ſecundum §. 434. Talis eſt haec rmula $\frac{2ydydx^2du^2 + 2y^2du^2dxddx - 2yydx^2duddu}{y^4dx^4}$.

bſervo hic primo quadratum yy et ejus differentiale dy, deinde quadratum dx^2 et differentiale ipſius $2dxddx$, dem et quadratum du^2 et ejus differentiale $2duddu$. no igitur $yy = s$, $2ydy = ds$, $dx^2 = t$, $2dxddx = dt$, $^2 = z$, et $2duddu = dz$; quibus ſubſtitutis formula ſic ntatur $\frac{tzds + szdt - stdz}{sstt}$. Integratione igitur ſecunm §. *cit.* peracta fit integrale $= -\frac{z}{st} + C$, et reſtiis valoribus pro z, s, t, fit integrale quaeſitum $= -\frac{du^2}{dx^2} + C$. Similibus igitur ſubſtitutionibus factis, ſiquam aequationes differentio-differentiales, ad quas oblemata ſolvenda deducunt, ita ſunt transformata ut ismodi ſubſtitutiones patiantur, aliis regulis integrandi quationes differentio-differentiales non opus eſt, niſi iis, ae ſupra pro integrandis aequationibus differentialibus imi gradus ſunt explicatae. Proinde hic quoque ea nt applicanda, quae ſupra de critériis integrabilitatis nt expoſita, et de methodis inveniendi factorem, per em multiplicari debet functio propoſita, ut integrabievadat, ſi prouti propoſita eſt integrabilis eſſe non eniatur. Omnia igitur in hoc negotio eo redeunt, propoſita aequatio differentio-differentialis per idoam transformationem eo reducatur, ut regulae ſupra expo-

expoſitae ad eandem poſſint applicari; quae ipſae transformationes quoad magnam partem ingenio illius ſunt relinquendae, qui problema ſolvere ſuſcipit, cum certae regulae hic quoque tradi nequeant. Adponamus adhuc unicum exemplum, in quo transformatio inſtituenda aliqua ratione differt ab iis, quae in praecedentibus exemplis fuerunt ſuſceptae. Aequatio propoſita ſit ſequens $\frac{yddx - xddy}{dt} = 0$, in qua dt ponitur conſtans. Obſervo, quod ſcripto ds loco ddx, primus terminus numeratoris $yddx$ fiat yds, cui ſi addatur sdy, fiet $yds + sdy$ differentiale ipſius ys, ſeu reſtitutis valoribus dx et ddx pro s et ds fiet $yddx + dydx$ differentiale ipſius ydx. Tribuo igitur aequationi hanc formam $\frac{yddx}{dt} = \frac{xddy}{dt}$, et addo utrinque $\frac{dydx}{dt}$, ut fiat $\frac{yddx + dydx}{dt} = \frac{xddy + dydx}{dt}$, atque utrumque membrum ſimul integrabile redditur. Fiet enim $\frac{ydx}{dt} = \frac{xdy}{dt}$, ſeu $\frac{ydx - xdy}{dt} = C$.

§. 456.

Supra §. 425. explicavimus modum, quo expreſſio differentialis quaecunque, in qua differentiale quodpiam conſtans eſt poſitum, transmutari poſſit in aliam formam, in qua aliud differentiale conſtans aſſumitur. Inſignem haec methodus habet uſum in integrandis aequationibus differentio-differentialibus. Saepe enim aequationis propoſitae integrale inveniri fere nequit, niſi ſi eadem transformetur in aliam formam, in qua aliud quoddam differentiale conſtans aſſumtum eſt. Generale quidem criterium indicari nequit, ut in quovis caſu

illud

lud differentiale diſtinguatur a reliquis, quod conſtans ſſumi debet, ut integrationis negotium facilius abſolvi ueat. Interim complures occurrunt caſus, in quibus aud parum utilitatis habet obſervatio, quae ſequitur. equatione ad eam formam reducta, qua nullum diffe- ntiale ponitur conſtans inquiratur, utrumne in ae- uatione propoſita duo, vel tres, vel plures occurrant rmini, qui ſi per communem factorem, vel diviſorem, ultiplicentur, vel dividantur, evadant integrabiles. uaeratur hoc integrale, quod erit differentiale con- ans aſſumendum. Propoſita ſit aequatio $X =$

$$\frac{dy^3 + dx^2dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3dy^3}$$ reducta ad formam

qua nullum differentiale conſtans eſt. Obſervo, quod 10 termini $dx^2dy + xdxddy$, ſi per dx dividantur, ut beatur $dxdy + xddy$, integrale habeant xdy. Pono igi- r xdy conſtans, ut ſit $xddy + dxdy = 0$, et proinde oque $xdxddy + dydx^2 = 0$, ex quo ſuppoſito fiet $X =$

$$\frac{y^3 - xdyddx}{2x^3dy^3} = \frac{1}{2x^3} - \frac{ddx}{2xxdy^2}.$$ Singuli hujus ae-

uationis termini integrabiles evadunt, multiplicatione r dx facta. Tum enim habetur $Xdx = \frac{dx}{2x^3} -$

$$\frac{xddx}{xdy^2},$$ cujus integralis eſt $\int Xdx = \frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2dy^2}$

C, quia xdy eſt conſtans. Ad idem integrale etiam fic per- nitur. Obſervo, quod termini $dx^2dy - xdyddx$ diviſi per xdy transformentur in $\frac{-dx^2 + xddx}{xx}$, cujus formulæ egrale eſt $\frac{dx}{x}$. Poſito igitur $\frac{dx}{x}$ conſtante fiet $\frac{xddx - dx^2}{xx}$ o, et multiplicando per $-xxdy$, evadit $-xdyddx +$ $dy = 0$. Sublatis igitur terminis hiſce ex aequatione

 pro-

propoſita ea in hanc transformatur $X = \frac{dy^3 + xdxddy}{2x^3dy^3}$ $= \frac{1}{2x^3} + \frac{dxddy}{2x^2dy^3}$. Quodſi hæc æquatio multiplicetur per dx, ut fiat $Xdx = \frac{dx}{2x^3} + \frac{dx^2ddy}{2x^2dy^3}$, quia $\frac{dx}{x}$, et proinde quoque $\frac{dx^2}{xx}$ eſt quantitas conſtans, fiet $\int Xdx$ $= -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2dy^2} + C$, prorſus ut ante.

Si integranda propoſita ſit hæc æquatio $xy(dxddy - dyddx) = ydydx^2 - yydYdy^2 - xdxdy^2$, ubi Y repræſentat functionem quamcunque ipſius y, et nullum differentiale conſtans eſt; in hac æquatione adſunt tres termini $yxdyddx + ydydx^2 - xdxdy^2$, qui diviſi per $yydy$, dabunt differentiale completum $\frac{yxddx + ydx^2 - xdxdy}{yy}$, cujus integrale eſt $\frac{xdx}{y}$. Statuo igitur $\frac{xdx}{y}$ conſtans, quo fit $\frac{xyddx + ydx^2 - xdxdy}{yy} = 0$, et proinde æquatio data transformatur in ſequentem $xydxddy = -yydYdy^2$, ex quo concluditur $dY = \frac{xdxddy}{ydy^2}$. Quia igitur $\frac{xdx}{y}$ eſt conſtans, fiet $Y = \frac{xdx}{ydy} + C$.

§. 466.

Ad ejusmodi æquationes differentiales deducit ſolutio problematum ſequentium, quae adjungenda eſſe arbitramur, quo ea quæ de ejusmodi æquationibus expoſita atque adhuc exponenda ſunt, eo melius intelligentur.

Quæ-

Quaeritur natura curvae AM ejus proprietatis, ut F.296. quadratum ſubtangentis PT ſit ad quadratum applicatae PM ut conſtans E ad arcum AM. Poſitis AP $= x$, PM $= y$, AM $= s$, quia eſt PT $= \frac{ydx}{dy}$, erit $\frac{yydx^2}{dy^2} : yy$ $= a : s$, proinde $dx^2 : dy^2 = a : s$, et $s = \frac{ady^2}{dx^2}$. Poſito nunc dx conſtante habetur $ds = \frac{2adyddy}{dx^2} = \sqrt{}(dx^2 + dy^2)$, proinde $\frac{2adyddy}{\sqrt{}(dx^2+dy^2)} = dx^2$, cujus æquationis differentio differentialis integrale cum dx ſit conſtans facile haberi poteſt. Eſt enim primo $\int dx^2 = xdx$. Deinde poſito $(dx^2 + dy^2) = z$ fiet $2adyddy = dz$, et $2adyddy = dz$. His valoribus ſubſtitutis ex formula $\frac{2adyddy}{\sqrt{}(dx^2+dy^2)}$ $2adyddy\ (dx^2+dy^2)^{-\frac{1}{2}}$ fiet $az^{-\frac{1}{2}}dz$, cujus integrale erit $\frac{1}{2}az^{\frac{1}{2}}$, proinde reſtituto valore ipſius z, invenitur $2a\sqrt{}(dx^2+dy^2) = xdx$. Ut conſtrui poſſit hæc æquatio, ſeparandæ ſunt variabiles, quod in hac æquatione facile ſuccedit. Fiet enim $4aa\,dx^2 + 4aady^2 = xxdx^2$, et $4aady^2 = xxdx^2 - 4aadx^2 = (xx - 4aa)dx^2$, ac denique $2ady = dx\sqrt{}(xx - 4aa)$, ex qua æquatione curva ſic conſtruitur. Ductis normalibus FB, AC, ſumptaque BA $= 2a$, centro A et vertice B deſcribatur hyperbola æquilatera BD, ducaturque AG ipſi BF parallela, erit, ſumto rectangulo AH æquali ſpatio hyperbolico BDI, punctum occurſus E in curva quæſita. F.299.

Quæritur curva AC ejus proprietatis, ut ſit applicata BC ad ſubtangentem, ut quadratum conſtantis E ad aream ACFD, ita ut ſit AD $=$ E. Pono AB $= x$, BC $= y$, ACFD $= s$ E $=$ AD $= a$, erit per conditiones F.296.

problematis $y : \frac{ydx}{dy} = aa : s$, vel $dy : dx = aa : s$, proinde $sdy = aadx$, et ſumtis differentialibus, poſito dy conſtante, $dsdy = aaddx$. Eſt vero $s = ACB + (a - x)y = ACB + ay - xy$, proinde $ds = ydx + ady - xdy - ydx = ady - xdy$; quo valore pro ds ſubſtituto fit $ady^2 - xdy^2 = aaddx$. Quia in hac æquatione dy^2 eſt quantitas conſtans, ſinguli termini integrabiles evadunt, ſi per dx multiplicentur, quo facto habetur $adxdy^2 - xdxdy^2 = aadxddx$, et ſumtis integralibus $axdy^2 - \frac{1}{2}xxdy^2 = \frac{1}{2}aadx^2$, vel $2axdy^2 - xxdy^2 = aadx^2$; atque hæc æquatio mutatur in ſequentem: $dy^2 = \frac{aadx^2}{2ax - xx}$, vel $dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, cujus æquationis conſtructionem dedimus in §. 452.

§. 467.

F. 296. Quaerenda jam ſit natura curvae AC, in qua poſitis $AB = x$, $BC = y$, $AC = s$, $E = a$, fit $adsddx = dy^3$, et differentiale ds conſtans. Quia $ds^2 = dx^2 + dy^2$, et proinde $dx = \sqrt{(ds^2 - dy^2)}$, erit $ddx = -\frac{dyddy}{\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}$, et ſubſtituto hoc valore pro ddx, habetur $dy^3 = -\frac{adsdyddy}{\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}$, vel $dy^2 = -\frac{adsddy}{\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}$. Neutrius membri in hac aequatione ſumi poteſt integrale; quod ſi vero utrumque per dy^2 dividatur, tumque per ds multiplicetur, ut prodeat $ds = -\frac{ads^2ddy}{dy^2\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}$ integrale in poteſtate eſt. Poſito enim z loco dy, habemus $ds = -\frac{ads^2dz}{zz\sqrt{(ds^2 - zz)}}$, cujus integrale, per regulam

...ulam §. 375. traditam invenitur $ſ = \frac{a\,dſ^2\surd(dſ^2 - zz)}{dſ^2 z}$,

...t reſtituto dy pro z habetur $ſ = \frac{a\,dſ^2\surd(dſ^2 - dy^2)}{dſ^2 dy} =$

$\frac{\surd(dſ^2 - dy^2)}{dy}$, proinde $ſdy = a\surd(dſ^2 - dy^2)$, $ſſdy^2$

$= aa(dſ^2 - dy^2)$, $ſſdy^2 + aady^2 = aadſ^2$, $ſſdy^2 + aady^2$

$= aadx^2 + aady^2$, hincque $ſſdy^2 = aadx^2$. Quo hic ...ittera $ſ$ tolli poſſit, id quod ſemper neceſſe eſt, ad cur...ae naturam determinandam, quæro valorem ipſius $dſ^2$, ...ui eſt $= dx^2 + dy^2$. Cum igitur ex æquatione inven... ...i ſit $dy^2 = \frac{aady^2}{ſſ}$, hoc valore pro dy^2 ſubſtituto ha...

...itur $dſ^2 = dx^2 + \frac{aadx^2}{ſſ}$, et $ſſdſ^2 = ſſdx^2 + aadx^2$,

...incque $dſ = \frac{dx\surd(ſſ + aa)}{ſ}$, et $dx = \frac{ſdſ}{\surd(ſſ + aa)}$, hu...ſ æquationis integralis eſt $x = \surd(ſſ + aa)$, ex qua fit

...$= \surd(xx - aa)$, et hinc iterum $dſ = \frac{xdx}{\surd(xx - aa)} =$

...$(dx^2 + dy^2)$. Ex hac aequatione concluditur $\frac{xxdx^2}{xx - aa}$

...$dx^2 + dy^2$, $xxdx^2 = xxdx^2 = xxdx^2 + xxdy^2 - aadx^2$ ...$aady^2$, proinde $xxdy^2 - aady^2 = aadx^2$ et $dy =$

$\frac{adx}{\surd(xx - aa)}$. Eadem hæc aequatio etiam aliter et bre...us ex æquatione $ſſdy^2 = aadx^2$ inveniri poteſt hoc ...odo. Ex æquatione $ſſdy^2 = aadx^2$ habetur $ſ =$ ...$\frac{ax}{...}$. Differentietur hæc æquatio poſito dy conſtante,

...habetur $dſ = \frac{addx}{dy} = \surd(dx^2 + dy^2)$, hincque dy

 =

$= \frac{addx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Aequatio hæc ob dy conſtans integrabilis evadit, ſi multiplicetur per dx, quo facto fit $dxdy = \frac{adxddx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, et ſumtis integrabilibus $xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Ex hac vero concluditur $xxdy^2 = aadx^2 + aady^2$, $(xx - aa)dy^2 = aadx^2$, et proinde $dy = \frac{adx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, ut ante. Conſtruitur hæc æquatio ſuppoſita quadratura hyperbolæ. Multiplicata enim æquatione per conſtantem a, ut prodeat $ady = \frac{aadx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, primo obſervandum eſt, quod, cum x inventum ſit $= \sqrt{(s$ $+ aa)}$, et ideo $x > s$, initium abſciſſarum non cadat in tale axis punctum, ubi idem a curva ſecatur. Poſito enim $s = 0$, fit $x = a$. Si itaque velimus, ut initium abſciſſarum ſit tale axis punctum, ubi a curva ſecatur, loco x ponendum eſt $x + a$, et mutabitur æquatio $ady =$
F.300. $\frac{aadx}{\sqrt{(xx-aa)}}$ in hanc $ady = \frac{aadx}{\sqrt{(2ax+xx)}}$. Ductis nunc normalibus AK, GH, ſeſe ſecantibus in B, ſumatur BA $= a$, et vertice B centroque A deſcribatur hyperbola æquilatera BC. Ducatur recta AC et duplo areae hyperbolicae ABC ſumatur rectangulum AG æquale; erit productis CK et FG, punctum E in curva quæſita.

§. 468.

Prout formularum differentialium, quæ differentialia ſecunda involvunt, integratio pendet a methodis, quibus differentialia prima integrantur; ita quoque formularum differentialium, quæ differentialia tertia et altiora involvunt, integrationem ab iisdem methodis pendere facile oſtenditur. Ratiociniis enim hic opus eſt ſimilibus iis, quibus initio hujus Sectionis uſi ſumus.

Ad-

Adplicemus eadem ad ejusmodi formulas, quæ diffe- rentialia tertia involvunt, eum in reſolutionibus pro- blematum mathematicorum nunquam fere perveniatur ad æquationes differentiales, quæ differentialibus quar- tis vel altioribus implicantur; atque ſi ejusmodi æqua- tiones occurrerent, a ſimilibus principiis earundem in- tegratio penderet. Primo igitur patet, quod propoſita functione ipſius ddx per d^3x multiplicata, in qua dif- ferentiale ddx cum meris conſtantibus quomodocunque combinatum eſt, ſcripto t loco ddx et dt loco d^3x, for- mula differentialis propoſita induat formam differentia- lis unius variabilis, cujus integratio proinde a metho- dis pendeat, quibus formulæ differentiales unius varia- bilis integrantur. Sic ſi propoſita fuerit formula $addx^n\, d^3x$, ſcripto t loco ddx et dt loco d^3x habetur $at^n\, dt$, cujus integrale eſt $\frac{at^{n+1}}{n+1}$ et reſtituto ddx loco t, fit $\frac{addx^{n+1}}{n+1}$ integrale ipſius $addx^n\, d^3x$. Si præter ddx et d^3x adfuerit x et dx, atque formula propoſita reduci queat ad talem formam $Pdx + Qd^3x$, ubi P et Q ſint functiones ipſarum x et ddx, ſubſtitutis t loco ddx, dt loco d^3x, formula propoſita induit formam diffe- rentialis duarum variabilium et proinde integratio per- agitur ſecundum præcepta in §phis 434. ſqq. expoſita. Quodſi in æquatione quadam differentiali occurrat hæc expreſſio $xd^3x + ndxddx$, quæ ſub forma $Pdx + Qdy$ comprehenditur ſcripto dy loco d^3x et y loco ddx, hoc enim facto abit in $xdy + nydx$, ejus integrale per ſe non invenitur, ut patet ex §. 417. Multiplicata vero ea- dem formula per x^{n-1}, qui factor ex §. 441. determina- tur, ut habeatur $x^n\, dy + nyx^{n-1}dx$, ejus integrale eſt $x^n y$. Proinde reſtituto valore ddx pro y, ſi æqualita- te ſervata $xd^3x + ndxddx$ multiplicari poſſit per x^{n-1}, integrale ipſius $x^n\, d^3x + nx^{n-1}dxddx$ fit $x^n\, ddx$. Per

 hæc

hæc ideo integrabitur æquatio $Xdx = \frac{xd^3x + ndxddx}{du^2}$, in qua du eſt conſtans poſitum et X eſt functio ipſius x. Multiplicata enim æquatione per x^{n-1}, ut prodeat $x^{n-1}Xdx = \frac{x^n d^3x + nx^{n-1}dxddx}{du^2}$ habetur $\int x^{n-1}Xdx = \frac{x^n ddx}{du^2} + C$.

§. 469.

Ex his ſimul patet, quomodo operandum ſit, ſi præter ddx et d^3x etiam y et dy, vel dy et ddy vel ddy et d^3y in formula propoſita deprehendatur. Propoſita ſit hæc expreſſio, $\frac{3dyddy\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dxddy} - \frac{d^3y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy^2}$, in qua dx ſupponitur conſtans. Obſervo quod $2dyddy$ ſit differentiale ipſius $dx^2 + dy^2$. Proinde pono $dx^2 + dy^2 = z$, ut fiat $2dyddy = dz$, $dyddy = \frac{1}{2}dz$, et $3dyddy = \frac{3}{2}dz$. Hoc ſubſtituto habetur $\frac{3z^{\frac{1}{2}}dz}{2dxddy} - \frac{d^3y\,z^{\frac{3}{2}}}{dxddy^2}$. Obſervo præterea, quod in hac expreſſione inveniatur ddy et d^3y. Quia igitur dx eſt conſtans, ſi poneretur $dxddy = u$, foret $du = dxd^3y$, et $d^3y = \frac{du}{dx}$. Subſtitutis hiſce, habetur $\frac{3z^{\frac{1}{2}}dz}{2u} - \frac{duz^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$, vel $\frac{3z^{\frac{1}{2}}dz}{2u} - \frac{z^{\frac{3}{2}}du}{uu}$, quia $dxddy = u$. Integrale hujus formulæ ex §. 434 habetur $= \frac{z^{\frac{3}{2}}}{u}$, et reſtitutis dx^2

+

$+dy^2$ pro z et $dxddy$ pro u, integrale quæſitum eſt

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}.$$

§. 470.

Quando in ſolutione problematis ad æquationem [q]uandam differentialibus ſecundis et tertiis implicatam [p]ervenitur, raro integrabilis eſt æquatio ſub ea forma, [s]ub qua eruitur. Tum igitur æquatio transformanda, [a]tque ſic ex utraque parte diſponenda eſt, ut ſimul ex [u]troque membro haberi poſſit integrale. Propoſita ſit [ha]ec æquatio $\frac{dyd^3x - dxd^3y}{du^3} = 0$, in qua du conſtans [ſi]t, ac primo exinde deduco $\frac{dyd^3x}{du^3} = \frac{dxd^3y}{du^3}$. Deinde [ob]ſervo, quod poſito dz loco dd^3x et s loco dy, pri[m]um membrum fiat $\frac{sdz}{du^3}$, quod integrabile fit, addendo [i]i $\frac{zds}{du^3}$, ſeu $\frac{ddxddy}{du^3}$. Poteſt vero expreſſio ſalva ma[ne]nte æquatione priori membro addi, ſi et poſteriori [ſi]mul addatur, atque tum habetur $\frac{dyd^3x + ddxddy}{du^3}$ $= \frac{dxd^3y + ddxddy}{du^3}$. Statim vero patet, utrumque [m]embrum ſimul hoc facto integrabile fieri. Habetur [ig]itur $\frac{dyddx}{du^3} = \frac{dxddy}{du^3}$, vel $\frac{dyddx - dxddy}{du^3} + C = 0$. [Ce]terum hic repetenda ſunt omnia, quæ ſupra Sect. [X]XIV. de transformatione differentialium, et de uſu [ea]rum transformationum in integrationis negotio ſunt [p]oſita, et de modo inveniendi illud differentiale, quod [co]nſtans aſſummi debet, ut integratio eo facilior evadat.

SECTIO XXX.

DE METHODIS QVIBVSDAM INTEGRANDI, QVAE AD AEQVATIONES DIFFERENTIALES TAM PRIMI QVAM ALTIORVM GRADVVM PARI CVM SVCCESSV ADPLICANTVR.

§. 471.

Omnis æquatio differentialis primi gradus, in qu[a] alterutra variabilium deficit, ſequenti methodo in[-] tegrabitur. Si deficiens variabilis ſit x, ponatur $dx =$ $\frac{zdy}{a}$: quo ſubſtituto in æquatione propoſita loco $d[x]$, manifeſtum eſt, æquationem inde ortam diviſibilem [fore] per aliquam poteſtatem ipſius dy, quae in omnibus ter[-] minis deprehendetur eadem, ita ut nullum amplius d[if-] ferentiale in aequatione habeatur. Unde inter z e[t y] proveniet æquatio pure algebraica exprimens natu[ram] alicujus curvæ pariter algebraicae, cujus abſciſſae y et [...] tia curvae iſtis reſpondentia $\int zdy$ diviſa per conſtant[em] a dabunt coordinatas curvae quaeſitae pro conſtructi[one] aequationis differentialis propoſitae. Data ſit aequ[atio] $y^3 dx^5 + aaydx^4 dy = a^5 dy^5$; dono $dx = \frac{zdy}{a}$, quo [va-] lore in aequatione ſurrogata habetur $\frac{y^3 z^5 dy^5}{a^5} + \frac{yz^4 [\ldots]}{[\ldots]}$ $= a^5 dy^5$. Dividatur igitur haec aequatio per dy^5, [et] que proveniet aequatio algebraica $\frac{y^3 z^5}{a^5} + \frac{yz^4}{aa}$ [...]

t^3, vel $y^3z^5 + a^3yz^4 = a^8$. Conſtructa igitur huic F. 299.
aequationi convenienter curva algebraica, in qua HM $= y$, et MA $= z$ fiat MG $=$ ſpatio AMH per conſtantem a diviſo; vel ſimpliciter fiat MG ubique in ratione ſpatii AMH, erit punctum G in curva quaeſita. Poteſt quoque ex aequatione inter y et z inventa elici valor pro dy, isque in aequatione $dx = \frac{zdy}{a}$ ſubſtitui, quo facto ſi reſultet aequatio integrabilis, habetur non tantum aequatio finita inter y et z ſed quoque inter x et t. Proinde elimita z ſi fieri poteſt, vel ſaltem ad communem abſciſſam conſtructis duabus curvis, quarum unius applicatae ſint y alterius x, ad quamvis x habetur valor ipſius y proinde ipſa curva quaeſita.

§. 472.

Hujus rei exemplum ſuppeditat iſta aequatio $ydy^3dx = adx^4 + 2adx^2dy^2 + ady^4$. Quia hic deficit variabilis x, pono $dx = \frac{zdy}{a}$, ex quo fit $\frac{yzdy^4}{a} = \frac{z^4dy^4}{a^3} + \frac{2zzdy^4}{a} + ady^4$, et dividendo per dy^4 habetur $\frac{yz}{a} = \frac{z^4}{a^3} + \frac{2zz}{a} + a$. Ex hac aequatione deducitur $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, et proinde $dy = \frac{3zzdz}{aa} + 2dz - \frac{aadz}{zz}$, quo valore in aequatione $dx = \frac{zdy}{a}$ ſubſtituto habetur $dx = \frac{3z^3dz}{a^3} + \frac{2zdz}{a} - \frac{adz}{z}$; integrata hac aequatione fit $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - alz + C$. Ex duabus hisce aequationibus curva ſic conſtruitur.

F. 295. tur. Ducantur rectae normaliter ſeſe interſecantes AB, CL, atque ad axem AB conſtruatur curva AC cujus aequatio eſt $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, atque ad alteram axis AB partem curva NLM, ex aequatione $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - alz + C$. Habentur ad quamvis $z = AP$ coordinatae curvae quaeſitae $PS = x$, $PM = y$. Ducatur ideo SK ipſi AB parallela, et fiat $OK = PM$, cum ad quamvis $AO = PS = x$ habeatur $OK = PM = y$, erunt puncta K in curva quaeſita.

§. 473.

Methodus hæc uſum adeo generalem habet, ut applicari quoque poſſit ad æquationes differentiales altiorum ordinum. Ac primo quidem applicari poteſt ad æquationes differentiales ordinis ſecundi, ſi una variabilis deficiat, atque in æquatione non niſi ejus differentiale primum et ſecundum habeat locum. Cum in hujusmodi generis aequationibus in regula adſit unum differentiale conſtans; ſtatim patet, ſi talis æquatio non continet niſi dy, ddy et dx conſtans, cum ſit $\frac{dy}{dx} =$ variabili cuidam z, vel quod idem eſt $dy = zdx$, hincque $ddy = dzdx$ introducendo hanc, ipſam z, differentiale ddy tolli. Subſtituto enim $dzdx$ loco ddy manifeſtum eſt, æquationem inde ortam diviſibilem fore per aliquam poteſtatem ipſius dx, quæ in omnibus terminis deprehendetur eadem, ita ut nullum amplius differentiale ſecundum in eadem deprehendatur, unde inter dx et dy invenietur æquatio differentialis primi ordinis. Sit propoſita æquatio $aadxddy^2 = bdx^5 + cdx^2dy^3$, ponatur $dy = zdx$, atque æquatio transformabitur in hanc $aadz^2dx^2 = bdx^5 + cdx^2z^3dx^3$, vel $aadz^2 = bdx^2 + cz^3 dx^2$, quæ eſt æquatio differentialis gradus primi in qua

deficit, quæ igitur modo §. præcedente expoſito conſtruitur. Poſito enim $dx = udz$, fiet $aadz^2 = buudz^2$ $- cz^3uudz^2$, id eſt $aa = buu + cz^3uu$, ex qua fit $z =$

$$\sqrt[3]{\frac{aa - buu}{cuu}} = \frac{(aa - buu)^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{3}}}, \text{ atque } dz = -$$

$$\frac{\frac{2}{3}budu\,(aa - buu)^{-\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}\,u^{\frac{2}{3}}} - \frac{\frac{2}{3}\,c^{\frac{1}{3}}du}{u^{\frac{5}{3}}}, \text{ et } dx = -$$

$$\frac{\frac{2}{3}buudu\,(aa - buu)^{-\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}\,u^{\frac{2}{3}}} - \frac{\frac{2}{3}c^{\frac{1}{3}}udu}{u^{\frac{5}{3}}}.$$

§. 474.

Succedit hæc methodus et in aliis æquationibus, ubi quodcunque aliud differentiale eſt conſtans aſſumtum, qualis eſt hæc æquatio $Yyydydx^2 + duddu = 0$, ubi eſt Y functio ipſius y, $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, et differentiale ydx conſtans, variabilis u vero deficit. Pono $du = zdx$, ex quo fit $ddu = ydzdx$, et facta ſubſtitutione ea aequatio ſic transformatur $Yyydx^2dy + zyydx^2dz =$ vel $Ydy = - zdz$. Hujus æquationis integralis eſt

$$\int Ydy = -\tfrac{1}{2}zz + C. \text{ Eſt vero } zz = \frac{du^2}{yydx^2} =$$

$$\frac{dx^2 + dy^2}{yydx^2} = \frac{1}{yy} + \frac{dy^2}{yydx^2}, \text{ proinde } \int Ydy = -$$

$$\frac{1}{2yy} - \frac{dy^2}{2yydx^2} + C, \text{ ex qua reducta fit } 2yy\int Ydy = -1 -$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} + 2Cyy,\ \frac{dy^2}{dx^2} = 2Cyy - 1 - 2yy\int Ydy \text{ et } \frac{dx^2}{dy^2} =$$

$$\frac{1}{2Cyy - 1 - 2yy\int Ydy}, \text{ ideo } dx = \frac{dy}{\sqrt{(2Cyy - 1 - 2yy\int Ydy)}}.$$

ſimili ratione reducetur atque facta reductione integrabitur

bitur hæc æquatio $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$, in qua $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ eſt conſtans. Poſito $dx = zdu$, ut fiat $ddx = dzdu$, æquatio data in hanc transformatur $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydzdy + azdudy}{dudy} = \frac{2aydz + azdy}{dy}$, vel $\frac{by^m dy}{c^m} = 2aydz + azdy$. Multiplicata hac æquatione per $2y^{-\frac{1}{2}}$ (conf. §. 441.) habemus $\frac{by^{m-\frac{1}{2}}dy}{2c^m} = ay^{\frac{1}{2}}dz + \frac{1}{2}azy^{-\frac{1}{2}}dy$, cujus integralis eſt $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{2(m+\frac{1}{2})c^m} = ay^{\frac{1}{2}}z + C$. Eſt vero $z = \frac{dx}{du}$, proinde $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}du}{2(m+\frac{1}{2})c^m} = ay^{\frac{1}{2}}dx + Cdu$.

§. 475.

In æquatione $Yy^3dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2ddx - ydxduddu$ nullum differentiale eſt conſtans ſuppoſitum, et Y eſt functio ipſius y. Cum igitur perinde ſit, quodnam differentiale conſtans ſtatuatur, ponamus primo dx eſſe conſtans, unde fit $Yy^3dydx^3 = dxdydu^2 - ydxduddu$ vel $Yy^3dydx^2 = dydu^2 - yduddu$. Pono jam $du = zdx$ et $ddu = dzdx$, fietque $Yy^3dydx^2 = zzdydx^2 - yzdzdx^2$ et dividendo per dx^2 habetur $Yy^3dy = zzdy - yzdz = \left(\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}\right) zzy$. Ad integrandam hanc æquationem pono $yt = z$, ut fiat $\frac{y}{z} = \frac{1}{t}$, et $l\frac{y}{z} = l\frac{1}{t}$. Aequatio hæc differentiata dabit $\frac{zdy - ydz}{zz}$:

$= -\frac{dt}{tt} : \frac{z}{t}$, ex qua reducta habetur $\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}$

$= -\frac{dt}{t}$. Surrogatis hisce valoribus in æquatione

$y^3dy = zzdy - yzdz$, ea transmutabitur in ſequen-

m $Yy^3dy = -\frac{dt}{t}y^3t^2$, vel $Ydy = -tdt$, cujus in-

grale eſt $\int Ydy = -\frac{tt}{2} + C$, et poſito iterum $\frac{du}{dx}$

o z, invenitur $\int Ydy = -\frac{du^2}{2yydx^2} + C$.

Quodſi non dx ſed du aſſumta fuiſſet conſtans, quatio propoſita transformata fuiſſet in ſequentem: $y^3dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2ddx$. Poſito igitur $dx =$ u, et $ddx = dzdu$ habemus $Yy^3dyz^3du^3 = zdydu^2$ $ydzdu^2$, vel $Ydy = \frac{zdy + ydz}{y^3z^3} = \frac{dy}{y^3z^2} + \frac{dz}{y^2z^3}$, cu- integrale eſt $\int Ydy = -\frac{1}{2y^2z^2} + C$, et reſtituto pro z, quæſitum integrale hoc erit $\int ydy = -\frac{du^2}{dx^2} + C$, ut ante.

§. 476.

. Quando in æquatione differentio-differentiali pro- ſita utraque variabilis adſit, ſæpenumero tolli poſſunt mini omnes, qui una earum afficiuntur, ſi æquatio ucta ſit ad formam, ubi nullum differentiale conſtans itur, atque tum omnes termini ipſa x vel ipſa y af- i multiplicati ſint per differentiale quoddam ſecun- n. Sumta enim hoc caſu illiusdifferentiali primo ſtante, termini iſti tolluntur, atque iſti tantum re- manent

manent, in quibus deprehenditur variabilis altera. Huc ſpectat iſta æquatio $dx^3 - dxdy^2 = ydxddx + 2xdyddy$. Quodſi in eadem dx ſumatur conſtans, tollitur terminus $ydxddx$, et cum eo variabilis y. Si vero dy ſtatuatur conſtans, terminus $2xdyddy$ et cum eo variabilis x tollitur. Sit igitur dx conſtans, et erit $dx^3 - dxdy^2 = 2xdyddy$. Pono $dy = \frac{pdx}{a}$ et proinde $ddy = \frac{dpdx}{a}$, hisque ſubſtitutis habetur $dx^3 - \frac{p^2dx^3}{aa} = \frac{2xpdpdx^2}{aa}$, hincque concluditur $aadx - ppdx = 2xpdp$, vel $\frac{dx}{x} = \frac{2pdp}{aa - pp}$. Hac æquatione integrata reperitur $lx = l(aa - pp) + lC$, et $x = \frac{Cdx^2}{aadx^2 - aady^2}$, vel $aady^2 = aadx^2 - \frac{Cdx^2}{x}$. Sunt et alii caſus, in quibus ex æquatione propoſita utramque variabilem involvente una earum tolli poteſt per idoneam ſubſtitutionem. Sic in æquatione $x^m ddx = yddy + dy^2 + yydy^2$ poſito $ydy = dz$, unde fluit $yddy + dy^2 = ddz$, et $yydy^2 = dz^2$, habetur $x^m ddx = ddz + dz^2$.

§. 477.

Prouti hæc methodus ſe extendit ad æquationes differentiales ſecundi ordinis, ita quoque applicari poteſt ad æquationes differentiales tertii ordinis, ſi una variabilium x et y deficiat. Quin et accommodari poſſet ad æquationes differentiales quarti ordinis, ſi præter unam variabilium x et y, deficiat una differentialium primarum dx vel dy; ad æquationes differentialis quinti ordinis ſi utraque x et y cum utroque differentiali dx et dy deficiat, ad æquationes differentiales ſexti ordinis, ſi præter

præter hæc quoque unum differentialium ſecundorum ddx vel ddy abſit, et ita porro. Si fuerit propoſita hæc æquatio $dxd^3y + dx^2ddy = dx^4 + dy^4$, in qua dx eſt conſtans. Pono $dy = \frac{pdx}{a}$, et proinde $ddy = \frac{dpdx}{a}$, $d^3y = \frac{ddpdx}{a}$, quibus valoribus ſubſtitutis habetur $\frac{dx^2ddp}{a} + \frac{dx^3dp}{a} = dx^4 + \frac{p^4dx^4}{a^4}$, ex qua fit $\frac{ddp + dxdp}{a} = dx^2 + \frac{p^4dx^2}{a^4}$, quæ eſt æquatio differentialis ſecundi ordinis. Ponatur nunc $dp = \frac{qdx}{b}$, hincque $\frac{dqdx}{b} = ddp$, et ultima æquatio inventa ſic transformatur $\frac{dqdx}{ab} + \frac{dpdx}{a} = dx^2 + \frac{p^4dx^2}{a^4}$, vel $\frac{dq}{ab} + \frac{dp}{a} = dx + \frac{p^4dx}{a^4}$. Eſt vero $dx = \frac{bdp}{q}$, proinde habetur $\frac{bdp + dq}{ab} = \frac{bdp}{q} + \frac{bp^4dp}{a^4q}$, quæ eſt æquatio differentialis ordinis primi.

Sit propoſita æquatio differentialis quarti ordinis $d^4y + dxd^3y - dx^2ddy = 0$, in qua dx eſt conſtans, atque variabiles x, y, cum differentiali primo dy deficiunt. Pono itaque $\frac{pdx}{a} = dy$, erit $\frac{dpdx}{a} = ddy$, $\frac{ddpdx}{a} = d^3y$, $\frac{d^3pdx}{a} = d^4y$. Subſtitutis his valoribus habetur æquatio ſic transformata $d^3p + dxddp - dx^2dp = 0$. Simili operatione repetita hæc quoque æquatio ad differentialem ordinis primi reducitur.

§. 478.

Saepius in reſolutione problematum ad ejusmodi æquationes perducimur, in quibus utraque quidem variabilis deprehenditur, quæ tamen in alias præcedentis formae transformantur, ſi per naturam propoſiti problematis liceat, vel dx vel dy pro conſtante aſſumere, ubi id quidem differentiale conſtans eſt aſſumendum, quod ſub hac hypotheſi efficit, ut omnes termini, in quibus una variabilium x vel y deprehenditur, evaneſcant. Hujus rei ſpecimen exhibet iſta æquatio $dx^3 - dxdy^2 = ydxddx$ $+ 2xdyddy$, ubi vel differentiale dx, vel dy conſtans aſſumere licet. Sub prima hypotheſi eſt $ddx = 0$, et proinde terminus $ydxddx$ tollitur. Sub altera hypotheſi ob $ddy = 0$ tollitur terminus $3xdyddy$. Sit itaque conſtans, ut fiat $dx^3 - dxdy^2 = 2xdyddy$. Pono

$= \frac{pdx}{a}$, erit $ddy = \frac{dpdx}{a}$, et his valoribus ſubſti-

tutis habetur $dx^3 - \frac{ppdx^3}{aa} = \frac{2xpdpdx^2}{aa}$, vel a

$- ppdx = 2xpdp$, atque $\frac{dx}{x} = \frac{2pdp}{aa-pp}$. Cujus in-

tegralis eſt $lx = - l(aa - pp)] + lC$; proinde x

$\frac{C}{aa-pp} = \frac{C}{aa - \frac{aady^2}{dx^2}}$, unde concluditur x

$\frac{Cdx^2}{aadx^2 - aady^2}$, vel $aady^2 = aadx^2 - \frac{Cdx^2}{x}$.

Interdum ſimplici ſubſtitutione æquationes differentiales, ubi utraque variabilis x et y deprehenditur, in eum reducuntur caſum, de quo hic ſermo eſt. Sic propoſita æquatione $x^m ddx = yddy + dy^2 + yydy^2$, ſi natur $ydy = dz$, unde fit $yddy + dy^2 = ddz$, yy $= dz^2$; habebitur æquatio ſic transformata $x^m ddx$

$dz + dz^2$. Sed his quoque generaliores methodi trans
rmandi æquationes differentiales in tales, ubi una va
abilis deficit, tribus potiſſimum caſibus, qui ſequun
ır, in uſum vocari poſſunt.

§. 479.

Primus caſus is eſt, quo æquatio differentialis pro
oſita duobus tantum terminis conſtat, atque ſub iſta
rmula generali comprehenditur $ax^m dx^p - y^n dy^{p-2}$
$dy = 0$ poſito dx conſtante. Ponatur $x = e^{bu}$ et $y =$
$e^u t$, ubi e denotat baſin logarithmorum naturalium, b
antitatem conſtantem, u vero et t duas alias variabi-
s. Proinde ob $x = e^{bu}$ habetur $dx = be^{bu} du$, $ddx =$
be^{bu} $(ddu + bdu^2)$; atque ex $y = e^u t$ deducitur $dy =$
$e^u dt + e^u tdu$, $ddy = e^u (ddt + 2dtdu + tdu^2 + tddu)$.
uia vero dx conſtans ponitur, erit $be^{bu} (ddu + bdu^2)$
$= 0$, quare eſt $ddu = - bdu^2$, quo valore ſubſtituto
$ddy = e^u (ddt + 2dtdu + (1-b)tdu^2)$. Quodſi jam
æquatione propoſita aſſumti valores ipſarum x, y, etc.
bſtituantur; eadem in ſequentem transformabitur
$e^{mbu} b^p e^{bpu} du^p = e^{nu} t^n (e^u dt + e^u tdu)^{p-2} (ddt +$
$2dtdu + (1-b) tdu^2)$, vel $ae^{(m+p)bu} b^p du^p = e^{(n+p-1)u}$
$t^n (dt + tdu)^{p-2} (ddt + 2dtdu + (1-b)tdu^2)$. Jam ne-
tium omne eo redit, ut conſtans b determinetur ſic,
quanta exponentialia ex calculo excedant. Eum vero in
em poni debet $n+p-1 = bm + bp$, unde concluditur
$b = \frac{n+p-1}{m+p}$, quo ſubſtituto ſequentem habemus æqua-
nem transformatam $a \left(\frac{(n+p-1)^p du^p}{(m+p)^p}\right) = t^n (dt$
$+ tdu)^{p-2} (ddt + 2dtdu + \left(\frac{m-n+1}{m+p}\right) tdu^2)$, in qua
iabilis t tantum deprehenditur, altera u deficiente.
ia eſt $b = \frac{n+p-1}{m+p}$; patet, ad transformandam æqua-

 tionem

tionem poni debere $x = e^{\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)u}$ et $y = e^{nu} t$, ubi obſervandum eſt $n+p-1$ eſſe ſummam dimenſionum ipſarum y, dy et ddy, $m+p$ vero ſummam dimenſionum ipſarum x et dx.

§. 480.

Adplicemus nunc ad æquationem transformatam eam quæ §. 471. explicata eſt methodum. Poni itaque debet $du = z dt$, ut ſit $ddu = dz dt + z ddt$. Erat vero ob dx conſtans $ddu = -b du^2$. Subſtitutis itaque valoribus ipſarum b et du ſit $ddu = \frac{1-n-p}{m+p} zz dt^2$. Proinde $\frac{1-n-p}{m+p} zz dt^2 = z ddt + dz dt$, unde concluditur $ddt = \frac{1-n-p}{m+p} z dt^2 - \frac{dt dz}{z}$. His valoribus ipſarum du et ddt in æquatione transformata §. præc. ſubſtitutis invenitur $a\left(\frac{n+p-1}{m+1}\right)^p a z^p dt^p = t^n (dt + z t dt)^{p-2} \times \left(\left(\frac{1-n-p}{m+p}\right) z dt^2 - \frac{dt dz}{z} + z z dt^2 + \frac{m-n+1}{m+p} z z t dt^2\right)$, vel, per dt^{p-1} utrinque dividendo atque per z multiplicando invenitur $\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p z$ $dt = t^n \left((1+tz)^{p-2} \frac{1+2m-n+p}{m+p} zz dt + \frac{m-n}{m+p}\right.$ $\left. t z^3 dt - dz\right)$, quæ eſt æquatio differentialis ordinis primi. Hypotheſis $du = z dt$, et valor inventus

$= \frac{n+p-1}{m+p}$ docent, quod ad æquationem expedite ransformandam poni debeat $x = e^{\frac{n+p-1}{m+1}\int z dt}$, $y = ^{\int z dt} t$, vel, quod eodem redit $x = e^{(n+p-1)\int z dt}$ et $y = ^{(m+p)\int z dt} t$. Tum vero ex æquatione $x = e^{(n+p-1)\int z dt}$ nit $e^{\int z dt} = x^{\frac{1}{n+p-1}}$, et $\int z dt = \frac{1}{n+p-1} lx$, ob $le = 1$, leo $z dt = \frac{dx}{(n+p-1)x}$. Deinde ex æquatione $y = ^{(m+p)\int z dt} t$ concluditur $ly = (m+p)\int z dt + lt$. Subſti- to itaque valore ipſius $\int z dt$, erit $ly = \frac{m+p}{n+p-1} lx +$, et proinde $y = x^{\frac{m+p}{n+p-1}} t$, atque $t = y x^{\frac{-m-p}{n+p-1}}$. Eſt que $dt = x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - \frac{m+p}{n+p-1} y x^{-\left(\frac{m+n+2p-1}{n+p-1}\right)} dx$. ıc autem valore in æquatione $z dt = \frac{dx}{(n+p-1)x}$ ſub- nto fiet $z x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - \frac{m+p}{n+p-1} y z x^{-\frac{m+n-2p-1}{n+p-1}} dx = \frac{dx}{+p-1)x}$, unde concluditur $z =$

$$\frac{dx}{+p-1)x^{\frac{n-m-1}{n+p-1}} dy - (m+p) y x^{-\frac{m-3p}{n+p-1}} dx}.$$

Da- igitur æquatione inter z et t ſimul habetur relatio va- bilium x et y.

 § 481.

§. 481.

Pervenimus ad *caſum ſecundum*, qui locum obtinet, quoties variabiles x et y cum ſuis differentialibus eandem habent numerum dimenſionum in quovis æquationis termino, quemque caſum iſta formula generalis repræſentare poteſt, $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$. Conſtat quidem hæc formula tribus tantum terminis, poteſt autem methodus ad æquationes plurium terminorum facili negotio extendi. Differentiale dx hic iterum conſtans ponitur. Sit itaque $x = e^u$ $y = e^u t$, erit $dx = e^u du$, et $e^u ddu + e^u du^2 = 0$, ob dx conſtans. Proinde $ddu = -du^2$. Præterea eſt $dy = e^u dt + e^u tdu$, $ddy = e^u (ddt + 2dudt + tdu^2 + tddu)$ vel $ddy = e^u (ddt + 2dudt)$, ob $ddu = -du^2$. Subſtitutis his valoribus in formula propoſita, prodit $ddt + 2dudt = at^{-m-1} du^p (dt + tdu)^{2-p} + bt^{-n-1} du^q (dt + tdu)^{2-q}$ ubi variabilis t ſola deprehenditur. Sit itaque $du = zdt$ unde fit $ddu = dzdt + zddt$. Sed $ddu = -du^2 = -zzdt^2$, proinde $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$, unde ſequitur concluditur æquatio $at^{-m-1} z^p dt^p (dt + ztdt)^{2-p} + bt^{-n-1} z^q dt^q (dt + ztdt)^{2-q} = -\frac{dzdt}{z} + zdt^2$, vel $at^{-m-1} z^p dt$ $(1+zt)^{2-p} + bt^{-n-1} z^q dt \times (1+zt)^{2-q} = -\frac{dz}{z} + zdt$ quæ eſt differentialis primi ordinis. Ex his concluditur quod propoſita æquatio expedite ad differentialem primi ordinis reduci queat, ſi ponatur $x = e^{\int zdt}$ atque $y = e^{\int zdt} t$, ex quibus æquationibus concluditur $dx = e^{\int zdt} zdt$ et $dy = e^{\int zdt} dt + e^{\int zdt} ztdt$. Præterea $zddt + dzdt + zzdt^2 = 0$, ob $ddx = 0$, et $ddt = -zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$, unde concluditur $ddy = e^{\int zdt} (zdt^2 - \frac{dzdt}{z})$.

§. 4[illegible]

§. 482.

Tertius caſus is eſt, quo in æquatione propoſita al-rutra variabilis cum ſuis differentialibus in quovis ter-ino eundem habet dimenſionum numerum. Ubi au-m denuo duo caſus diſtingendi veniunt, quorum prior ſt, quando ejus variabilis differentiale conſtans ſumi-r, quæ cum ſuis differentialibus ubivis habet eundem imenſionum numerum; alter vero, quo alterius va-abilis differentiale conſtans ponitur. Incipiamus a ſu priore, quem repræſentet formula generalis Px $y^{m+2} + Qx^{m-n}dx^n\, dy^{m+2-n} = dx^m\, ddy$, ubi P et Q ſunt nctiones ipſius y, et dx conſtans aſſumitur. Ponitur $= e^u$, unde eſt $dx = e^u\, du$, et $ddu = -du^2$. Sub-tutis his valoribus in formula propoſita et dividendo r e^{mu}, qui factor in omnibus deprehenditur terminis, odit æquatio transformata $Pdy^{m+2} + Qdu^m\, dy^{m+2-n} =$ ddy, in qua u non deprehenditur. Pono itaque $= zdy$, erit $ddu = dzdy + zddy$; ſed $ddu = -du^2$, $du^2 = zzdy^2$. Proinde $zddy + dzdy = -zzdy^2$, ue $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$. Subſtitutis his va-ibus prodit $Pdy^{m+2} + Qz^n\, dy^{m+2} = -z^{m+1}\, dy^{m+2} -$ $^{-1}\, dy^{m+1}\, dz$, vel $Pdy + Qz^n\, dy = -z^{m+1}\, dy - z^{m-1}$. Ex his patet, quod præpoſita æquatio ad deſidera-n formam reducatur, ponendo $x = e^{\int zdy}$, unde fit $= e^{\int zdy} zdy$, et $ddx = e^{\int zdy}(dzdy + zddy + z^2dy^2)$, de ob $ddx = 0$ concluditur $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$.

Poſterior caſus repræſentatur formula $Px^m\, dy^{m+1}$ $Qx^{m-n}dx^n\, dy^{m-n+1} = dx^{m-1}\, ddx$, ubi dy eſt conſtans P, Q, ſunt functiones ipſius x. Pono $x = e^u$, erit $= e^u\, du$, $ddx = e^u\,(ddu + du^2)$, quibus valo-us ſubſtitutis iſta habetur transformata. $Pdy^{m+1} +$ $u^n\, dy^{m-n+1} = du^{m+1} + du^{m-1}ddu$. Sit itaque $du =$

 z dy

zdy, erit $ddu = dzdy$, ob $ddy = 0$. His ſubſtitutis et diviſo per dy^m, habetur $Pdy + Qz^n dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$. Ad eandem æquationem pervenitur, ſi ſtatim ab initio ponatur $x = e^{\int zdy}$.

§. 483.

Quodſi integranda proponatur æquatio differentialis variabilium x et y, in qua iſtae variabiles nec multiplicatæ nec diviſæ in ſeinvicem, nec ad aliam dignitatem præter primam evectæ, occurrunt, quamque repræſentare poſſumus iſta formula generali $x = yZ' + Z''$ ſi expreſſiones Z' et Z'' quascunque ipſius $\frac{dx}{dy}$ functiones repræſentant; ſic ratiocinandum eſt. Compendii cauſſa pono $\frac{dx}{dy} = z$, ut Z^{I}, Z^{II} denotent functiones ipſius z. Differentietur æquatio propoſita $x = yZ^{\text{I}} + Z^{\text{II}}$, ut ſit $dx = dyZ^{\text{I}} + ydZ^{\text{I}} + dZ^{\text{II}}$, et ſubſtituto valore $dx = zdy$ fiat $zdy = dyZ^{\text{I}} + ydZ^{\text{I}} + dZ^{\text{II}}$. Unde deducitur $dy(Z^{\text{I}} - z) + ydZ^{\text{I}} + dZ^{\text{II}} = 0$, quae æquatio comparata cum forma æquationis $AXy^{n-q}dy + BX^{\text{I}}y^{n+1-q}dx + CX^{\text{II}}dx = 0$ oſtendit eandem per praecepta §. 460. integrabilem eſſe. Fit enim

$$ye^{\int \frac{dZ'}{Z'-z}} + \int \frac{dZ''}{Z'-z} e^{\int \frac{dZ'}{Z'-z}} = A,$$

ex qua æquatione habetur valor ipſius y per z. Quia praeterea eſt $\frac{dx}{dy} = z$, ideoque $dx = zdy$, et $x = \int zdy$, inveniri quoque poteſt valor ipſius x per z.

Sit itaque nunc $z = \frac{dx}{dy}$; $u = \frac{dz}{dy} = \frac{ddx}{dy^2}$; $r = \frac{du}{dy}$

$\frac{du}{dy} = \frac{d^3x}{dy^3} \ldots\ldots p = \frac{d^n x}{dy^n}; q = \frac{dp}{dy} = \frac{d^{n+1}x}{dy^{n+1}}$. Ac generaliter patet, per eandem methodum integrari æquationem $z = yV' + V''$, ſi V' et V'' denotent functiones ipſius $u = \frac{ddx}{dy^2}$ quascunque, z vero ſit $= \frac{dx}{dy}$, vel generaliter integrationem admittere hanc aequationem, $p = yQ' + Q''$, ſi ſit $p = \frac{d^n x}{dy^n}$, Q' vero et Q'' functiones ipſius $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+2}}$.

§. 484.

Denotet littera z idem, quod ante, ac integranda propoſita ſit æquatio hujus formæ $x^m y^n z^r = V$ exiſtente V functione ipſius $x^q y^s z^t$. Pono $x^q y^s z^t = u$, erit $x = u^{\frac{1}{q}} y^{-\frac{s}{q}} z^{-\frac{t}{q}}$, $x^m = u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{ms}{q}} z^{-\frac{mt}{q}}$. Quia vero $x^m y^n z^r = V$, erit $y^n z^r = \frac{V}{x^m}$. Proinde $y^n z^r = \frac{V}{u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{ms}{q}} z^{-\frac{ms}{q}}} = V u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{mt}{q}}$, et $y^n = V u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{tm-rq}{q}}$, vel $y^{\frac{nq-ms}{q}} = V u^{-\frac{m}{q}} z^{\frac{tm-rq}{q}}$, unde $y = V^{\frac{q}{nq-ms}} u^{\frac{-m}{nq-ms}} z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$, et $x = u^{\frac{1}{q}} z^{-\frac{t}{q}} y^{-\frac{s}{q}} = V^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{n}{nq-ms}} z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$, valore ipſius y

$y^{-\frac{s}{q}}$ ſubſtituto. Sed $dx = zdy$. Valoribus itaque ipſarum dx et dy in ultima æquatione ſubſtitutis reperiuntur conditiones integrabilitatis ſequentem in modum.

Ponatur ad calculum abbreviandum $V^{\frac{q}{nq-mr}} u^{-\frac{m}{nq-ms}} = V''$ et $V^{\frac{s}{nq-ms}} u^{\frac{n}{nq-ms}} = V'$; erit $x = V' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$ et $y V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$. Ob æquationem itaque $dx = zdy$ habemus $d.$ $V' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} = z\, d. V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$, id eſt $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV' + \frac{rs-nt}{nq-ms} V' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z^{\frac{nq-ms+tm-rq}{nq-ms}} dV'' + \frac{tm-rq}{nq-ms} V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$, quae aequatio integrabilis eſt ſub conditionibus, quae ſequuntur.

1) Si $tm - rq = 0$, quia tum $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV' + \frac{rs-nt}{nq-ms} V' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = zdV''$, quæ æquatio integrabilis eſt per §. 460.

2) Si $rs - nt = 0$. Tum enim eſt $V'^{-1} dV' = z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}+1} V''^{-1} dt + \frac{tm-rq}{nq-ms} V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$ per eandem methodum integranda.

3) Si $nq - ms + tm - rq = rs - nt$, quo caſu eſt $\frac{tm-qr}{nq-ms} = \frac{nq-ms+tm-rq}{nq-ms} - 1 = \frac{rs-nt}{nq-ms} - 1$, unde fit $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} V'^{-1} dV' + \frac{rs-nt}{nq-ms} V'^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$ V''

$V'' - {}^{1}dV'' + \left(\frac{rs-nt}{nq-ms} - 1\right) V'' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz$, unde

concluditur $\dfrac{V' - {}^{1}dV - V'' - {}^{1}dV''}{\left(\frac{rs-nt}{nq-ms} - 1\right) V'' - \frac{rs-nt}{nq-ms} V} =$

$\dfrac{z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz}{z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}}$.

Si propoſita ſit iſta æquatio $dx = ax^m y^n dy + px^e y^b dy + fx^g y^l dy +$ etc; pono $x^r y^s = u$, erit $x = u^{\frac{1}{s}} y^{-\frac{r}{s}}$, $dx = \frac{1}{s} y^{-\frac{r}{s}} u^{\frac{1}{s}-1} du - \frac{r}{s} u^{\frac{1}{s}} y^{\frac{r}{s}-1} dy$. Ergo iſta habetur transformata $\frac{1}{s} y^{-\frac{r}{s}} u^{\frac{1}{s}-1} du = \frac{r}{s} u^{\frac{1}{s}} y^{-\frac{r}{s}-1} dy + au^{\frac{m}{s}} y^{-\frac{rm}{s}+n} dy + pu^{\frac{e}{s}} y^{-\frac{re}{s}+b} dy + fu^{\frac{g}{s}} y^{-\frac{rg}{s}+l} dy +$ etc, quæ integrabilis eſt, ſi $-\frac{r}{s} - 1 = -\frac{rm}{s} + n = -\frac{re}{s} + b = -\frac{rg}{s} + l$. Ex æquatione vero $-\frac{r}{s} - 1 = -\frac{rm}{s} + n$ concluditur $-\frac{r}{s} + \frac{mr}{s} = n+1$ proinde $\frac{r}{s} = \frac{n+1}{m-1}$. Ex æquatione $\frac{r}{s} - 1 = -\frac{er}{s}$

$\frac{er}{s} + b$ fluit $\frac{r}{s} = \frac{b+1}{e-1}$ etc. Ideo integratio poſſibilis eſt, ſi $\frac{n+1}{m-1} = \frac{b+1}{e-1} = \frac{l+1}{q-1}$ etc.

Quodſi hic generatim loco x ponatur $\frac{d^n x}{dy^n}$ atque $\frac{d^{n+1}x}{dy^{n+1}}$ loco z vel $\frac{dx}{dy}$, aequationes differentiales inde ortae ſub iisdem conditionibus erunt integrabiles.

§. 485.

Si proponatur aequatio ſequentis formae $x = y^k z^r V + V'$, atque V et V' ſint functiones ipſius $y^p z^n$, quaecunque; pono $y^p z^n = u$, erit $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} = \frac{dx}{dy}$. Ideo $dx = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$. Praeterea $z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{pr}{n}}$, ideo $y^k z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{k-\frac{pr}{n}}$, quare propoſita aequatio ſic transformatur $x = u^{\frac{r}{n}} y^{k-\frac{pr}{n}} V + V'$. Scripto itaque V'' loco $u^{\frac{r}{n}} V$, invenitur $u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy = d(V'' y^{k-\frac{pr}{n}} + V')$, quae integrabitur per §. 460, ſi $-\frac{p}{n} + 1 = k - \frac{pr}{n}$. Poterat quoque ex hypotheſi $y^p z^n =$ deduci $y = u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}}$, $dy = \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1}$

z

$z^{-\frac{n}{p}} du - \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}-1} u^{\frac{1}{p}} dz$. Proinde $dx = z dy =$ $\frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz$. Praeterea $y^k z^r = u^{\frac{k}{p}} z^{-\frac{nk}{p}+r}$, proinde $x = u^{\frac{k}{p}} z^{-\frac{nk}{p}+r} V + V'$. Ponatur $u^{\frac{k}{p}} V = V'''$, erit $dx = \frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz = z^{-\frac{nk}{p}+r} dV''' - \left(\frac{nk}{p} - r\right) V''' z^{-\frac{nk}{p}+r-1} dz + dV'$. Quodſi jam $-\frac{n}{p} + 1 = -\frac{nk}{p} + r$, erit $-\frac{n}{p} = -\frac{nk}{p} + r - 1$; unde habetur $\frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1-1} u^{\frac{1}{p}-1} du - z^{-\frac{n}{p}+1} V''' \cdot 1\, dV''' - dV' = \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}} u^{\frac{1}{p}} dz - \left(\frac{n}{p} - 1\right) V''' z^{-\frac{n}{p}} dz$, vel $z^{-\frac{n}{p}} dz \left(\frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} + \left(1 - \frac{n}{p}\right) V'''\right) + z^{-\frac{n}{p}+1} du \times \left(V'''^{-1} \frac{dV'''}{du} - \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1}\right) - dV'' = 0$; quæ integratur ſecundum præcepta §. *cit.*

Si æquatio propoſita foret hujus formæ $x = y^k z^r V + y^{k'} z^{r'} V' + y^{k''} z^{r''} V'' +$ etc, exiſtentibus V, V', V'' functio-

functionibus ipſius $y^p z^n$; pono $y^p z^n = u$, ut fiat $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$, proinde $dx = z dy = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$; $u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy = d (u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{pr}{n}+k} V + u^{\frac{r'}{n}} y^{-\frac{pr'}{n}+k'} V' + u^{\frac{r''}{n}} y^{-\frac{pr''}{n}+k''} V'' + \text{etc.})$. Ideo propoſita æquatio integrabilis eſt, ſi ſit $-\frac{p}{n} + 1 = -\frac{pr}{n} + k = -\frac{pr'}{n} + k' = -\frac{pr''}{n} + k''$ vel ſi $\frac{p}{n} = \frac{k-1}{r-1} = \frac{k'-1}{r'-1} = \frac{k''-1}{r''-1}$ etc.

In his quoque formulis x generatim denotare poteſt $\frac{d^n x}{dy^n}$ ac z denotare $\frac{d^{n+1} x}{dy^{n+1}}$. Unde patet eaſdem methodos ad æquationes differentiales altiorum graduum quoque extendi.

GEO-

GEOMETRIA SUBLIMIOR.

SECTIO I.

DE RAMIS CURVARUM IN INFINITUM EXTENSIS EORUMQUE ASYMTOTIS.

§. 1.

Omnem æquationem inter coordinatas x et y algebraicam in antecedentibus ita diſtinximus in membra, ut ad ſupremum ſeu primum omnes æquationis termini fuerint relati, in quibus variabiles x et y eandem ſummam dimenſionum, cujus exponens ſit n, teneant. Ad ſecundum vero membrum relati ſunt omnes termini, in quibus variabiles ambæ $n-1$ dimenſiones conſtituunt. Tertium membrum continet eos terminos, in quibus variabilium x et y numerus dimenſionum eſt $n-2$, ſicque porro, donec perveniatur ad ultimum membrum, in quo nulla ineſt dimenſio variabilium x et y, quodque ideo quantitas erit conſtans. Quodſi igitur denotet P membrum primum, ſeu ſupremum Q membrum ſecundum, R membrum tertium, S quartum, et ita porro; erit P functio homogenea n dimenſionum, Q functio homogenea $n-1$ dimenſionum, R functio homogenea $n-2$ dimenſionum, S functio homogenea $n-3$ dimenſionum; ſicque porro, atque æquatio pro linea algebraica ordinis n ſic generaliter poterit exprimi $P + Q + R + S + \text{etc.} = 0$. Jam vero functio P reſolubilis

erit

erit in n factores ſimplices, qui aut omnes erunt reales, aut omnes impoſſibiles, aut ex parte reales, ex parte impoſſibiles.

§. 2.

Ponamus igitur primo, membrum ſupremum P unicum habere factorem ſimplicem realem $ay - bx$, ita ut ſit $P = (ay - bx) M$, exiſtente M functione homogenea variabilium x et y dimenſionum $n - 1$, quæ nullos habeat factores ſimplices reales, et æquatio algebraica pro curva ordinis n ſequentem habebit formam $(ay - bx) M + Q + R + S + \text{etc} = 0$ vel $ay - bx = \frac{-Q - R - S \text{ etc}}{M}$. Quodſi jam vel x, vel y, vel utraque coordinata ponatur infinita $= \infty$, fiet $ay - bx = -\frac{Q}{M}$, quia reliquae fractionis $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$, etc fiunt $= 0$. Erit vero $-\frac{Q}{M}$ functio nullius dimenſionis, ſeu quantitas conſtans, quæ ſi ponatur $= C$, erit $ay - bx = C$. Ex quo patet, ſub hac hypotheſi poſita una coordinata v. g. $x = \infty$ ſimul alteram eſſe infinitam, erit enim $y = \frac{C + bx}{a}$. Porro ex his concluditur, quod portio curvæ in infinitum extenſa ipſa exprimatur per hanc æquationem $ay - bx = C$; quæ cum ſit pro linea recta, hæc linea recta in infinitum producta eſt linea ad quem curva perpetuo adpropinquat, et proinde hæc linea recta erit curvæ propoſitæ *aſymtota*. Appropinquat vero curva ad hanc lineam rectam utrinque in infinitum productam. Quodſi membrum æquationis ſecundum Q deficiat, foret $C = 0$, et proinde $y = \frac{bx}{a}$. Idem eveniet, ſi præter Q etiam R, ſeu aliquod consequ

uentium membrorum deficiat. Hoc igitur quoque caſu, et proinde generaliter, ſi primum æquationis membrum P unicum tantum habet factorem ſimplicem realem, curva aſymtotam habet rectam et duos ramos in infinitum excurrentes. Ex hisce vero ſimul perſpicitur, quod curva nullum plane habeat ramum in infinitum excurrentem, ſi membrum æquationis ſupremum P plane nullos habeat factores ſimplices reales, ſed omnes imaginarios. Denotante enim i ejusmodi factorem imaginarium fiet $iM + Q + R + S +$ etc $= 0$ forma æquationis ex quo fit $i = \frac{-Q - R - S \text{ etc}}{M}$ et una coordinatarum poſita infinita habetur $i = -\frac{Q}{M}$, proinde vel $i = C$, vel $i = 0$, prouti membrum ſecundum Q vel adeſt, vel deficit. Hoc enim caſu membrum ſupremum P ſemper erit infinitum ordinis n quia reſolubile eſt in factores duplices reales formæ $A^2y^2 - 2ABxy \cos\phi + B^2x^2$, ubi nec A nec B poſſunt eſſe $= 0$, qui inde factor eſt $= \infty^2$. Præbet vero æquatio $i = C$, vel $i = 0$, ad abſciſſam x applicatam y impoſſibilem et v. Factor i enim hanc habet formam $qy - p(\cos\phi \pm \sqrt{-1}.\sin\phi)$ ut ſit $qy - p(\cos\phi \pm \sin.\phi\sqrt{-1}) = C$, proinde $y = \frac{p(\cos\phi \pm \sin\phi\sqrt{-1}) + C}{q}$. Ex quo patet ad abſciſſam x infinitam fore y impoſſibilem, etiam C $= 0$. Præterea eſt $\frac{q}{p} = \frac{(\cos\phi \pm \sin\phi\sqrt{-1}) + C}{y}$, p functio duarum ipſius x dimenſionum, q vero unius dimenſionis, ideo $\frac{q}{p}$ functio -1, dimenſionis ipſius formæ $\frac{A}{Bx}$. Ex quibus habetur

$$= \frac{Ay}{B((cos\,\phi \pm fin\,\phi\sqrt{-1})+C}.$$ Quare et applicata y infinitæ reſpondet abſciſſa x impoſſibilis, etiam in caſu, quo $C=0$.

§. 3.

F.301. Ad naturam horum curvæ ramorum penitius indagandam ponamus eſſe $ay-bx$ ejusmodi factorem ſimplicem membri ſupremi P, cui alius æqualis non adſit, ut fiat $P=(ay-bx)M$, eritque M functio homogenea $n-1$ dimenſionum non diviſibilis per $ay-bx$. Quodſi jam fuerit AZ axis, in qua ſumta eſt abſciſſa $AP=x$ et applicata $PM=y$; ſumatur alia recta AX pro axe ſecans priorem in ipſo abſciſſarum initio A ſub angulo XAZ, cujus tangens $=\frac{b}{a}$, cujus proinde ſinus $=\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ et coſinus $=\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Ponatur in eodem axe abſciſſa $AQ=t$ et applicata $QM=u$; ducatur Pg ipſi ... et Pf ipſi t parallela; erit $fin.\,tot:\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}=(AP=x):Pg=Qf=\frac{bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$ et fin. tot : $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}=(AP=x):Ag=\frac{ax}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Deinde fin. tot : $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}=y:Mf=\frac{ay}{\sqrt{(aa+bb)}}$, et fin. tot : $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}=y:Pf=Qg=\frac{by}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Proinde $t=Ag+Qg=\frac{ax+by}{\sqrt{(aa+bb)}}$ et $u=Mf-Qf=\frac{ay-bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Quia igitur eſt $ay-bx=u\sqrt{(aa+bb)}$

ay − bx eſt factor ſupremi membri P, erit ſimul u usdem membri P factor. Ex hiſce praeterea conclu-tur $t = \frac{ax + by}{\sqrt{(aa+bb)}}$, $t\sqrt{(aa+bb)} = ax + by$, et $= \frac{t\sqrt{(aa+bb)} - ax}{b}$. Deinde $u = \frac{ay - bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $(aa+bb) = ay - bx$, et $y = \frac{u\sqrt{(aa+bb)} + bx}{a}$.

eo $\frac{u\sqrt{(aa+bb)}+bx}{a} = \frac{t\sqrt{(aa+bb)}-ax}{b}$, $bu\sqrt{(aa}$ $b) + bbx = at\sqrt{(aa+bb)} - aax$, $(aa+bb)x = (at -$ $)\sqrt{(aa+bb)}$, et $x = \frac{(at - bu)\sqrt{(aa+bb)}}{(aa+bb)} =$ $\frac{at - bu}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Proinde $y = \frac{u\sqrt{(aa+bb)} + \frac{bat - bbu}{\sqrt{(aa+bb)}}}{a}$ $\frac{au+bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Quodſi igitur valores iſti in aequatione + Q + R + S + etc = 0 ſubſtituantur; invenietur atio pro eadem curva ad axem AX relata inter coor-atas t et u, atque ſingula aequationis membra ſequen- induent formam;

$P = \alpha t^{n-1} u + \alpha t^{n-2} u^2 + \alpha t^{n-3} u^3 + \alpha t^{n-4} u^4 + \text{etc.}$

$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2} u + \beta t^{n-3} u^2 + \beta t^{n-4} u^3 + \text{etc.}$

$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \gamma t^{n-5} u^3 + \text{etc.}$

$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \delta t^{n-6} u^3 + \text{etc.}$

$T = \varepsilon t^{n-4} + \varepsilon t^{n-5} u + \varepsilon t^{n-6} u^2 + \varepsilon t^{n-7} u^3 + \text{etc.}$

litterae α, β, γ, δ, ε, etc, vices ſingulorum coeffi-tium ſuſtinent, ut multitudo litterarum evitetur. harum aequationum prima concluditur $\frac{M}{t^{n-1}} = \alpha$

$+\frac{\alpha u}{t}+\frac{\alpha u^2}{t^2}+\frac{\alpha u^3}{t^3}+$ etc. et ex altera fit $\frac{Q}{t^{n-1}}=$

$\beta+\frac{\beta u}{t}+\frac{\beta u^2}{t^2}+\frac{\beta u^3}{t^3}+$ etc. Ex æquatione

$+Q+R+S+$ etc. vero habetur $u=\frac{-Q-R-S-\text{etc}}{M}$.

Poſito nunc $t=\infty$, fient Q et M infinita ordinis $n-1$, R vero ordinis $n-2$, S ordinis $n-3$ etc., atque hæ fra ctiones ad ſuperiorem infiniti ordinem aſcendere n poſſent, ſi vel maxime quis ſtatuere velit, quod poſi $t=\infty$ etiam evadat $u=\infty$. Omni igitur reſpe erunt fractiones $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$, etc $=0$, et fractio $\frac{Q}{M}$ valorem habet finitum. Infinita enim eſſe nequit, n quis ſtatuere velit, eſſe Q infinitum ordine $n-1$ ſupe rius vel M infinitum ordine $n-1$ inferius; quod utr que ſtatui nequit. Proinde poſito $t=\infty$, manet u q titas finita. In caſu igitur, quo $t=\infty$, fit $\frac{M}{t^{n-1}}=\alpha$

$\frac{Q}{t^{n-1}}=\beta$. Cum vero fit $u=-\frac{Q}{M}$; habetur u

$\frac{\beta}{\alpha}$. Ex quo patet, curvam in infinitum prod perpetuo accedere ad rectam axi AX parallelam ab e que intervallo $-\frac{\beta}{\alpha}$ diſtantem, quæ erit curvae aſ tota, oſtenditque, ob unum ſupremi membri facto ſimplicem realem, cui æqualem alium non agnoſcit, c vam habere duos ramos ad utramque axis AX parte infinitum excurrentes.

§. 4.

Poteſt vero natura ramorum hujus curvae ad aſ

toc

otam rectam continuo appropinquantium accurratius
indagari ſequentem in modum. Ponatur $-\frac{\beta}{\alpha}=c$, $u=c$ ſit æquatio definiens aſymtotam rectam axi AX parallelam ab eoque intervallo c diſtantem; erunt æquationes $\alpha u+\beta=o$ et $u-c=o$ identicae, quia utraque poſitionem aſymtotæ definit. Aequatione vero P + Q + R + S + etc $=o$ ſecundum poteſtates ipſius t ordinata, $(\alpha u+\beta)t^{n-1}+(\alpha u^2+\beta u+\gamma)t^{n-2}+(\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+$ $)t^{n-3}$ + etc $=o$, et poſito $t=\infty$, ob $\alpha u+\beta=u-c$, $(u-c)t^{n-1}+(\alpha u^2+\beta u+\gamma)t^{n-2}+(\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+$ $)t^{n-3}$ + etc. $=o$. Captis igitur abſciſſis in ipſa aſymtota recta et proinde poſito $u-c=z$, et ſcripto c loco fiet $zt^{n-1}+(\alpha c^2+\beta c+\gamma)t^{n-2}+(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)t^{n-3}$ etc $=o$, ubi præterquam in primo termino omnes poteſtatum ipſius t coefficientes erunt conſtantes, quos brevitatis gratia litteris A, B, C, etc denotabimus, atque æquatio ſic transformabitur $z=\frac{A}{t}+\frac{B}{tt}+\frac{C}{t^3}+\frac{D}{t^4}+$ etc, quæ æquatio idem oſtendit, quod ante jam invenimus, nimirum eam rectam, in qua nunc abſciſſae t capiuntur eſſe curvae aſymtotam, ad quam eo magis accedit, quo major abſciſſa t capiatur, et poſito $t=\infty$, eſſe z ſeu $u-c=o$. Tribuatur æquationi hac forma $zt=A+\frac{B}{t}+\frac{C}{tt}+\frac{D}{t^3}$; etc. ac pa- , poſito $t=\infty$, fieri $zt=A$, quia reliqui termini ſunt o, quod oſtendit ramum curvæ cum aſymtota recta convergentem, ſimul in infinitum productum accedere ramum hyperbolæ ad eandem aſymtotam deſcriptae, e igitur hyperbola æquatione $zt=A$ expreſſa erit ejusdem curvæ *aſymtota curvilinea.*

§. 5.

Quodſi fuerit $A = o$, hæc aſymtota curvilinea exprimetur æquatione $ztt = B$. Si fuerit quoque $B = o$, curva habebit aſymtotam curvilineam æquatione $zt^3 = C$ expreſſam. Sicque porro concluditur, etiam D, E, etc. exiſtente $= o$. Si omnes coefficientes præter ultimum conſtantem, qui ſit K, deeſſent, foret $zt^{n-1} = K$. Prorſus autem omnes ſi abeſſent; tota æquatio per $u - t$ diviſibilis et proinde ipſa recta æquatione $u - t$ expreſſa curvæ portio eſſet. Patet ex hiſce, quod rami curvæ æquatione $P + Q + R + S + \text{etc.} = o$ expreſſæ, cujus membrum ſupremum P habet unum factorem ſimplicem realem, licet ad eandem rectam aſymtotam convergant, diverſiſſimae tamen naturæ eſſe poſſint. Habet enim ejusmodi ramus ſimul aſymtotam curvilineam æquatione $zt^k = C$ expreſſam, in qua C quamcunque conſtantem, et k quemvis integrum exponente n minorem denotat, qui numerus x modo jam deſcripto invenitur. Quia curva æquatione $zt = C$ expreſſa eſt hyperbola Appolloniana; ob ſimilitudinem omnes curvæ æquatione generali $zt^k = C$ expreſſæ, exiſtente k numero integro poſitivo, dicuntur *curvæ hyperbolicæ*. Omnibus
F. 302. hiſce curvis illud cum hyperbola Apolloniana commune eſt, quod duas habeant Aſymtotas rectas et quatuor ramos in infinitum excurrentes. Sit enim XY aſymtota recta pro axe aſſumta et A initium abciſſarum ducta CD axe adplicatarum, orientur quatuor regiones p, q, r, s.

Sit primum $zt = C$, vel $z = \frac{C}{t}$, quia ſumto t negativo fit quoque z negativa, curva æquatione $P + Q + R + S + \text{etc.} = o$ expreſſa duos habebit ramos in regionibus oppoſitis p et s ad rectam XY convergentes, quorum aſymtotæ curvilineæ ſunt rami hyperbolæ EX et FY. Idem eveniet, ſi k fuerit numerus quicunque impar.

Si

ſi fuerit $k=2$, et proinde $ztt = C$, vel $z = \frac{C}{tt}$; z
perpetuo manet affirmativa, ſive t affirmativa ſive negativa
ſtatuatur. Proinde curva æquatione P + Q + R + S + etc.
expreſſa duos habebit ramos in regionibus p et q ad re-
ctam XY convergentibus, quorum aſymtotæ curvilineæ F.303.
ſunt rami hyperbolæ EX et FY. Idem contingit, ſi k
fuerit numerus par quicunque, hoc tantum diſcrimine,
quod convergentia eo ſit promtior, quo major ſit ex-
ponens k.

§. 6.

Quodſi membrum æquationis ſupremum P binos habeat factores $ay - bx$ inter ſe æquales; ita ut ſit $P = (ay-bx)^2 M$; erit primo $ay - bx = \frac{-Q-R-S \text{ etc.}}{(ay-bx)M}$, $\frac{-Q}{(ay-bx)M} = p$, et proinde iterum $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{p}{ax} = \frac{b}{a}$. Deinde eſt $(ay-bx^2) = -\frac{Q}{M} - \frac{R}{M} - \frac{S}{M} - \frac{T}{M}$ etc. $= -\frac{Q}{M(by+ax)}(by+ax) - \frac{R}{M} - \frac{S(by+ax)}{M} : (by+ax) - \frac{T(by+ax)^2}{M} : (by+ax)^2$ — etc. Sunt vero $\frac{-Q}{M(by+ax)}$, $-\frac{R}{M}$, $-\frac{S:(by+ax)}{M}$, $-\frac{T(by+ax)^2}{M}$, etc. functiones nullius dimenſionis variabilium x et y, quia Q, R, S, T, etc. ſunt functiones $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, etc. dimenſionum. Si igitur poſito x infinito, ratio $\frac{b}{a}$ pro $\frac{y}{x}$ ſeu b pro y et a pro x ſubſtituatur, omnes iſtæ functio-

nes nullius dimenſionis fient quantitates conſtantes. Scri-
ptis itaque harum conſtantium loco litteris A, B, C, D

etc. fiet $(ay-bx)^2 = -A(by+ax) - B - \frac{C}{by+ax}$

$- \frac{D}{(by+ax)} + \frac{E}{(by+ax)^3} -$ etc. Mutato nunc axe

ante et poſito $ay - bx = u\surd(aa+bb)$ et $by+ax=$
$\surd(aa+bb)$, brevitatis gratia ſcripto g loco $\surd(aa+b$
ut ſit $ay - bx = ug$ et $by + ax = tg$, fiet $uugg + $

$+ B + \frac{C}{tg} + \frac{D}{t^2g^2} + \frac{E}{t^3g^3} + \frac{F}{t^4g^4}$

etc. $= 0$. Sive $uu + \frac{At}{g} + \frac{B}{gg} + \frac{C}{g^3t} + \frac{D}{g^4}$

$+ \frac{E}{g^5t^3} + \frac{F}{g^6t^4} +$ etc. $= 0$. Quia igitur

ponimus $t = \infty$ fiet $uu + \frac{A}{g}t + \frac{B}{gg} = 0$, vel

$+ \frac{A}{g} = 0$ quia reliqui termini ſunt $= 0$. Eſt

æquatio $uu + \frac{A}{g}t + \frac{B}{gg} = 0$ pro parabola. Proi

curva habebit duos ramos in infinitum excurrentes, q
rum aſymtota non erit linea recta, ſed parabola. Hæ
vera ſunt, ſi membrum ſecundum non diviſibile ſit pe
$ay-bx$. Sit enim etiam Q per $ay-bx$ diviſibile et ſi
$(ay-bx^2)M + (ay-bx)N + R + S + T +$ etc. $=$
ſi $Q = (ay-bx)N$, et proinde $(ay-bx)^2 = -$

$\frac{(ay-bx)N-R-S-T-\text{etc.}}{M}$, vel $(ay-bx)^2 = -\frac{Q}{M(ay-b}$

$(ay-bx) - \frac{R}{M} - \frac{S(ay-bx)}{M} : ay-bx - \frac{T(ay-}{M}$

$:(ay$

$(ay-bx)$ — etc. vel $(ay-bx)^2 + \frac{N}{M}(ay-bx) + \frac{R}{M} + \frac{S(by+ax)}{M} : (by+ax) + \frac{T(by+ax)^2}{M} : (by+ax)^2$ + etc. $= 0$ et poſito $ay-bx = ug$ et $by+ax = t$ et $uugg + Aug + B + \frac{C}{tg} + \frac{D}{ttgg} + \frac{E}{t^3g^3}$ + etc. quia ſcripto $\frac{b}{a}$ loco $\frac{y}{x}$ fient $\frac{Q}{M(ay-bx)}$, $\frac{R}{M}$, etc quantitates conſtantes: et quia ob $t = \infty$, fient termini $\frac{C}{tg}$, $\frac{D}{tt\,gg}$ et ſequentes $= 0$ habetur $uugg + Atg$ + $B = 0$, vel $uu + \frac{A}{g}u + \frac{B}{gg} = 0$. Haec æquatio vel habet duas radices reales vel imaginarias. Poſteriori caſu curva nullos habet ramos in infinitum extenſos, quia aſymtotæ ſunt imaginariæ. Si radices ſunt reales, ſunt vel æquales, vel inæquales. Habeat primo radices inæquales c et δ, atque curva habet duas aſymtotas rectas axi parallelas æquationibus $u - c = 0$, et $u - \delta = 0$ expreſſas. Ipſorum vero ramorum natura ut ante inveſtigatur ſequenti ratione.

§. 7.

Termini æquationis $P + Q + R + S$ etc. $= 0$, seu $u^2M + Q + R + S$ + etc. $= 0$ ſequentem habent formam.

$$P = \alpha t^{n-2}u^2gg + \alpha t^{n-3}u^3y^3 + \alpha t^{n-4}u^4y^4 + \text{etc.}$$
$$M = \alpha t^{n-2} + \alpha t^{n-3}u + \alpha t^{n-4}u^2 + \text{etc.}$$
$$Q = \beta t^{n-2}ug + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 + \text{etc.}$$
$$N = \beta t^{n-2} + \beta t^{n-3}u + \beta t^{n-4}u^2 + \text{etc.}$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \text{etc.}$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \text{etc.}$$

Proinde habemus $\frac{M}{t^{n-2}} = \alpha + \frac{\alpha u}{t} + \frac{\alpha u^2}{tt} +$ etc. $= \alpha$ quia eſt $u = \infty^{\frac{1}{2}}$ et $t = \infty$, proinde $\frac{u}{t} = 0$

Præterea $\frac{N}{t^{n-2}} = \beta$, $\frac{R}{t^{n-2}} = \gamma$. Ex hiſce fit $A = \frac{N}{M} = \frac{\beta}{\alpha}$, et $B = \frac{R}{M} = \frac{\gamma}{\alpha}$, proinde loco æquationis $uu + \frac{A}{g}u + \frac{B}{gg} = 0$ habemus $uu + \frac{\beta}{\alpha g}u + \frac{\gamma}{\alpha gg} = 0$, vel $\alpha uugg + \beta ug + \gamma = 0$. Fiet itaque $\alpha uugg + \beta ug + \gamma = (u-c)(u-d)$. Ordinetur æquatio P + Q + R + S + etc. = 0 ſecundum poteſtates ipſius t, ut ſit $(\alpha uugg + \beta ug + \gamma)t^{n-2} + (\alpha u^3g^3 + \beta u^2g^2 + \gamma ug + \delta)t^{n-3} + (\alpha u^4g^4 + \beta u^3g^3 + \gamma u^2g^2 + \delta ug + \varepsilon)t^{n-4} +$ etc. $= 0$. Poſito vero $t = \infty$ $\alpha uugg + \beta ug + \gamma = (u-c)(u-d)$ et $u = c$ facta hac ſubſtitutione habetur $(u-c)(c-d)t^{n-2} + (\alpha c^3g^3 + \beta c^2g^2 + \gamma cg + \delta)t^{n-3} + (\alpha c^4g^4 + \beta c^3g^3 + \gamma c^2g^2 + \delta cg + \varepsilon)t^{n-4} +$ etc. $= 0$, vel $(u-c)t^{n-2} + \frac{(\alpha c^3g^3 + \beta c^2g^2 + \text{etc.})}{c-d}t^{n-3} + \frac{\alpha c^4g^4 + \beta c^3g^3 + \text{etc.}}{c-d}t^{n-4} +$ etc. $= 0$ et coefficientibus conſtantibus brevitatis gratia litteris A, B, C, D, etc. notatis habetur $(u-c)t^{n-2} + At^{n-3} + Bt^{n-4} + Ct^{n-5} +$ etc. $= 0$. Niſi igitur ſit $A = 0$, habetur $(u-c)t + A = 0$. Si $A = 0$, erit $(u-c)t^2 + B = 0$, ſi $A = 0$ et $B = 0$, fiet $(u-c)t^3 + C = 0$, et ita porro. Si omnes coefficientes præter ultimum terminum conſtantem, qui ſit K, fuerint $= 0$, erit $(u-c)t^{n-2} + K = 0$. Captis igitur abſciſſis in ipſa aſymtota rectilinea, et poſita proinde $u - c = z$ omnes iſtæ aſymtotæ curvilineae iterum comprehendentur

ſub

ſub forma generali $zt^k + C = 0$, quam §. 5. evolvimus.

§. 8.

Si ambæ radices æquationis $\alpha uugg + \beta ug + \gamma = 0$ fuerint æquales, ut ſit $\alpha uugg + \beta ug + \gamma = (u-c)^2$, poſito $t = \infty$, fiet $(u-c)^2 t^{n-2} + (\alpha c^3 g^3 + \beta c^2 g^2 + \gamma cg + \delta) t^{n-3} + (\alpha c^4 g^4\ \beta c^3 g^3 + \text{etc.}) t^{n-4} + \text{etc.} = 0$, et loco coefficientium conſtantium ſcriptis A, B, C, D, etc. fiet $(u-c)^2 t^{n-2} + At^{n-3} + Bt^{n-4} + Ct^{n-5} + Dt^{n-6} + \text{etc.} = 0$. Prout igitur vel non deſit A, vel non deſit B deficiente A, vel non deſit C deficientibus A et B, ſicque porro, orientur ſequentes æquationes pro aſymtotis $(u-c)^2 t + A = 0$, $(u-c)^2 t^2 + B = 0$ $(u-c)^2 t^3 + C = 0$. uſque ad $(u-c)^2 t^{n-2} + k = 0$, ſi omnes termini præter ultimum conſtantem deficiant. Si etiam ultimus evaneſcat, foret $(u-c)^2 = 0$, proinde linea recta ipſa curvæ portio, et ideo curva complexa. Captis nunc abſciſſis in aſymtota recta et poſito eum in finem $u - c = z$, omnes hæ aſymtotae ſub forma $zzt^k + C = 0$ erunt comprehenſæ, ſi k ſit numerus integer poſitivus $< t^{n-1}$. Harum igitur curvarum rami in infini- F. 305.
tum protenſi ita ſe habebunt. Sit primo $k = 1$, ſeu $zz = \frac{C}{t}$, quia poſita abſciſſa negativa fiet applicata z imaginaria, curva duos habebit ramos EX et FK in regionibus p et r in infinitum excurrentes, quod idem eveniet, ſi fuerit k numerus alius impar. Si vero ſit $k = 2$, ſeu alius par quicunque, iterum diſpiciendum eſt, utrum ſit C quantitas negativa an poſitiva. Priori caſu æquatio realis eſſe nequit, et ideo curva nullum habet ramum infinitum. Poſteriori caſu curva quatuor F. 306.
habebit ramos in infinitum extenſos cum aſymtota XY concurrentes, nimirum EX, FX, GY, et HY in omnibus quatuor regionibus p, q, r, et s diſperſos.

§. 9.

§. 9.

Si fuerit $Q = o$, et proinde $A = o$; inveniretur æquatio $uugg + B = o$, vel $uu + \frac{B}{gg} = o$. Quodſi igitur ſit B quantitas poſitiva, æquatio non habet factores reales, et proinde curva nullos ramos in infinitum extenſos, Quodſi vero B ſit negativa, æquatio $uu - \frac{B}{gg} = o$ duas in ſe complectetur æquationes $u + \frac{\sqrt{B}}{g} = o$ et $u - \frac{\sqrt{B}}{g} = o$, quæ erunt pro duabus rectis axi et proinde inter ſe parallelis, quarum utraque erit curvæ aſymtota, uti caſu præcedente, quo Q habet factorem $ay - bx$. Curva igitur habet quatuor ramos in infinitum extenſos, quorum natura ut ante invenitur. Ponatur brevitatis gratia $\frac{\sqrt{B}}{g} = c$, et quia eſt $B = \frac{\gamma}{a}$, fit $uu + \frac{\gamma}{agg} = o$, ſeu $auugg + \gamma = o$. Hoc igitur caſu debet eſſe $(u + c)(u - c) = auugg + \gamma$, et proinde pertinet ad eum caſum §. præc. ubi æquatio $auugg + \beta ug + \gamma$ habet duas radices reales inæquales, poſito enim $Q = o$, erit $\beta = o$, et ex æquatione $auugg + \beta ug + \gamma = o$, fiet $auugg + \gamma = o$.

§. 10.

Quodſi præter membrum ſecundum Q etiam tertium R ſit $= o$, et proinde præter A quoque $B = o$, ex æquatione $uugg + Aug + B = o$, habemus $uugg = o$ et $uu = o$, quod indicat, diſtantias c et d aſymtotarum axi parallelarum evaneſcere et proinde ipſum axem eſſe curvæ aſymtotam rectam. Idem quoque ex æquatione completa $uugg + Aug + B + \frac{C}{ug} + \frac{D}{uugg}$

$+ \frac{E}{t^3g^3} +$ etc. $= 0$ luculentiſſime ſequitur, quae nunc equentem habet formam $uugg + \frac{C}{tg} + \frac{D}{t^2g^2} + \frac{E}{t^3g^3} + \frac{F}{t^4g^4} +$ etc. $= 0$ vel $uu + \frac{C}{tg^3} + \frac{D}{t^2g^4} + \frac{E}{t^3g^5} + \frac{F}{t^4g^6} +$ etc. $= 0$. Ex ea enim concluditur $uut + \frac{C}{g^3} + \frac{D}{tg^4} + \frac{E}{t^2g^5} +$ etc. $= 0$ ſive $uut + \frac{C}{g^3} = 0$, el $uut = \frac{\pm C}{g^3}$, quae omnino ſubſiſtere poteſt, ob $uu = 0$, et $t = \infty$. Indicat vero haec aequatio, ob $u = \pm \sqrt{\frac{\pm C}{g^3t}}$, ſive C ſit quantitas poſitiva ſive negativa, urvam habere duos ramos ad unam vel alteram axis parm utrinque convergentes. Prorſus idem nunc ſequir ex aequatione $uu + \frac{At}{g} + \frac{B}{gg} + \frac{C}{tg^3} + \frac{D}{t^2g^4} + \frac{E}{t^3g^5} + \frac{F}{t^4g^6} +$ etc $= 0$. Quodſi inſuper fuerit $C = 0$, fiet $uu + \frac{D}{t^2g^4} + \frac{E}{t^3g^5} + \frac{F}{t^4g^6} +$ etc $= 0$.

t proinde $uutt + \frac{D}{g^4} = 0$, quod optime cum primis lculi infinitorum principiis cohaeret, quia nunc eſt $uu = 0^2$. Ex aequatione enim $uut = \frac{C}{g^3}$ poſito $C = 0$ t $uut = 0$, quod ob $t = \infty$ eſſe non poteſt, niſi ſit $u = 0^2$. Quodſi igitur in hoc caſu in aequatione $u = \pm$

$\pm \frac{r \pm D}{ttg_4}$ ſit D quantitas poſitiva, curva habebit quatuor ramos ad axem utrinque et ad utramque partem convergentes. Si vero D ſit negativa, quantitas curva nullum prorſus ramum habebit in infinitum extenſum. Quodſi etiam fuerit D = o, habemus aequationem uu = $\frac{\pm E}{g^2}$, cujus par eſt ratio ac priorum ſicque conſideratio continuanda erit, quoad aequatio P † Q † R † S † etc. = o terminos ulteriores ſuppeditabit.

§. 11.

Poſito nunc, membrum ſupremum habere tres factores ſimplices reales; manifeſtum eſt, ſi iſti factores fuerint inter ſe inæquales, tum de unoquoque valere ea, quae ſupra de unico factore reali ſunt expoſita. Hoc igitur caſu curva habebit ſex ramos in infinitum excurrentes, ad tres lineas rectas aſymtotas convergentes. Si bini factores fuerint æquales, de tertio inæquali idem erit tenendum, quod ante, quod idem etiam ratione factorum æqualium obſervandum eſt. Supereſt itaque iſte tantum caſus, quo omnes tres factores ſunt inter ſe æquales. Sit igitur membrum ſupremum $P = (ay - bx)^3 M$, atque poſito x infinito non poteſt eſſe $ay - bx = \infty$, quia alias foret $(ay-bx)^3 = \infty^3$ et proinde poteſtas infiniti, in quam membrum ſupremum P abit, foret ∞^n, quod eſſe nequit. Proinde $ay - bx$ vel habet valorem finitum vel infinitum ordinis inferioris quam ∞, puta $\infty^{\frac{2}{3}}$, ex quo, ob $ay - bx = \infty^{\frac{2}{3}}$, concluditur

$$ay = bx + \infty^{\frac{2}{3}},\ y = \frac{bx + \infty^{\frac{2}{3}}}{a},\ \text{et}\ \frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{\infty^{\frac{2}{3}}}{x}$$

$$= \frac{b}{a},\ \text{quia}\ \frac{\infty^{\frac{2}{3}}}{\infty} = \frac{1}{\sqrt[3]{\infty}} = o.$$ Jam vero membrum ſecundum Q vel habet eundem factorem $ay - bx$ vel minus

minus. Sit poſterius, atque ex æquatione $(ay - bx)^3$ $M + Q + R + S +$ etc $= 0$ deducitur $(ay - bx)^3 +$ $\frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} +$ etc $= 0$, quae æquatio eadem eſt cum ſequente $(ay-bx)^3 + \frac{Q}{(by+ax)^2 M}(by+ax)^2 +$ $\frac{R}{(by+ax)M}(by+ax) + \frac{S}{M} + \frac{T(by+ax)}{M} : (by +$ $ax) +$ etc. Relata nunc curva ad alium axem et poſito $ay-bx = ug$ et $by+ax = tg$, ut ante; habemus $u^3 g^3 +$ $Agtt + Bgt + C + \frac{D}{gt} + \frac{E}{g^2 t^2} + \frac{F}{g^3 t^3} +$ etc, quia functiones nullius dimenſionis ipſarum x et y, $\frac{Q}{(by+ax)^2 M}(by+ax)^2$, $\frac{R}{(by+ax)M}(by+ax)$ etc, poſito $\frac{1}{}$ loco $\frac{y}{x}$ abeunt in quantitates conſtantes A, B, C, etc. Concluditur vero ex iſta æquatione porro $u^3 +$ $\frac{A}{g}tt + \frac{B}{gg}t + \frac{C}{g^3} + \frac{D}{g^4 t} + \frac{E}{g^5 t^2} + \frac{F}{g^6 t^3} +$ etc, ex qua fit $\frac{u^3}{tt} + \frac{A}{g} + \frac{B}{ggt} = \frac{C}{g^3 tt} +$ etc $= 0$, quae eſt $\frac{u^3}{tt} + \frac{A}{g} = 0$, quia ſequentes termini omnes poſito $t = \infty$ ſunt $= 0$. Curva igitur tertii ordinis æquatione $\frac{u^3}{tt} + \frac{A}{g} = 0$ expreſſa eſt curvæ æquationis $M + Q + R + S +$ etc $= 0$ aſymtota, cujus talis eſt figura, ut abſciſſis t ſuper axe XY a puncto A ſumtis, duos habeat ramos E et F in regionibus p et q in infinitum extenſos.

§. 12.

§. 12.

Quodſi membrum ſecundum Q habeat factorem $ay-bx$; vel ſimul factorem $(ay-bx)^2$, adgnoſcit, vel ſecus. Sit tantum diviſibile per $ay-bx$, atque ſequens membrum R vel factorem $ay-bx$ adgnoſcit, vel ſecus. Priori caſu habemus aequationem $(ay-bx)^3 +$

$$\frac{Q}{(ay-bx)(by+ax)M} \times (ay-bx)(by+ax) +$$

$$\frac{R}{(ay-bx)M}(ay-bx) + \frac{S}{M} + \text{etc}$$, vel poſito $\frac{b}{a} = h$

$\infty \frac{y}{x} | (ay-bx)^3 + A(ay-bx)(by+ax) + B(ay-bx)$

$+ G +$ etc. Poſteriori caſu loco $\frac{R}{(ay-bx)M}(ay-$

retineatur $\frac{R}{(by+ax)M} \times (by+ax)$. Proinde per... tatis coordinatis ut ante, habemus duas æquationes $u^3 + Aggut + Bgu + C + \text{etc} = 0$ et $g^3u^3 + Aggut + B$

$C + \text{etc} = 0$, vel $u^3 + \frac{A}{g}ut + \frac{B}{gg}u + \frac{C}{g^3} +$

$= 0$ et $u^3 + \frac{A}{g}ut + \frac{B}{gg}t + \frac{C}{g^3} + \text{etc} = 0$, ex q

bus fiet priori caſu $\frac{u^3}{t} + \frac{A}{g}u + \frac{B}{ggt}u + \frac{C}{g^3u}$

etc $= 0$, ſive $\frac{u^3}{t} + \frac{A}{g}u = 0$, quia reliqui ter

mi omnes ſunt $= 0$, ob u vel finitum, vel infinitum dinis inferioris quam t. Hæc vero æquatio duplic

præbet aſymtotam, nempe $u = 0$ et $\frac{uu}{t} + \frac{A}{g} =$

alteram rectam, alteram parabolam. Poſteriori caſ

æq

quatione $u^3 + \frac{A}{g}ut + \frac{B}{gg}t + \frac{C}{g^3} +$ etc $= 0$ ha-

tur $\frac{u^3}{ut} + \frac{A}{g} + \frac{B}{ggu} + \frac{C}{g^3ut} +$ etc $= 0$. Si igi-

r u habet valorem infinitum, habetur $\frac{u^2}{t} + \frac{A}{g} =$

pro parabola. Si vero u eſt finitum, habetur $\frac{A}{g} + \frac{B}{ggu}$

0, ſeu $u = -\frac{B}{Ag}$ pro linea recta.

§. 13.

Quodſi membrum aequationis ſecundum Q habeat ctorem $(ay - bx)^2$, prout R vel per $ay - bx$ ſit divi- ile vel non, iisdem quibus ante operationibus inſtitu- prodeunt inter t et u ſequentes duae aequationes $u^3 +$ $\frac{A}{g}u^2 + \frac{B}{gg}u + \frac{C}{g^3} = 0$, et $u^3 + \frac{A}{g}u^2 + \frac{B}{gg}t =$ Prior caſus eſt pro tribus lineis rectis inter ſe pa- llelis, ſi omnes aequationis $u^3 + \frac{A}{g}u^2 + \frac{B}{gg}u + \frac{C}{g^3} = 0$ radices fuerint reales, vel pro unica recta aſymto- ſi duae radices fuerint imaginariae. Poſterior aequatio $+ \frac{A}{g}u^2 + \frac{B}{gg}t = 0$, vel $\frac{u^3}{t} + \frac{Au^2}{gt} + \frac{B}{gg} = 0$, tum habere nequit; ſi u valorem habeat finitum, quia let $\frac{B}{gg} = 0$, quod impoſſibile. Si vero u habet valorem p. 307. m infinitum ∞, fiet $\frac{u^2}{t} = 0$, proinde $\frac{u^3}{t} + \frac{B}{gg}$ 0, aequatio pro aſymtota curvilinea ordinis tertii, quae

 in

regionibus oppoſitis p et s duos habet ramos AE et AF in infinitum extenſos. Cum igitur in eo caſu, quo membrum æquationis ſupremum P habet tres factores æquales, curva quoque habere poſſit aſymtotas rectas; naturam ramorum curvæ cum hiſce rectis aſymtotis convergentium ulterius ſcrutari conveniet. Singulos itaque caſus ante evolutos ubi aſymtotae ſunt rectae ſigillatim perpendemus.

§. 14.

Habeat itaque primo membrum ſecundum Q factorem $ay-bx$, non vero tertium R, ita ut ſit $Q=(ay-bx)N$, vel ugN, atque membra æquationis $P+Q+R+S+$ etc $=0$, ſequentes habebunt formas.

$P=\alpha t^{n-3}u^3g^3+\alpha t^{n-4}u^4g^4+\alpha t^{n-5}u^5g^5+\alpha t^{n-6}u^6g^6+$ etc.

$M=\alpha t^{n-3}+\alpha t^{n-4}ug+\alpha t^{n-5}u^2g^2+\alpha t^{n-6}u^3g^3+$ etc.

$Q=\beta t^{n-2}ug+\beta t^{n-3}u^2g^2+\beta t^{n-4}u^3g^3+\beta t^{n-5}u^4g^4+$ etc.

$N=\beta t^{n-2}+\beta t^{n-3}ug+\beta t^{n-4}u^2g^2+\beta t^{n-5}u^3g^3+$ etc.

$R=\gamma t^{n-2}+\gamma t^{n-3}ug+\gamma t^{n-4}u^2g^2+\gamma t^{n-5}u^3g^3+$ etc.

Hoc vero caſu, eſt $g^3u^3+Aggut+Bgt+C+$ etc $=$ [illegible] atque ſi u infinitum, $\frac{u^2}{t}+\frac{A}{g}=0$ pro parabola [illegible] vero u finitum, $u+\frac{B}{Ag}=0$ pro linea recta. Habemus autem $A=\frac{Q}{uggM}$ et $B=\frac{R}{tgM}$, $\frac{Q}{t^{n-2}}=\beta ug$, [illegible] $\frac{Mt}{t^{n-2}}=\alpha$, proinde $\frac{Q}{Mt}=\frac{\beta ug}{\alpha}$, et $A=\frac{\beta}{\alpha\gamma}$. [illegible] inde eſt $\frac{R}{t^{n-2}}=\gamma$ et $\frac{Mt}{t^{n-2}}=\alpha$, proinde $\frac{R}{Mt}=\frac{\gamma}{\alpha}$, et $\frac{R}{Mt}=\frac{\gamma}{\alpha}$. Hinc $B=\frac{R}{Mtg}=\frac{\gamma}{\alpha g}$, [illegible]

deducitur $\frac{B}{A} = \frac{\gamma}{ag} : \frac{\beta}{ag} = -\frac{\gamma}{\beta}$ et $\frac{B}{Ag} =$

$\frac{\gamma}{\beta g}$ et $\frac{B}{Ag} = \frac{\gamma}{\beta g}$, atque ex æquatione $u + \frac{B}{Ag} = 0$

$u + \frac{\gamma}{\beta g} = 0$, ſeu $\beta g u + \gamma = 0$. Ponatur $-\frac{\gamma}{\beta g}$

c, ut ſit $u = c$, ſeu $u - c = 0$, æquatio cum hac $\beta g u$ $\gamma = 0$ identica, erit c intervallum quo hæc aſymtota ab axe abſciſſarum t diſtat. Quodſi jam æquatio $+ Q + R + S +$ etc $= 0$ ordinetur ſecundum poteſta- ipſius t, fiet $(\beta g u + \gamma) t^{n-2} + (\alpha g^3 u^3 + \beta u^2 g^2 + \gamma u g$ $) t^{n-3} + (\alpha u^4 g^4 + \beta g^3 u^3 + \gamma u^2 g^2 + \delta u g + \epsilon) t^{n-4} +$ $= 0$. Poſito itaque $g = \infty$, habetur $(\beta g u + \gamma) = u$. et ſcripto proinde in coefficientibus poteſtatum ip- t, c loco u, fient iſti conſtantes, et curva exprime- hac æquatione $(u - c) t^{n-2} + A t^{n-3} + B t^{n-4} + C t^{n-5} +$ t^{n-6} + etc $= 0$, et captis abſciſſis in ipſa aſymtota, i. e. ſcripto z loco $u - c$, fiet $z t^{n-2} + A t^{n-3} + B t^{n-4} + C t^{n-5} +$ t^{n-6} + etc, unde habentur æquationes $zt + A = 0$, zt $B = 0$, $zt^3 + C = 0$, usque ad $zt^{n-2} + K = 0$, prou- vel A non $= 0$, vel $A = 0$, non evaneſcente B, vel B 0, non exiſtente $C = 0$, et ita porro. Ex quibus æquationibus natura ramorum cum aſymtota recta con- vergentium cognoſcitur.

§. 15.

Secundus caſus erat is, quo Q per $(ay - bx)^2$ et R $(ay - bx)$ diviſibile deprehenditur, quo caſu eſt $g^3 x^3$ $A g g u u + B g u + C = 0$. Conſtantes A, B, C, ex for- æquationis P + Q + R + S + etc $= 0$ generali, modo orſus ſimili ei, quo in præcedentibus ſumus uſi, de- minabuntur. Erunt enim formæ ſingulorum hujus æquationis terminorum ſequentes. Quia eſt Q diviſibi- per $(ay - bx)^2$, ponatur $Q = (ay - bx)^2 N$, et quia R

 divi-

diviſibile per $ay - bx$, ſit $R = (ay - bx)L$, atque ex æquatione $(ay - bx)^3 M + (ay - bx)^2 N + (ay - bx)L + S + T +$ etc $= 0$ fiet iſta $(ay - bx)^3 + \frac{(ay - bx)^2 N}{M} + \frac{(ay - bx)L}{M} + \frac{S}{M} + \frac{T}{M} +$ etc $= 0$, ubi ſunt $\frac{N}{M}$, $\frac{L}{M}$, $\frac{S}{M}$, functiones nullius dimenſionis variabilium x, et y, quae poſita ratione $\frac{b}{a}$ loco rationis $\frac{y}{x}$ fiunt quantitates conſtantes A, B, C. Habemus igitur $T =$
$\alpha t^{n-3} u^3 g^3 + \alpha t^{n-4} u^4 g^4 + \alpha t^{n-5} u^5 g^5 + \alpha t^{n-6} u^6 g^6 +$ etc.
$M = \alpha t^{n-3} + \alpha t^{n-4} ug + \alpha t^{n-5} u^2 g^2 + \alpha t^{n-6} u^3 g^3 +$ etc.
$Q = \beta t^{n-3} u^2 g^2 + \beta t^{n-4} u^3 g^3 + \beta t^{n-5} u^4 g^4 + \beta t^{n-6} u^5 g^5 +$ etc.
$N = \beta t^{n-3} + \beta t^{n-4} ug + \beta t^{n-5} u^2 g^2 + \beta t^{n-6} u^3 g^3 +$ etc.
$K = \gamma t^{n-3} ug + \gamma t^{n-4} u^2 g^2 + \gamma t^{n-5} u^3 g^3 + \gamma t^{n-6} u^4 g^4 +$ etc.
$L = \gamma t^{n-3} + \gamma t^{n-4} ug + \gamma t^{n-5} u^2 g^2 + \gamma t^{n-6} u^3 g^3 +$ etc.
$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} ug + \delta t^{n-5} u^2 g^2 + \delta t^{n-6} u^3 g^3 +$ etc.

Ex his concluditur $\frac{N}{t^{n-3}} = \beta$, $\frac{L}{t^{n-3}} = \gamma$, $\frac{S}{t^{n-3}} = \delta$, $\frac{M}{t^{n-3}} = \alpha$, proinde $\frac{N}{M} = \frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{L}{M} = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{S}{M} = \frac{\delta}{\alpha}$ hincque ex æquatione $g^3 u^3 + Agguu + Bgu + C = 0$ fiet $g^3 u^3 + \frac{\beta}{\alpha} gguu + \frac{\gamma}{\alpha} gu + \frac{\delta}{\alpha}$, vel $\alpha g^3 u^3 + \beta gguu + \gamma gu + \delta = 0$, quae unam vel tres aſymtotas rectas inter ſe parallelas exhibet, niſi duæ vel omnes hujus æquationis radices ſint æquales, quo caſu vel duæ vel omnes in unam coincidunt. Sit igitur primo c radix hujus æquationis, cui æqualem aliam non habet, ut fiat $\alpha u^3 g^3 + \beta u^2 g^2 + \gamma ug + \delta = (u - c)(fu^2 g^2 + gu + h)$, atque ex quo

tione $P + Q + R + S +$ etc. $= 0$ ſecundum poteſta-
ipſius x ordinata atque ubique poſito $u = c$, factore
$-c$ excepto, invenietur hujusmodi æquatio $(u-c)t^{n-3}$
$At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} +$ etc $= 0$, unde concludun-
tur æquationes formae $(u-c)t^k = K$ exiſtente k nume-
ro minore quam $n-2$.

§. 16.

Quodſi duæ æquationis $\alpha u^3 g^3 + \beta u^2 g^2 + \gamma u g +$
$= 0$ radices fuerint æquales, ita ut ſit $\alpha u^3 g^3 + \beta u^2 g^2 +$
$\gamma g + \delta = (u-c)^2 \times (fu+g)$; ex æquatione $P + Q +$
$+ S +$ etc $= 0$ ſecundum poteſtates ipſius t ordinata
oſito ubique c loco u excepto $(u-c)^2$, invenitur æqua-
o $(u-c)^2 t^{n-3} + At^{n-4} + Bt^{n-5} +$ etc $= 0$, ex qua ite-
um concluduntur æquationes formæ $(u-c)^2 t^k = K$, exi-
ente k numero minore quam $n-2$. Reſtat caſus, quo
mnes æquationis $\alpha u^3 g^3 + \beta u^2 g^2 + \gamma u g + \delta = 0$ radi-
s reales inter ſe ſunt æquales, ex quo eodem modo ut
ite obtinetur æquatio $(u-c)^3 t^{n-3} + At^{n-4} + Bt^{n-5} +$
$t^{n-6} +$ etc $= 0$, atque hinc ejusmodi habentur æqua-
nes $(u-c)^3 t + A = 0$, $(u-c)^3 t^2 + B = 0$ uſque ad
$-c)^3 t^{k-3} + K = 0$, prout vel non $A = 0$, vel ſolum
$= 0$, vel A et $B = 0$, et ita porro. Præbet autem F. 302.
uatio $(u-c)^3 t^k + K = 0$, ſeu poſito $u - c = z$, iſta

$$= \frac{K}{t^k},$$ ſi k ſit numerus impar, duos ramos EX et FY

regionibus oppoſitis P et S extenſos. Si autem k ſit
merus par, orientur duo rami EX et FY ad eandem F. 303.
mtotæ rectae XY partem excurrentes. Quando ae-
tionis $P + Q + R + S +$ etc $= 0$ membrum ſecun-
m, tertium et quartum eſt $= 0$, et proindè in æqua-
ne $u^3 g^3 + Au^2 g^2 + Bug + C = 0$ et $A = 0$, $B = 0$ $C = 0$;
t $u^3 g^3 = 0$, id eſt omnes tres aſymtotae rectilineae in
m abſciſſarum t indicunt, et ramorum ad eundem
vergentium natura concluditur ex æquatione gene-

 rali

rali $u^3 + \frac{A}{g}u^2 + \frac{B}{gg}u + \frac{C}{g^3} + \frac{D}{g^4t} + \frac{E}{g^5t^2}$ $\frac{F}{g^6t^3}$ + etc = o, quae nunc mutatur in ſequentem u^3

$$\frac{D}{g^4t} + \frac{E}{g^5t^2} + \frac{F}{g^6t^3} + \frac{G}{g^7t^4} + = o,$$ ex qua niſi

$D \gtrless o$, habetur $u^3t + \frac{D}{g^4} = o$; ſi $D = o$, fit u^3t $\frac{E}{g^5} = o$; ſi quoque $E = o$, habetur $u^3t^3 + \frac{F}{g^6} = o$, ita porro. Iſtae aequationes, quia ineſt poteſtas im u^3, ſemper ſunt reales, ideoque certo ramos in infi tum extenſos indicant. Ex omnibus, quae hucu ſunt expoſita, ſatis patet, quomodo ulterius progr poſſemus, ſi plures factores ſimplices ſupremi me inter ſe fuerint aequales. Quod adtinet ad factore aequales, eorum quisque ſeorſim conſiderari atque nea recta aſymtota una cum natura ramorum ad ea convergentium definiri poteſt. Si duo factores fue aequales, per antecedentia inveniri poteſt curvae i les. Caſum, quo tres factores ſunt aequales modo ſideravimus; ex quo ſimul perſpicitur, quemadmo aſymtotarum forma, ſi quatuor pluresve factores plices in membro aequationis ſupremo fuerint aequ inveſtigari debeat.

§. 17.

Colligimus vero ex omnibus hiſce, quae de ra ramorum in infinitum extenſorum evolvimus, quidam eorum ad lineam aliquam rectam tanquam a totam convergant, uti fit in hyperbola, vel aſymt rectam non habeant, uti parabola. Priori caſu curvarum vocantur *hyperbolici*, poſteriori vero *pa lici*. Utriusque claſſis innumerabiles dantur ſpe Ramorum hyperbolicorum ſpecies ſequentibus e

mu

puntur aequationibus inter coordinatas t et u, ſi ſtatuatur $t = \infty$,

$ut = A \quad ut^2 = A \quad ut^3 = A \quad ut^4 = A$ etc

$u^2t = A \quad u^2t^2 = A \quad u^2t^3 = A \quad u^2t^4 = A$ etc

$u^3t = A \quad u^3t^2 = A \quad u^3t^3 = A \quad u^3t^4 = A$ etc

etc. etc etc etc

ramorum parabolicorum ſpecies ſequentibus indicantur aequationibus inter t et u, ſi $t = \infty$.

$$\frac{u^2}{t} = A,\ \frac{u^3}{t} = A,\ \frac{u^4}{t} = A,\ \frac{u^5}{t} = A,\ \text{etc}$$

$$\frac{u^3}{t^2} = A,\ \frac{u^4}{t^2} = A,\ \frac{u^5}{t^2} = A,\ \frac{u^6}{t^2} = A,\ \text{etc}$$

$$\frac{u^4}{t^3} = A,\ \frac{u^5}{t^3} = A,\ \frac{u^6}{t^3} = A,\ \frac{u^7}{t^3} = A,\ \text{etc.}$$

etc etc etc etc

Id enim notandum eſt, quod ob analogiam aequationis generalis $u^m t^n = A$ cum aequatione pro hyperbola Apolloniana $ut = A$, omnes curvae ejusmodi aequatione expreſſae dicantur *hyperbolae* et quidem ordinis $m+n$. Sic ut ob analogiam aequationis generalis $\frac{u^m}{t^n} = A$ cum aequatione $\frac{uu}{t} = A$, quae eſt pro parabola Apolloniana, omnes curvae ejusmodi aequatione expreſſae dici ſolent *parabolae*, et quidem ordinis m, quia aequatio quoque ſequentem habere poteſt formam $u^m = At^n$ ita quidem, ut ſit $m > n$. Litterae m et n hic repreſentant numeros integros poſitivos, atque tam aequatio pro hyperbolis quam parabolis ſuperiorum ordinum repreſentari poteſt ſub hac forma generali $u = At^{\frac{n}{m}}$ ſi n tam integrum negativum, quam poſitivum denotare ponatur, ubi prior caſus eſt pro hyperbolis, poſterior vero pro

 para-

parabolis. Quaelibet autem aequationum, quae ſub hac formae generali continentur, ad minimum duos exhibet ramos in infinitum extenſos, ſi exponentium variabilium t et u non uterque fuerit numerus par. Si vero tam m quam n fuerit numerus par, vel nullum ramum infinitum praebet, vel quatuor, prout aequatio ſit impoſſibilis vel realis.

* * * * * * * * * * * * * * * *

SECTIO II.

DE DIVERSIS LINEARVM TERTII ORDINIS SPECIEBVS.

§. 18.

Naturam atque numerum ramorum in infinitum extenſorum merito eſſentiale linearum curvarum diſcrimen cenſeri ſupra jam monuimus. Proinde ex hoc fonte ſummo cum jure deſumitur ratio ſubdiviſionis linearum cujusque ordinis in ſuas ſpecies diverſas. Ex hoc fundamento enim primo reſultat ipſa illa diviſio linearum ſecundi ordinis in ſuas ſpecies. Quando nimirum ſupremum membrum aequationis pro lineis ſecundi ordinis generalis $\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$ nullos habeat factores ſimplices reales, curva nullos habet ramos infinitos, atque exinde naſcitur prima ſpecies, quam *ellipſin* vocavimus, ad quam ſimul *circulus* pertinet. Quodſi duo ſupremi membri factores fuerint reales et inaequales, curva erit *hyperbola*, quae duas habet aſymtotas rectas et quatuor ramos infinitos; ſi vero duo factores aequales ſint, curva erit *parabola*. Modo huic prorſus ſimili ſubdividi poſſunt lineae algebraicae tertii ordinis,

is; quarum aequatio generalis haec eſt $\alpha y^3 + \beta y^2x + \gamma yxx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \vartheta y + ix + \kappa = 0$. Membrum hujus aequationis ſupremum $\alpha y^3 + \beta yxx + \gamma yxx + \delta x^3$, imparium eſt dimenſionum, et proinde vel unum habet factorem ſimplicem realem, vel omnes tres ipſius factores ſimplices reales erunt. Proinde quatuor caſus ſequentes erunt evolvendi. I) Si unicus tantum adſit factor ſimplex realis. II) Si omnes tres ſint reales, et inter ſe inaequales. III) Si duo factores fuerint aequales. IV) Si omnes tres factores fuerint aequales.

§. 19.

Immutentur coordinatae eo modo, quo hoc in §. praec. factum eſt, atque hoc facto orta ſit aequatio cum priori aeque late patens: $\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3 + \ldots + \epsilon tu + \zeta uu + \eta t + \vartheta u + i = 0$, in qua aequatione membrum ſupremum $\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3$ habet factorem realem u. Si igitur iſte factor unicus adſit, quod fit, ſi $\beta\beta < 4\alpha\gamma$, poſito $t = \infty$, invenitur $\alpha u + \delta = 0$, quae eſt aequatio pro aſymtota recta. Concluditur ex hac aequatione valor $u = -\frac{\delta}{\alpha}$, qui brevitatis gratia ponatur $= c$, ut habeatur $\alpha u + \delta = u - c$. Subſtitutis his valoribus aequatio ſecundum poteſtates ipſius t ordinata ſic mutatur: $\alpha(u-c)t^2 + (\beta cc + \epsilon c + \eta)t + \gamma c^3 + \zeta c^2 + \vartheta c + i = 0$, quae eſt aequatio pro aſymtota curvilinea poſito $t = \infty$. Tum enim habetur $(u-c)t + \frac{\beta cc + \epsilon c + \eta}{\alpha} = 0$, ſi $\beta cc + \epsilon c + \eta$ non fuerit $= 0$. Si autem $\beta cc + \epsilon c + \eta = 0$, habemus $(u-c)t^2 + \frac{\gamma c^3 + \zeta c^2 + \vartheta c + i}{\alpha} = 0$. Ex hiſce deducuntur duae primae linearum tertii ordinis ſpecies. Nimirum

PRIMA SPECIES unicam habet aſymtotam hyperbolicam ſpeciei $ut = A$.

SECUNDA SPECIES unicam habet aſymtotam hyperbolicam ſpeciei $utt = A$.

§. 20.

Quodſi ſupremi æquationis membri tres factores ſimplices reales fuerint et inter ſe inæquales, quod evenit, ſi in æquatione $\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3 + \delta tt + \epsilon tu + \zeta uu + \eta t + \vartheta u + \iota = 0$ fuerit $\beta\beta > 4\alpha\gamma$; de unoquoque factore eadem ſunt tenenda, quæ §. præc. de unico factore ſunt expoſita. Unusquisque ſcilicet ſuppeditat binos ramos hyperbolicos vel ſpeciei $ut = A$, vel ſpeciei $utt = A$, unde quatuor diverſae ſpecies linearum tertii ordinis in hoc caſu continentur, tribus aſymtotis rectis utcunque ad ſe invicem inclinatis prædita. Atque ſpecies iſtae ſunt ſequentes.

TERTIA SPECIES tres habet Aſymtotas ſpeciei $ut = A$.

QVARTA SPECIES tres habet aſymtotas ſpeciei $utt = A$

QVINTA SPECIES duas habet aſymtotas ſpeciei $ut = A$ et unam ſpeciei $utt = A$. Sexta ſpecies, quae in abſtracto ſpectata poſſibilis eſſe videtur, ea eſt, quae duas habet aſymtotas ſpeciei $utt = A$, et unam ſpeciei $ut = A$. Sed calculus monſtrat, fieri non poſſe, ut duae aſymtotae fiant formae $utt = A$, quin ſimul tertia eandem formam induat.

§. 21.

Ad hoc oſtendendum ſumamus æquationem hanc latiſſime patentem $y(\alpha y - \beta x)(\gamma y - \delta x) + \epsilon xy + \zeta yy + \eta x + \vartheta y + \iota = 0$, cujus ſupremum membrum tres habet factores reales. Factor y praebet aſymtotam formae $ut = A$, ſi non fuerit, $\eta = 0$. Ut inveniatur, cujusmodi aſymtotam praebeat factor $\alpha y - \beta x$, ponamus $y = \frac{\alpha u + \beta t}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$, et $x = \frac{\alpha t - \beta u}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$, ſitque brevita-

vitatis gratia $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, quod ſemper aſſumere licet atque aequatio ſic transformabitur.

$$\alpha(\beta\gamma-\alpha\delta)ttu+(2\alpha\beta\gamma-(\alpha\alpha-\beta\beta)\delta)\,tuu+\alpha(\alpha\gamma+\beta\delta)u^3$$
$$+\beta(\alpha\epsilon+\beta\zeta)tt+(2\alpha\beta\zeta+(\alpha\alpha-\beta\beta)\epsilon)\,tu+\alpha(\alpha\zeta-\beta\epsilon)\,u^2$$
$$+(\alpha\eta+\beta\vartheta)t \qquad +(\alpha\vartheta-\beta\eta)u$$
$$+\iota$$

Factor itaque $\alpha y-\beta x$ tranſiit in u, ex quo poſito $t = \infty$ primum habetur $u = \frac{\alpha\epsilon+\beta\zeta}{\alpha\delta-\beta\gamma} = c$. Quodſi hic valor loco u in ſecundo termino ſubſtituatur, invenietur ex hoc factore $u = \alpha y - \beta x$ aſymtota formae $ut = A$ niſi fuerit $\frac{\alpha\eta+\beta\vartheta}{\beta} + \frac{(\alpha\epsilon+\beta\zeta)\,(\gamma\epsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2} = 0$. Simili modo factor $\gamma y - \delta x$ praebebit aſymtotam formae $ut = A$ niſi fuerit $\frac{\gamma\eta+\delta\vartheta}{\delta} + \frac{(\alpha\epsilon+\beta\zeta)\,(\gamma\epsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2} = 0$.

Hinc patet, fieri utique poſſe, ut neque η, neque utraque formula jam inventa evaneſcat, unde tertia ſpecies poſſibilis erit. Quod ad ſpeciem quartam attinet, ponatur $\eta = 0$, quo una Aſymtota formae $ut = A$ prodeat, tum autem ambae reliquae expreſſiones in unam $\vartheta + \frac{(\alpha\epsilon+\beta\zeta)\,(\gamma\epsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}$ coaleſcunt. Binae igitur reliquae aſymtotae omnino erunt formae $ut = A$, niſi fuerit $\vartheta + \frac{(\alpha\epsilon+\beta\zeta)\,(\gamma\epsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta-\beta\gamma)} = 0$, unde et ſpecies quarta eſt poſſibilis. Quodſi vero praeter $\eta = 0$ una ex binis reliquis expreſſionibus ponatur $= 0$, ſimul altera evaneſcit, quam ob rem fieri non poteſt, ut duae aſymtotae habeant formam $ut = A$, quin ſimul tertia eandem formam induat. Ex quo poſſibilitas quintae percipitur. Quae vero ſexta eſſe videtur, corruit.

§. 22.

§. 32.

Pervenimus ad caſum tertium, quando membrum ſupremum habet duos factores u æquales. Aequatio generalis ad hunc caſum pertinens eſt talis formæ $\alpha tuu - \beta u^3 + \gamma tt + \delta tu + \varepsilon uu + \zeta t + \eta u + \vartheta = 0$ ubi membrum ſupremum habet duos factores u æquales, et tertium $\alpha t - \beta u$ reliquis inæqualem. Tertius iſte factor oſtendit aſymtotam vel formæ $ut = A$, vel formæ $u = A$, prouti hæc expreſſio $(\alpha\delta + 2\beta\gamma)(\alpha^2\varepsilon + \alpha\beta\delta + \beta\beta\gamma) - \alpha^3(\alpha\eta + \beta\zeta)$ vel non $= 0$ vel $= 0$ deprehendatur. Quod vero ad duos factores æquales attinet, erit vel $\gamma = 0$, vel γ non $= 0$. Quodſi non fuerit $\gamma = 0$, facto $t = \infty$, fiet $\alpha uu + \gamma t = 0$, quæ eſt æquatio pro aſymtota parabolica ſpeciei $uu = At$. Hinc duæ novæ ſpecies linearum tertii ordinis ortum trahunt. Nimirum

SEXTA SPECIES habet unam aſymtotam ſpeciei $ut = A$ et unam aſymtotam ſpeciei $uu = At$

SEPTIMA SPECIES unam habet aſymtotam ſpeciei $utt = A$, et unam parabolicam ſpeciei $uu = At$.

Quodſi fuerit $\gamma = 0$; factor tertius $\alpha t - \beta u$ dabit aſymtotam formæ $utt = A$; ſi fuerit $\delta(\alpha\varepsilon + \beta\delta) = \alpha(\alpha\eta + \beta\zeta)$. Si vero hæc æqualitas non habeat locum, aſymtotæ erit formæ $ut = A$. Habemus itaque hanc æquationem

$$\begin{array}{l} \alpha tuu - \beta u^3 \\ + \delta tu + \varepsilon uu \\ + \zeta tu + \eta u \\ + \vartheta \end{array} = 0$$

Poſito itaque $t = \infty$ fiet $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$. Si igitur ſit $\delta\delta < 4\alpha\zeta$, hinc nulla orietur aſymtota. Proinde hoc caſu duæ oriuntur ſpecies. Nimirum

OCTAVA SPECIES habet unicam aſymtotam ſpeciei $ut = A$

NONA SPECIES habet unicam aſymtotam ſpeciei $utt = A$

Quar-

quando eſt $\delta\delta > 4\alpha\zeta$ et proinde duae radices aequationis $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$ reales et inaequales, duae prodibunt etiam Aſymtotae inter ſe parallelae formae $ut = A$, qui caſus denuo duas ſuppeditat ſpecies.

DECIMA nimirum SPECIES habet unam aſymtotam ſpeciei $ut = A$ et duas inter ſe parallelas ſpeciei $ut = A$.

UNDECIMA SPECIES habet unam aſymtotam ſpeciei $tt = A$, et duas inter ſe parallelas ſpeciei $ut = A$.

Si denique aequationis $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$ radices inter ſe fuerint aequales, quando nimirum $\delta\delta = 4\alpha\zeta$, ſeu $\alpha uu + \delta u = \alpha(u - c)^2$; fiet $\alpha t(u - c)^2 = \beta t^3 - \epsilon t - \eta t - \vartheta$, unde oritur aſymtota ſpeciei $uut = A$. Habemus itaque duas ſpecies novas.

DUODECIMA SPECIES habet unam aſymtotam ſpeciei $tt = A$ et unam ſpeciei $uut = A$.

DECIMATERTIA SPECIES habet unam aſymtotam ſpeciei $ut = A$ et unam ſpeciei $uut = A$.

§. 23.

Supereſt caſus ultimus, quando nimirum omnes tres ſupremi membri factores aequales ſunt. Tunc aequatio iſtam habet formam $\alpha u^3 + \beta tt + \gamma tu + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0$. Primum itaque ſpectandus eſt terminus βtt, qui ſi non deſit, curva habebit aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$, ſicque oritur

DECIMAQUARTA SPECIES, quae unicam habet aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$.

Si deſit terminus βtt, erit $\alpha u^3 + \gamma tu + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0$, unde poſito $t = \infty$ fiet $\alpha u^3 + \gamma tu + \epsilon t = 0$, niſi ſint γ et $\epsilon = 0$. Non igitur ſit $\gamma = 0$, atque in hac aequatione duae continentur aliae $\alpha uu + \gamma t = 0$, et $\gamma u + \epsilon = 0$, quarum prior eſt pro aſymtota parabolica ſpeciei $uu = At$, poſterior vero, ſi ponatur $u = \frac{-\epsilon}{\gamma} = C$,

dabit

dabit aequationem $\gamma t(u-t)+\alpha t^3+\delta tt+\zeta t+\eta=0$, quae eſt pro aſymtota hyperbolica ſpeciei $ut=A$. Proinde

DECIMAQINTA SPECIES unam habet aſymtotam parabolicam ſpeciei $uu=At$ et unam hyperbolicam ſpeciei $ut=A$, ſic ut axis parabolae parallelus ſit alteri aſymtotae rectae. Si denique ſit etiam $\gamma=0$, habemus ejusmodi aequationem $\alpha u^3+\delta uu+\varepsilon t+\zeta u+\eta=0$, ubi ε non poteſt eſſe $=0$, niſi linea ceſſet eſſe curva. Facto $t=\infty$ neceſſario quoque u debet eſſe infinitum, et proinde fit $\alpha u^3+\varepsilon t=0$, quae praebet ſpeciem ultimam, quae eſt

DECIMASEXTA SPECIES unam habens aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3=At$.

§. 24.

Omnes itaque lineae tertii ordinis optime diſpeſci poſſunt in ſedecim claſſes. Neutonus quidem lineas tertii ordinis in ſpecies ſeptuaginta duas diviſit. Sed Summus hic Geometra non tantum ex ramorum in infinitum excurrentium indole ſpecierum diverſitatem deſumſit, ſed etiam ad figuram curvarum in ſpatio finito reſpexit. Videtur quidem haec diviſionis ratio arbitraria eſſe; ſed tamen ea, quam nos ſecuti ſumus, absque dubio magis naturalis eſt, dum Neutonus ſuam rationem ſequens multo plures ſpecies producere potuiſſet: methodo vero a nobis cum Summo EVLERO adhibita nec plures nec pauciores ſpecies erui poſſunt. Nihilo tamen minus quaelibet harum ſedecim ſpecierum multas comprehendit *ſubſpecies* curvarum tertii ordinis, ſi eas curvas, quae in ſpatio finito notabiliter diſcrepant, a ſe invicem ſecernere velimus. Quemadmodum vero hic ſpecies linearum tertii ordinis ex earum aequatione generali deduximus, ita etiam linearum quarti ordinis ſpecies ex aequatione generali cognoſci poterunt: ſimilique modo licebit, linearum quinti altiorisve ordinis ſpecies ex earundem aequatione generali concludere. Quoniam vero ex praecedentibus facile perſpicitur, quemadmodum iſtae ſpe-

ies linearum altiorum ordinum inveſtigari debeant; ...ic rei magis curioſae quam utili amplius immorari ...nd opus eſt.

SECTIO III.

DE

...IGVRIS CVRVARVM IN SPATIO FINITO.

§. 25.

...ineas curvas algebraicas in eodem plano deſcriptas ...ratione ramorum in infinitum excurrentium eſſe ...erſiſſimas hucusque demonſtravimus. Multo magis ...o ratione figurae in ſpatio finito a ſe invicem diſcre...nt. Quia ſaepenumero difficillimum eſt, qualem ...va quaedam propoſita figuram habeat, ex aequatione ...gnoſcere. Eum enim in finem opus eſt, ut pro qua... abſciſſa finita valores applicatae reſpondentes ſingu... eruantur, atque reales ab imaginariis diſcernantur, ...uod negotium, ſi aequatio ſit altioris cujusdam gradus, ...rumque vires analyſeos cognitae ſuperat. Quodſi ...m abſciſſae tribuatur valor quicunque cognitus, ap...cata in aequatione vicem incognitae ſuſtinet, et pro...de reſolutio aequationis pendebit a numero dimenſio...m, quem applicata obtinet. Ipſum vero hoc nego...m per reductionem aequationis ad formam ſimpliciore...m, dum et axis commodiſſimus et angulus coordina...tum aptiſſimus eligatur, valde ſublevari poteſt. Quia ...am perinde eſt, utra coordinatarum pro abſciſſa acci...atur, labor diminuetur, ſi ea coordinatarum, cujus ...nciſſimae dimenſiones in aequatione occurrunt, pro ...plicata aſſumatur.

§. 26.

§. 36.

Earum igitur curvarum figura omnium facillime cognoſcetur, quae ejusmodi exprimuntur aequationibus, in quibus altera coordinata unicam tantum habet dimenſionem. Forma enim aequationis haec erit $y = P$, exſtente P functione quadam rationali ipſius x vel integra vel fracta. Quicunque enim valor realis ipſi x tribuatur, applicata y ſemper unum habebit valorem realem, et proinde curva continuo tractu axem utrinque in infinitum comitabitur. Si functio P ſit fracta, fieri poteſt, ut applicata in uno pluribusve locis fiat infinita, idemque curva aſymtotam exhibeat; quod evenit, ubi denominator functionis P evaneſcit. Poſito itaque $y = \frac{P}{Q}$, atque ipſae applicatae curvae hujus infinitae cognoſcentur ex aequatione $Q = 0$. Quaelibet enim radix hujus aequationis, e. g. $x = f$ declarata, ad abſciſſam x applicatam y fore infinitam, quia fit $Q = 0$. Praeter curvarum hujusmodi aequationibus expreſſarum quoque ear haud difficulter inveniuntur figurae, quae aequation hujus formae experimuntur, $yy = \frac{2Py - R}{Q}$, ſi P, R, denotent functiones quascunque ipſius x ration integras. Reſolutio enim hujus aequationis quadrat $yy - \frac{2P}{Q}y + \frac{R}{Q} = 0$ oſtendit, cuique abſciſſae x geminam convenire applicatam, vel nullam. Ambae jus aequationis radices ſunt $y = \frac{P}{Q} \pm \sqrt{(-\frac{R}{Q} + \frac{PP}{Q}}$ Duae itaque prodeunt applicatae, ſi $\frac{PP}{QQ} > \frac{R}{Q}$ ſi $PP > QR$. Si $PP < QR$, applicatae fiunt imagina In quolibet igitur limite, qui applicatas reales ab im

ariis dirimit, fiet $PP = QR$, et proinde $y = \frac{P}{Q}$, id eſt ambae applicatae fiunt aequales, atque tum aec applicata curvam in unico puncto tanget. Quo itur eo diſtinctius perſpici poſſit, quomodo ex aequationibus hujus formae de curvarum figuris judicandum t, conſideremus aequationem quandam ſpecialem ſub ac forma generali contentam.

§. 27.

Sit igitur $yy = \frac{2by + axx + cx + e - nnx^3}{x}$, ex a habetur $y = \frac{b \pm \sqrt{(bb + ex + cxx + ax^3 - nnx^4)}}{x}$

m patet, quod omnibus ipſius x valoribus, qui functioni $bb + ex + cxx + ax^3 - nnx^4$ valorem poſitivum ducunt, duplex applicata reſpondeat. Quando haec nctio $= 0$ evadit, unica tantum applicata y abſciſſae convenit, ſeu binae applicatae inter ſe fiunt aequales. vero iſta functio valorem negativum obtinet, abſciſſae illa prorſus applicata reſpondet. Valores iſtius functio. ſi fuerint poſitivi in negativos abire nequeunt, niſi ius facti ſint aequales ſeu functio evanuerit. Caſus itur iſti potiſſimum erunt conſiderandi, quibus functio $+ ex + cxx + ax^3 - nnx^4$ fit $= 0$. Certo hoc bis enit, quoniam ſi x certum limitem ſive poſitive ſive gative transgrediatur, ejus valor fit negativus. Totaque curva determinatae abſciſſae parti reſpondebit, ra quam applicatae fient imaginariae. Ad curvae proinde uram cognoſcendam conſideretur aequatio $bb + ex + cxx + ax^3 - nnx^4 = 0$, cujus ſingulae radices reales unt puncta in axe, ubi ambae applicatae fiunt aequales, ſeu ubi eſt limes applicatarum realium et imaginarum. Ponamus functionem $bb + ex + cxx + ax^3 - nnx^4 = 0$ duas habere radices reales inaequales, ſeu duo-

bus tantum caſibus evaneſcere poſſe, puta ſi $x = AP$ atque ſi $x = AS$; recta XY pro axe et A pro initio abſciſſarum ſumtis, per totum ſpatium PS applicatae erunt geminae et reales, extra ſpatium PS vero omnes applicatae erunt imaginariae. Proinde tota curva inter applicatas Kk et Nn jacebit. Applicata vero in initio abſciſſarum A erit curvae aſymtota, quae praeterea curvam in alio quodam puncto ſecabit. Poſito enim y

$= 0$, fiet $\sqrt{(bb + ex + cxx + ax^3 - mx^4)} = b + \frac{ex}{2b}$

ex quo deducitur $y = \frac{b \pm (b + \frac{ex}{2b})}{x}$, id eſt, $y =$

∞ et $y = \frac{-e}{2b}$. Proinde curva talem habet figuram, qualem Fig. 308. repraeſentat.

§. 28.

F. 309. Quodſi aequatio $bb + ex + cxx + ax^3 - mx^4 =$ quatuor habeat radices reales inaequales, et proinde quatuor caſibus evaneſcat, ſi $x = AP$, $x = AQ$, $x = AR$ et $x = AS$; erunt puncta P, Q, R, S iſta, in quibus geminae applicatae ſunt aequales. Cum igitur applicatae per axis ſpatium XP fuiſſent imaginariae, per ſpatium PQ erunt reales, tum vero per ſpatium QR erunt iterum imaginariae, atque per RS rurſus reales, extra vero rurſus fiunt imaginariae. Proinde curva duabus conſtabit partibus a ſe invicem ſeparatis, quarum altera intra rectas Kk et Ll, altera inter Mm et Nn continetur. Cum vero in abſciſſarum initio applicatae ſint reales, neceſſe eſt, ut illud vel in axis intervallo PQ vel RS ſit ſitum. Curva igitur eam, quam Fig. 309. repraeſentat, figuram habet, conſtabit nimirum ex parte D et ovali ab hac parte diſtante, quae *ovalis conjugata* dicitur. Si itaque duae radices aequationis $bb + ex + cxx$
$+ ax^3$

$ux^3 - mx^4 = 0$ fiant inter ſe aequales, vel puncta P Q, vel Q et R, vel R et S, coincidunt. Prior ca- s contingere non poteſt. Quia enim A inter P et Q iet, utraque radix deberet eſſe x, quod quia b deeſſe quit, fieri non poteſt. Sin autem puncta R et S con- niant, ovalis conjugata abit in punctum, quod *pun- um conjugatum* vocatur. Quodſi puncta Q et R con- niant, ovalis cum reliqua curva ſic conjungitur, ut odeat *curva nodata* Fig 310. Interſectio enim duorum F.310. rvae ramorum *Nodus* vocari ſolet. Si tres radices ngruant, et proinde puncta Q, R et S in unum con- cant, nodus in *cuſpidem* ſeu *punctum reflexionis* eva- ſcet, qualem Fig. 310 repraeſentat. F.311.

§. 29.

Generatim jam ex his perſpicitur, quid de figuris rvarum aequationibus formae $yy = \frac{2Py - R}{Q}$ expreſ- um ſit ſentiendum. Conſideranda enim eſt aequatio - $QR = 0$, cujus ſingulae radices reales praebent lo- in quibus ambae applicatae aequales ſunt. Noten- haec puncta in axe, atque ſi omnes radices reales rint inaequales, axis partes inter haec puncta con- tae alternatim habebunt applicatas geminas reales et ginarias. Proinde curva tot conſtabit partibus a ſe icem ſejunctis, quot hujusmodi alternationes adeſſe rehenduntur, unde ovales conjugatae originem du- it. Si aequationis $PP - QR = 0$ duae radices fiant uales, punctorum in axe notatorum duo convenient, eque in axe portio vel imaginarias vel reales habens licatas evaneſcet. Priori caſu curva prodibit noda- posteriori ovalis conjugata in punctum conjugatum neſcet. Si aequatio iſta tres habet radices reales et uales, nodus in cuſpidem abibit, atque ſi quatuor uerint radices aequales, vel duae ovales ſeparatae con- ſcent in punctum, vel in ipſa cuſpide dabitur nodus,

ſeu duae cuſpides ad verticem oppoſitae. Si quinque radices aequales adfuerint, novae figurae fere non proveniunt. Cuſpis enim oritur, in qua non una ut ante, ſed duae ovales in punctum coaleſcunt, neque etiam major radicum realium et aequalium multitudo novum figurarum diſcrimen producit.

§. 30.

Nodus ſeu interſectio duorum curvae ramorum vocari etiam ſolet *punctum duplex*, quia curva bis per illud punctum tranſit. Si per nodum alius curvae ramus tranſiret, tum in hac interſectione naſcetur *punctum triplex.* Si duo puncta duplicia conveniunt, oritur *punctum quadruplex*, ex quo geneſis et natura punctorum quorumvis *multiplicium* perſpicitur. Si aequatio, qua applicata y per abſciſſam x exprimitur, ſit cubica vel altioris gradus, ita ut y aequetur functioni multiformi ipſius x, unicuique abſciſſae convenient vel tot applicatae, quot y in aequatione habet dimenſiones, vel earum numerus erit binario minor, vel quaternario, vel ſenario, et ita porro. Perpetuo igitur binae applicatae ſimul imaginariae eſſe incipiunt, atque prius, quam imaginariae eſſe incipiunt, inter ſe fiunt aequales. Quare a tranſitu ab applicatis realibus ad imaginarias et ab imaginariis ad reales plures naſcuntur varietates, quae partim cum explicatis conveniunt, partim ex iisdem ſunt compoſitae. Quodſi autem pro plurimis abſciſſis tam affirmativis, quam negativis omnes quaerantur applicatae valores, per haec puncta inventa facile delineabitur curva, ejusque proinde figura cognoſcetur.

SECT.

SECTIO IV.

DE

TANGENTIBVS ET PVNCTIS MVLTIPLICIBVS CVRVARVM.

§. 31.

Data aequatione inter coordinatas AP$=x$ et PM$=y$ ſive orthogonales ſive obliquangulas, calculi differentialis F. 312.
pe reperitur limes rationis $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, ſeu ultima ratio $\frac{dx}{dy}$. Proinde hoc calculo in ſubſidium vocato determatio tangentis curvae nulla laborat difficultate. *Quod enim propoſita ſit curva quaecunque atque in eadem punctum aliquod M datum per quod ducenda eſt tangens; eodem puncto M ad axem ducatur applicata P; fiat MT $= y \frac{dx}{dy}$, = ſubtangenti* (§. 277.) *ducatur TM, erit haec recta tangens quaeſita.*

Inventa ſubtangente ſimul habetur tangens anguli TP ſub quo recta TM curvam tangens ad axem innata eſt. Fit enim tang MTP $= \frac{PM}{PT} = y : y \frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dx}$, ſi coordinatae inter ſe fuerint normales, odſi coordinatae inter ſe fuerint obliquangulae, ex F. 313.
cto m ad MR axi parallelam ducatur normalis mQ, ponatur angulus $mSp = m$MR $= \varphi$, angulus vero mpB mRQ $= \omega$; erunt in triangulo mMR latera MR$=\Delta x$, $= \Delta y$ et angulus MR$m = 2R - \omega$. Proinde eſt

 tang.

tang. mMR = tang. $\varphi = \frac{\Delta y \text{ ſin. } \alpha}{\Delta x + \Delta y \text{ cos } \alpha}$. Haec formula igitur exhibet tangentem anguli, ſub quo ſecans mS ad axem inclinata eſt. Decreſcente Δx, creſcit angulus φ, et poſito $\Delta x = 0$, quo caſu ſimul eſt $\Delta y = 0$, ſecans MS incidit in tangentem MT, et proinde jam eſt angulus φ = MTP et tang $\varphi = \frac{dy \text{ ſin. } \alpha}{dx + dy \text{ cos. } \alpha}$.

§. 32.

F. 312. Quodſi ad rectam tangentem per punctum contactus ducatur normalis eadem recta et *curvae normalis* eſſe dicitur (§. 251. *Anal. Math.*). Poſitio hujus rectae quovis caſu facile reperitur. Facilius autem habetur, ſi coordinatae AP et PM fuerint orthogonales. Sit enim primo recta Mn ad ſecantem Sm in puncto M normalis, erit triangulum rectangulum MPn ſimile triangulo rectangulo MRm. Quia enim in triangulis MRm et MSn angulus $mMR = MSn$, et apud M et R anguli recti, erit angulus $MnP = MmR$. Proinde habemus MR : Rm = MP : Pn, id eſt $\Delta x : \Delta y = y : Pn$, ideo $Pn = y \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Decreſcente Δx creſcit angulus mMR, ſimulque angulus nMN decreſcit; poſito vero $\Delta x = 0$, Mn cum MN coincidit, et punctum n cum puncto N. Proinde habemus PN $= y \frac{dy}{dx}$, quae ipſa formula ſupra *l. c.* ex formula pro ſubtangente deducta eſt. Hanc axis PN portionem inter applicatam PM et normalem MN interceptam ſupra §. 251 *An. Math.* vocavimus *Subnormalem*. *Propoſita igitur curva quadam et dato in eadem puncto quodam M, per quod ducenda ſit normalis, ab eodem puncto M ad axem ducatur applicata orthogonalis MP, fiat* PN $= y \frac{dy}{dx}$, *et ducatur MN, quae erit normalis quaeſita.*

In-

venta vero normali ſimul inventa eſt tangens, quia ec ad normalem in M eſt perpendicularis. Si vero tangens jam ante fuerit inventa, pro coordinatis or- gonalibus ex inventa ſubtangente ſimul habetur ſub- rmalis. Erit enim PT : PM = PM : PN, ſeu PN =

$$\frac{M^2}{T} = yy : y\frac{dx}{dy} = y\frac{dy}{dx}.$$

Praeterea vero ſi an- ulus APM fuerit rectus, erit ipſa tangens MT = (PT² + PM²), et normalis MN = $\surd$(PM² + PN²). uia etiam PT : TM = PM : MN, erit quoque MN =

$$\frac{M \times TM}{PT} = \frac{PM}{PT}\surd(PT^2 + PM^2).$$

§. 33.

Eidem abſciſſae $x = p$ reſpondere poſſunt una plu- s applicatae, atque ad cujusvis adplicatae extremum rva habere poteſt rectam tangentem, ita ut ad eandem ſciſſam $x = p$, curva tot habeat tangentes, quot ſunt lores reſpondentes applicatae y. Hinc porro conclu- nus, quod ad eandem abſciſſam diverſi ſaepe inve- ntur valores pro ſubtangente, prouti alius vel alius plicatae valor pro y ſubſtituatur, quorum tamen va- rum quandoque duo vel plures poſſunt eſſe coinciden- . Quando e. gr. NAM eſt parabola Apolloniana, cu- aequatio eſt $yy = ax$, cuivis abſciſſa x reſpondet plex tangens TM et TN, pro quavis igitur tangente ciatim quaeri debet ſubtangens, quae tamen hoc ca- eadem eſſe deprehenditur. Aequatione enim $yy =$ F. 314.

differentiata fit $2ydy = adx$, proinde $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$.

PM = + y, et $-\frac{dx}{dy} = -\frac{2y}{a}$ pro PN = $-y$. Eſt

h. $y \times \frac{2y}{a} = -y \times -\frac{2y}{a} = \frac{2yy}{a} = 2x$. Uterque

 ipſius

ſius $\frac{dx}{dy}$ valor ſimul habetur, comparata aequatione differentiali cum algebraica pro parabola. Deducitur enim ex aequatione $2ydy = adx$, iſta $y = \frac{adx}{2dy}$, quo valore in aequatione $yy = ax$ ſubſtituto habetur $\frac{aadx^2}{4dy^2} = ax$, et proinde $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4ax}{aa} = \frac{4x}{a}$, et $\frac{dx}{dy} = \pm 2\sqrt{\frac{x}{a}}$.

§. 34.

Caeterum pro coordinatis orthogonalibus $AP = x$ et $PM = y$, ſi A ſit curvae vertex et AB ad axem normalis, ſequentes quoque habentur formulae. $AT = PT = AP = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$. $AB = \frac{ydx - xdy}{dx}$, quia $PT : AT = PM : AB$, id eſt $\frac{ydx}{dy} : \frac{ydx - ydx}{dy} = y :$ $AB = \frac{ydx - xdy}{dx}$. Praeterea $TM = \sqrt{(PT^2 + PM^2)} = \sqrt{(\frac{yydx^2}{dy^2} + yy)} = \sqrt{(\frac{yydx^2 + yydy^2}{dy^2})} = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$ vel $TM = \frac{ydu}{dy}$, ſi $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = du$. Porro $PT : AT = TM : BT$, id eſt $\frac{ydx}{dy} : \frac{ydx - xdy}{dy} = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} : BT = \frac{(ydx - xdy)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dxdy}$. Inſuper $PT : TM = AP : BM$, ſive $\frac{ydx}{dy} : \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} =$

r x: BM $= \frac{x\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$. Denique MN $= \sqrt{(PM^2}$

$PN^2) = \sqrt{(yy + \frac{yydy^2}{dx^2})} = \sqrt{(\frac{yydx^2 + yydy^2}{dx^2})} =$

$\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$, atque TN $=$ PT $+$ PN $= \frac{ydx}{dy} + \frac{ydy}{dx}$

$= \frac{ydx^2 + ydy^2}{dydx} = \frac{y(dx^2 + dy^2)}{dydx}$.

§. 35.

Quando abſciſſae x valor determinatus tribuitur, nterdum accidit, ut duo vel plures applicatae y valores ant aequales. Eo proinde caſu ad idem curvae punctum, in quo plures applicatae aequales terminantur, lures inveniri debent rectae tangentes. Quae tamen mnes generali formula ſubtangentis $y \frac{dx}{dy}$ indicantur; differentiata enim aequatione pro curva data tot inveniantur valores pro $\frac{dx}{dy}$, quot curva ad idem punctum abet ſubtangentes. Eum in finem conſideranda eſt ifferentia completa aequationis, quae pro curva data l propoſita. Scriptis nimirum $x + \Delta x$ loco x et $y + \Delta y$ loco y, habetur aequatio pro curva hujus formae $A\Delta x$ $B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta$ $\Delta y^2 + I\Delta y^3 +$ etc $= 0$ (§. 415.). Ex qua primo conuditur $\frac{dx}{dy} = -\frac{B}{A}$. Si itaque inveniatur $A = 0$, btangens fit infinita, et proinde tangens axi parallela. i vero $B = 0$, ipſa applicata curvam tangit. Si vero veniatur $A = 0$ et $B = 0$, habemus aequationem ſeentem $C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y +$ $H\Delta x$

$H \Delta x \Delta y^2 + I \Delta y^3$ etc $= 0$, ex qua ſit $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{D}{C} \times \frac{dx}{dy} + \frac{E}{C} = 0$, quae aequatio duplicem pro $\frac{dx}{dy}$ exhibet valorem, et proinde duplicem quoque ſubtangentem. Duae hujus aequationis radices ſunt $\frac{dx}{dy} = -\frac{D}{2c} \pm r\left(-\frac{E}{C} + \frac{DD}{4cc}\right)$.

§. 36.

Si igitur fuerit $\frac{E}{C} > \frac{DD}{4cc}$, vel quod eodem redit, ſi inveniatur $4CE > DD$, ambae radices ſunt imaginariae. Ex quo concludendum eſt, punctum applicatae extremum ad curvam quidem pertinere, verum a reliqua curva ſejunctum eſſe, quod igitur punctum conjugatum erit. Hic igitur ne idea quidem tangentis locum habet. Quodſi autem fuerit $4CE < DD$, aequatio
F.315. $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{D}{C} \times \frac{dx}{dy} + \frac{E}{C} = 0$ duas habebit radices reales. Hinc duo curvae rami in M ſeſe ſecabunt, ibique punctum duplex conſtituent. Si denique fuerit $4CE = DD$, ambae iſtae tangentes coincident, ex quo intelligitur, duos curvae ramos in M ſe invicem tangere, quo itaque caſu iterum punctum M pro duplici habendum erit. Quoties igitur $\frac{dx}{dy}$ datur per aequationem quadraticam, concludendum eſt, curvam in M punctum duplex habere, cujus tres dantur ſpecies diverſae; vel ovalis in punctum evaneſcens, ſeu punctum conjugatum, vel duorum curvae ramorum interſectio mutua, ſeu nodus, vel duorum curvae ramorum contactus

ſtus, quas diverſas puncti duplicis ſpecies triplex aequationis $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{D}{C} \times \frac{dx}{dy} + \frac{E}{C} = 0$ conſtitulo definit.

§. 37.

Si praeter coefficientes A et B etiam C, D, et E omnes fuerint $= 0$, relinquetur iſta aequatio $F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + K\Delta x^4 + L\Delta x^3\Delta y + M\Delta x^2\Delta y^2 + N\Delta x\Delta y^3 + O\Delta y^4 +$ etc $= 0$, ex qua deducitur

$$\frac{dx^3}{dy^3} + \frac{G}{F} \times \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{H}{F} \times \frac{dx}{dy} + \frac{I}{F} = 0.$$

Quae aequatio vel unam habet radicem realem et duas imaginarias, vel tres reales. In priori caſu concludi debet, curvam habere unum ramum per punctum M transeuntem et praeterea ovalem conjugatam in puncto M evaneſcentem. In poſteriori caſu vero curva habebit tres ramos ſeſe in puncto M vel ſecantes vel tangentes, prout illae radices fuerint vel inaequales vel aequales. Utroque igitur caſu curva in M habebit punctum triplex. Evaneſcentibus jam praeter praecedentes etiam eorum terminorum coefficientibus, in quibus Δx et Δy tres habent dimenſiones, invenietur aequatio

$$\frac{dx^4}{dy^4} + \frac{L}{K} \times \frac{dx^3}{dy^3} + \frac{M}{K} \times \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{N}{K} \times \frac{dx}{dy} + \frac{O}{K} = 0,$$

ex qua punctum curvae M quadruplex erit judicandum, quia in eo vel duæ ovales conjugatæ evaneſcunt, quod evenit, ſi hujus æquationis radices omnes fuerint imaginariæ; vel in M ſit interſectio ſeu contactus duorum curvae ramorum cum puncto conjugato, quod evenit, ſi duae radices reales et duæ imaginariæ fiant. Denique in M erit interſectio quatuor ramorum curvæ, ſi omnes radices ejus æquationis fuerint reales, interſectio autem duorum

rum

rum vel trium vel omnium quatuor fiet contactus, ſi duæ, tres vel omnes quatuor radices ſiant æquales. Simili ratione progrediendum erit, ſi etiam iſti, in quibus Δx et Δy quatuor obtinet dimenſiones, termini evaneſcant.

§. 38.

Hæc meditata ſuppeditant ſolutionem problematis ſequentis. *Invenire æquationem generalem pro omnibus curvis, quæ non ſolum per punctum datum M tranſeunt, ſed etiam in M habeant punctum vel ſimplex vel duplex, vel multiplex quodcunque.* Poſitis enim $AP = p$, $PM = q$, ſi P, Q, R, S, etc. denotent functiones quaſcunque coordinatarum x et y; hæc æquatio $(x-p)P + (y-q)Q = 0$ exprimet curvam per punctum M tranſeuntem. Poſito enim $x = AP = p$, fiet $y = PM = q$. Supponimus, quod neque P per $y-q$, nec Q per $x-p$ fuerit diviſibile, ne factores $x-p$ et $y-q$, a quibus tranſitus curvæ per punctum M pendet, ex æquatione per diviſionem eliminentur. Erit vero M punctum ſimplex, quia ob $p+dx = x$ et $q+dy = y$, fit $dx = x-p$, et $dy = y-q$, proinde $Pdx + Qdy = 0$, ſeu $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}$. Si M ſit punctum duplex, æquatio pro curvis hac forma generali continebitur $P(x-p)^2 + Q(x-p)(x-q) + R(y-q)^2 = 0$, ex qua primo patet, poſito $x = p$, fore $y = q$. Deinde ſubſtitutis dx et dy loco $x-p$ et $y-q$, fiet $Pdx^2 + Qdxdy + Rdx^2$ vel $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{Q}{P} \times \frac{dx}{dy} + \frac{R}{P} = 0$. Ex quo patet lineas ſecundi ordinis punctum duplex habere non poſſe. Si enim æquatio $P(x-p)^2 + Q(x-p)(x-q) + R(y-q)^2 = 0$ ſecundi gradus ſit, quantitates P, Q, et R erunt conſtantes, quo caſu æquatio non erit pro linea

curva

curva, ſed pro duabus rectis. Si M eſſe debeat punctum triplex, natura curvæ ſequente exprimitur æquatione $P(x-p)^3 + Q(x-p)^2(y-q) + R(x-p)(y-q)^2 + S(y-q)^3 = 0$, quæ ſi eſſe debeat tertii ordinis, quantitates P, Q, R, S, etc. debent eſſe conſtantes. Eo autem caſu æquatio tres haberet factores ſimplices formæ $\alpha(x-p) + \beta(y-q) = 0$, ideoque eſſet pro tribus lineis rectis. Curvae igitur quarto ordine inferiores punctum triplex non habent. Si æquatio curvæ ſub hac contineatur forma $P(x-p)^4 + Q(x-p)^3(y-q) + R(x-p)^2(y-q)^2 + S(x-p)(y-q)^3 + T(y-q)^4 = 0$, curva in M habebit punctum quadruplex, quæ vero ad altiorem quam quartum ordinem pertinere debet, quia ſi P, Q, R, S, T ſint conſtantes, æquatio erit pro quatuor rectis. Proinde linea curva ſimpliciſſima, quæ punctum habet quadruplex, ad ordinem quintum pertinet. Simili modo æquationes generales exhiberi poſſunt pro lineis, quæ in M habeant punctum quintuplex vel multiplex aliud quodcunque.

§. 39.

Quodſi autem M fuerit punctum utcunque multiplex, vel totidem curvæ rami ſe mutuo in puncto M ſecabunt, vel tangent; vel ſi numerus ramorum ſe interſecantium ſit minor; unum vel plura puncta conjugata in punctum M concident, qui curvæ ſtatus ex ante tradițis cognoſcetur. Scriptis enim in functionibus P, Q, R, S, etc. p loco x, et q loco y, dx vero et dy loco factorum $x-p$ et $y-q$, prodibunt ejusmodi æquationes, quales ſupra jam conſideravimus. Ceterum licet curva tertii ordinis habere poſſit unum punctum duplex, eadem tamen uno plura puncta duplicia habere nequit. Ponamus enim, quod duo habeat puncta duplicia atque recta per duo hæc puncta ducta curvam in quatuor punctis ſecaret, quod naturæ curvarum tertii ordinis repugnat. Pari ex ratione linea quarti ordinis duo tantum habere

bere poteſt puncta duplicia; linea quinti ordinis plura tribus habere non poterit, et ita porro. Deinde cum linea curva ſimpliciſſima puncto triplici gaudens ſit quarti ordinis tamen nec linea quarti nec quinti ordinis duo habere poteſt puncta triplicia, alias daretur recta curvam quarti vel quinti ordinis in ſex punctis ſecans, quod impoſſibile eſt. Poteſt vero linea ſexti ordinis duo puncta triplicia habere. Duo puncta quadruplicia non cadunt, niſi in lineas octavi aut altioris ordinis. Quae ratiocinia ad reliqua puncta multiplicia facili applicari poſſunt negotio.

§. 40.

Similibus ratiociniis reperitur hujus problematis ſolutio: *Data eſt aequatio pro curva propoſita, et quaeruntur ejus puncta multiplicia, ſi adſint.* Quaerenda nimirum eſt aequatio hujus curvae differentialis completa formae $A dx + B dy + C dx^2 + D dx dy + E dy^2 + F dx^3 + G dx^2 dy + H dx dy^2 + I dy^3 +$ etc, atque hoc facto poni debet $A = 0$ et $B = 0$, ex quibus duabus aequationibus cum data integrali conjunctis concluduntur valores pro x et y, pro quibus punctum curvae eſt multiplex. Qui calculus ſi ad impoſſibilitatem quandam deducat, indicabit, curvam nullis punctis multiplicibus eſſe praeditam. Quaeratur itaque valor ipſius x vel y ex una earum trium aequationum quae ſimplicior eſt reliquis. Inventus iſte valor ſubſtituatur in duabus reliquis, tumque harum aequationum radices communes quaerantur, quae dabunt valores pro x et y punctis multiplicibus reſpondentes. Si igitur iſtae aequationes nullam radicem communem agnoſcant, vel calculus alias ad impoſſibilitatem quandam deducat, curva nullum punctum multiplex agnoſcet. His peractis ad dijudicandum, an punctum multiplex, ſi quod adſit, duplex vel triplex ſit, vel aliud quodcunque multiplex; valores pro x vel y inventi ſubſtituantur in functionibus C, D, et E, qui niſi omnes evaneſcant, ex eo concludendum eſt, punctum eſſe duplex. Si vero

C, F,

C, D, et E pariter evaneſcant, in iudicando ulterius eſt progrediendum, et valor pro x vel y inventus in functionibus F, G, H, I, ſubſtituendus. Quo facto niſi hae functiones omnes evaneſcant, punctum erit triplex. Eo autem caſu quo iſtae quoque functiones omnes evaneſcunt, ſequentium terminorum coefficientes ſpectari debent, atque eodem modo ut ante concludi.

§. 41.

Datur haec aequatio pro curva $y^4 + 4ay^3 + 2y^2x^2 + 4ayxx - 3a^3y + x^4 - 4a^2x^2 + 8a^3x - 8a^4 = 0$, cuius differentialis invenitur $(4y^3 + 12ay^2 + 4yxx + 4axx - 8a^3)\,dy + (4yyx + 8ayx + 4x^3 - 8aax + 8a^3)\,dx + (6yy + 12ay + 2xx)\,dy^2 +$ etc $= 0$. Ideo poni debet $y^3 + 3ayy + yxx + axx - 2a^3 = 0$ et $yyx + 2ayx + x^3 - 2aax + 2a^3 = 0$. Prima harum aequationum diviſibilis eſt per $y + a = 0$, et quoque eſt $yy + 2ay - 2aa + xx$. Ergo debet eſſe $y = -a$ et $xx = 2aa - 2ay - yy$. Hic autem valor pro xx in altera ſubſtitutus eam deducit ad ſequentem $2a^3 = 0$, quod impoſſibile eſt, quia eſt a quantitas data. Proinde haec aequatio nullum punctum multiplex indicat. Si vero $-a$ pro y ſubſtituatur tam in aequatione pro curva data, quam in altera per calculum differentialem inventa, reperientur aequationes $x^4 - 6aaxx + 8a^3x - 3a^4 = 0$ atque $x^3 - 3aax + 2a^3 = 0$, quae radicem communem $x = a$ adgnoſcunt. Subſtitutis iam valoribus $x = a$ et $y = -a$ in datis tribus aequationibus, quia omnes nihilo ſunt aequales, caſu $x = a$ et $y = -a$, curva habet punctum multiplex. Subſtitutis denique his valoribus in coefficiente ipſius dy^2, qui erat $6yy + 12ay + 2xx$, quia is reducitur ad $-4aa$; punctum curvae inventum erit duplex.

SECT.

SECTIO V.

DE

CVRVATVRA CVRVARVM.

§. 42.

F. 318. Propoſita ſit curva quaecunque algebraica ... ad axem TN, abſciſſam AP $= x$ et applicatam PM $= y$ relata, atque aequatio pro hac curva data poſitis $x + \Delta x$ loco x et $y + \Delta y$ loco y, ſequentem habebit formam $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + \text{etc} = 0$, quo facto ſi x et y habeantur pro conſtantibus, haec aequatio exprimet naturam ejusdem curvae ad axem MR priori TN parallelum et abſciſſarum initium M relatam, ita ut novae coordinatae ſint $Mq = \Delta x$ et $qm = \Delta y$. Sumamus igitur ... normalem MN pro axe, in quam ducatur ex m applicata normalis mr, ac vocetur abſciſſa $Mr = r$ et applicata $rm = s$, atque eodem modo ut ſupra §. 3. inveniemus

$$\Delta x = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(A^2+B^2)}} \text{ et } \Delta y = \frac{-As - Br}{\sqrt{(A^2+B^2)}},$$ proinde

$$r = \frac{-A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(A^2+B^2)}} \text{ et } s = \frac{B\Delta x - A\Delta y}{\sqrt{(A^2+B^2)}}.$$ Aequatio vero curvae ad axem MR relatae erat $-A\Delta x - B\Delta y = C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + \text{etc}$, ex qua valoribus, qui pro Δx et Δy inventi ſunt, ſubſtitutis, fit $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \alpha rr + \beta rs + \gamma ss + \delta r^3 + \varepsilon r^2 s + \zeta r s^2 + \eta s^3 + \text{etc}$, ubi α, β, γ, etc. brevitatis gratia pro coefficientibus ſingulorum terminorum adhibentur. Fit vero ex iſta aequatione $\sqrt{(A^2+B^2)} = \alpha r + \beta s + \gamma \frac{ss}{r} + \delta r^2 + \varepsilon rs + \zeta s^2 + \eta \frac{s^3}{r} + \text{etc}$. quae igitur ...

aequ...

uatio exprimens naturam datæ curvæ ad normalem N tanquam axem et initium abſciſſarum M relatae. io minor itaque abſciſſa r ſtatuatur, eo magis accedit lor ipſius $\Gamma(A^2+B^2)$ ad $\gamma\frac{ss}{r}$, et proinde ſi ad ndem axem MN, idemque initium abſciſſarum M de- ipta ſit curva æquatione $\Gamma(A^2+B^2)=\gamma\frac{ss}{r}$ ex- eſſa; hæc curva erit limes, ad quem propoſita continuo opius accedit. Propoſitae itaque curvatura eo minus urvatura curvæ $\Gamma(A^2+B^2)=\gamma\frac{ss}{r}$ diverſa erit, quo opius accedit ad punctum M. Poſito $r=0$, quo u etiam erit $s=0$; fit $\Gamma(A^2+B^2)=\gamma\frac{ss}{r}$ unde ncludendum eſt, curvæ propoſitæ curvaturam in ipſo ncto M eandem eſſe cum curvæ $\Gamma(A^2+B^2)=\gamma\frac{ss}{r}$ rvatura. Ejusmodi curva, quæ cum alia data in da- puncto eandem habet curvaturam dicitur *curva oſcu-* *u*. Poſito itaque $r=0$, et proinde quoque $s=0$, betur æquatio pro curva datam *mm* in M oſculante. pponimus enim, non eſſe $\gamma=0$. Quodſi enim hoc idat, foret $\Gamma(A^2+B^2)=\eta\frac{s^3}{r}$, vel quoque η exi- nte $=0$, habebitur $\Gamma(A^2+B^2)=\mu\frac{s^4}{r}$, et ita por-

Sic ut forma æquationis generalis pro curva datam dato puncto oſculante ſit $\Gamma(A^2+B^2)=\mu\frac{s^K}{r}$, exi- nte k numero integro poſitivo. Quare curva datam dato puncto oſculans, quæ hac methodo invenitur nper erit curva ex genere parabolico.

ſius $\frac{dx}{dy}$ valor ſimul habetur, comparata aequatione differentiali cum algebraica pro parabola. Deducitur enim ex aequatione $2ydy = adx$, iſta $y = \frac{adx}{2dy}$, quo valore in aequatione $yy = ax$ ſubſtituto habetur $\frac{aadx^2}{4dy^2} = ax$, et proinde $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4ax}{aa} = \frac{4x}{a}$, et $\frac{dx}{dy} = \pm 2\sqrt{\frac{x}{a}}$.

§. 34.

Caeterum pro coordinatis orthogonalibus AP = x et PM = y, ſi A ſit curvae vertex et AB ad axem normalis, ſequentes quoque habentur formulae. AT = PT $= AP = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$. $AB = \frac{ydx - xdy}{dx}$, quia PT : AT = PM : AB, id eſt $\frac{ydx}{dy} : \frac{ydx - ydx}{dy} = y :$ $AB = \frac{ydx - xdy}{dx}$. Praeterea $TM = \sqrt{(PT^2 + PM^2)} = \sqrt{(\frac{yydx^2}{dy^2} + yy)} = \sqrt{(\frac{yydx^2 + yydy^2}{dy^2})} = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$, vel $TM = \frac{ydu}{dy}$, ſi $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = du$. Porro PT : AT = TM : BT, id eſt $\frac{ydx}{dy} : \frac{ydx - xdy}{dy} = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} : BT = \frac{(ydx - xdy)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dxdy}$. Inſuper PT : TM = AP : BM, ſive $\frac{ydx}{dy} : \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} =$

ripheriis horum circulorum capiantur duo ar-
is æquales AB, *ab*, erit curvatura ipſius AB ad curva-
ram arcus *ab* ut *ac* ad AC, ita ut arcu AB habente
rvaturam *n* graduum, vel minutorum, vel aliarum
rtium peripheriae, arcus *ab* habeat curvaturam *m* gra-
uum vel minutorum. Capiatur enim arcus Aβ ſimilis
cui *ab*, erit Aβ : *ab* = ABD : *abd*; cum vero ſit ABD
bd = AC : *ac* = *m* : *n*, erit Aβ : *ab* = *m* : *n*, vel Aβ
B = *m* : *n*, quia AB = *ab*. Proinde arcus Aβ arcui
ſimilis ſi ſit *m* graduum, vel partium peripheriae qua-
mcunque, erit AB arcus *n* graduum vel aliarum par-
um. Curvatura itaque ipſius *ab* eſt ad curvaturam arcus
B uti *m* ad *n*.

§. 45.

Sit MT recta, quae curvam M*m* ad abſciſſam AP F.317.
x et applicatam PM = *y* relatam in puncto M tangat.
r M ducatur recta MB tangenti MT normalis, atque
hac normali ad eam partem, ad quam curva conca-
eſt, ſumatur punctum quodcunque C, ex quo tan-
am centro et radio CM deſcribatur circulus M*m*B, at-
e recta MT non tantum curvae M*m*, ſed et hujus
rculi M*m*B tangens erit. Cadit vero aut pars circuli
tra rectam tangentem et curvam; aut non. Si prius
;, circulus a ſua tangente minus deflectit, quam cur-
in puncto M deflectit a tangente et proinde curva
ud M majorem habet curvaturam, quam circulus.
cabit vero hoc caſu circulus curvam in puncto quo-
m *m*, atque curvatura circuli eo magis accedet ad cur-
turam curvae in M, quo minus punctum *m* ab M di-
t. Decreſcente radio circuli, creſcit ejus curvatura,
punctum *m* ad punctum M accedit. Sic circulus
dio DM deſcriptus ſecabit curvam in puncto *μ* pun-
o M propiori. Simulac vero punctam *μ* cum pun-
o M coincidit, circuli curvatura cum curvae M*m* in
ncto M curvatura coincidit. Circulus iſte, qui ean-
m cum curva M*m* in dato puncto M habet curvatu-

ram eſt *circulus oſculator*, et radius ejusdem vocari ſo-
let *radius oſculi* ſeu *radius curvaturae*. Dato igitur ra-
dio circuli oſculatoris in duobus curvae punctis diverſis
erunt curvaturae ejusdem illius curvae in hisce puncti
inverſe, ut radii oſculi.

§. 46.

Contemplemur itaque curvaturam circuli tanquam incognitam, eamque modo expoſito per curvaturam parabolae, exprimamus. Ita enim viciſſim pro parabola oſculante circulus oſculator ſubſtitui poterit. Quod ſi vero data curva *nm* ſit circulus radio $= a$ deſcriptus, cujus natura ſumta $AP = x$ et $PM = y$ exprimitur aequatione $yy = 2ax - xx$; poſitis $x + \Delta x$ loco x et $y + \Delta y$ loco y fiet $2a\Delta x - 2x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta x^2 - \Delta y^2 = 0$. Comparetur haec aequatio cum ſuperiori forma generali, et erit $A = 2a - 2x$, $B = -2y$, $C = -1$, $D = 0$, et $E = -1$, ex quo fit $A^2 + B^2 = 4(aa - 2ax + xx + yy) = 4aa$, $(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)} = 8a^3$, et $AAE - ABD + BBC = -AA - BB = -4aa$. Ex quo concluditur, circulum, cujus radius $= a$, in quovis puncto oſculari parabolae verticem, cujus natura exprimitur aequatione $ss = 2ar$, id eſt verticem talis parabolae, cujus parameter duplo radio circuli aequalis eſt. Viciſſim igitur, quam curvam oſculatur vertex parabolae $ss = br$, eandem oſculabitur circulus, cujus radius eſt $= \frac{1}{2}b$. Generaliter vero quamcunque curvam *nm* oſculatur vertex parabolae, cujus aequatio eſt $ss = \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}\,r}{A^2E - ABD + B^2C}$. Proinde manifeſtum eſt eandem curvam in eodem puncto M oſculari circulum cujus radius eſt $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$, qui radius circuli oſculatoris vocari ſolet *radius oſculi* vel *radius curvaturae*.

§. 47.

§. 47.

Ex æquatione $Adx + Bdy + Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 + Fdx^3 + Gdx^2dy + Hdxdy^2 + Idy^3 + etc = 0$, ae eſt æquatio differentialis curvae completa, concluditur $Bdy = -Adx - Cdx^2 - Ddxdy - Edy^2 - Fdx^3 - Gdx^2dy - Hdxdy^2 - Idy^3 - etc$, proinde $dy = -\frac{A}{B}dx - \frac{C}{B}dx^2 - \frac{D}{B}dxdy - \frac{E}{B}dy^2 - \frac{F}{B}dx^3 - \frac{G}{B}dx^2dy - \frac{H}{B}dxdy^2 - \frac{I}{B}dy^3 - etc.$ Cum itur in caſu quo $dx = 0$ et proinde $dy = 0$, quem hic nſideramus, quando non eſt $A = 0$, et $B = 0$, ſit $= -\frac{A}{B}dx$; hic valor ubique loco dy ſubſtitui poſt, quo facto habebitur differentiale dy completum b hac forma $dy = -\frac{A}{B}dx - \frac{C}{B}dx^2 + \frac{DA}{B^2}dx^2 - \frac{EA^2}{B^3}dx^2 - \frac{F}{B}dx^3 + \frac{GA}{B^2}dx^3 - \frac{HA^2}{B^3}dx^3 + \frac{IA^3}{B^4}dx^3$ etc $= -\frac{A}{B}dx + \left(-\frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3}\right)dx^2 + \left(-\frac{F}{B} + \frac{GA}{B^2} - \frac{HA^2}{B^3} + \frac{IA^3}{B^4}\right)dx^3 +$ etc. Quodſi hæc m formula generali ſupra inventa (§. 243. *A.*) $dy = dx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \frac{1}{24}sdx^4 +$ etc, comparetur; t $-\frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3} = \frac{1}{2}q = \frac{ddy}{2dx^2}$, et proinde $\frac{C}{B} - \frac{DA}{B^2} + \frac{EA^2}{B^3} = -\frac{ddy}{2dx^2}$, et $2\left(\frac{C}{B} - \frac{DA}{B^2} + \frac{EA^2}{B^3}\right) = -\frac{ddy}{dx^2}$.

§. 48.

ram eſt *circulus oſculator*, et radius ejusdem vocari ſolet *radius oſculi* ſeu *radius curvaturae*. Dato igitur radio circuli oſculatoris in duobus curvae punctis diverſis, erunt curvaturae ejusdem illius curvae in hisce punctis inverſe, ut radii oſculi.

§. 46.

Contemplemur itaque curvaturam circuli tanquam incognitam, eamque modo expoſito per curvaturam parabolae, exprimamus. Ita enim viciſſim pro parabola oſculante circulus oſculator ſubſtitui poterit. Quodſi vero data curva *nm* ſit circulus radio $= a$ deſcriptus, cujus natura ſumta $AP = x$ et $PM = y$ exprimitur aequatione $yy = 2ax - xx$; poſitis $x + \Delta x$ loco x et $y + \Delta y$ loco y fiet $2a\Delta x - 2x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta x^2 - \Delta y^2 = 0$. Comparetur haec aequatio cum ſuperiori forma generali, et erit $A = 2a - 2x$, $B = -2y$, $C = -1$, $D = 0$, et $E = -1$, ex quo fit $A^2 + B^2 = 4(aa - 2ax + xx + yy) = 4aa$, $(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)} = 8a^3$, et $AAE - ABD + BBC = - AA - BB = -4aa$. Ex quo concluditur, circulum, cujus radius $= a$, in quovis puncto oſculari parabolae verticem, cujus natura exprimitur aequatione $ss = 2ar$, id eſt verticem talis parabolae, cujus parameter duplo radio circuli aequalis eſt. Viciſſim igitur, quam curvam oſculatur vertex parabolae $ss = br$, eandem oſculabitur circulus, cujus radius eſt $= \frac{1}{2}b$. Generaliter vero quamcunque curvam *nm* oſculatur vertex parabolae, cujus aequatio eſt $ss = \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}\,r}{A^2 E - ABD + B^2 C}$. Proinde manifeſtum eſt, eandem curvam in eodem puncto M oſculari circulum, cujus radius eſt $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2 E - ABD + B^2 C)}$, qui radius circuli oſculatoris vocari ſolet *radius oſculi* vel *radius curvaturae*.

§. 47.

Ex æquatione $Adx + Bdy + Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 + Fdx^3 + Gdx^2dy + Hdxdy^2 + Idy^3 + \text{etc} = o$, quae eſt æquatio differentialis curvae completa, concluditur $Bdy = - Adx - Cdx^2 - Ddxdy - Edy^2 - Fdx^3 - Gdx^2dy - Hdxdy^2 - Idy^3 - \text{etc}$, proinde $dy = - \frac{A}{B}dx - \frac{C}{B}dx^2 - \frac{D}{B}dxdy - \frac{E}{B}dy^2 - \frac{F}{B}dx^3 - \frac{G}{B}dx^2 dy - \frac{H}{B}dxdy^2 - \frac{I}{B}dy^3 - \text{etc}$. Cum igitur in caſu quo $dx = o$ et proinde $dy = o$, quem hic conſideramus, quando non eſt $A = o$, et $B = o$, ſit $dv = - \frac{A}{B}dx$; hic valor ubique loco dy ſubſtitui poteſt, quo facto habebitur differentiale dy completum ſub hac forma $dy = - \frac{A}{B}dx - \frac{C}{B}dx^2 + \frac{DA}{B^2}dx^2 - \frac{EA^2}{B^3}dx^2 - \frac{F}{B}dx^3 + \frac{GA}{B^2}dx^3 - \frac{HA^2}{B^3}dx^3 + \frac{IA^3}{B^4}dx^3 - \text{etc} = - \frac{A}{B}dx + (- \frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3})dx^2 + (- \frac{F}{B} + \frac{GA}{B^2} - \frac{HA^2}{B^3} + \frac{IA^3}{B^4})dx^3 + \text{etc}$. Quodſi hæc cum formula generali ſupra inventa (§. 243. *A.*) $dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \frac{1}{24}sdx^4 + \text{etc}$, comparetur; erit $- \frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3} = \frac{1}{2}q = \frac{ddy}{2dx^2}$, et proinde $\frac{C}{B} - \frac{DA}{B^2} + \frac{EA^2}{B^3} = - \frac{ddy}{2dx^2}$, et $2(\frac{C}{B} - \frac{DA}{B^2} + \frac{EA^2}{B^3}) = - \frac{ddy}{dx^2}$.

§. 48.

Hic valor in formula pro radio curvaturae inveni poteſt ſubſtitui, atque ipſe hic radius formula quadam differentiali generaliter definiri. Eum in finem notari meretur, eſſe $A^2 + B^2 = B^2 (\frac{A^2}{B^2} + 1)$ et $\sqrt{(A^2+B^2)} = B \sqrt{(\frac{A^2}{B^2} + 1)}$, proinde poſito radio curvaturae $= r$, habetur

$$r = \frac{B^3 (\frac{A^2}{B^2} + 1) \sqrt{(\frac{A^2}{B^2} + 1)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)} = \frac{(\frac{A^2}{B^2} + 1) \sqrt{(\frac{A^2}{B^2} + 1)}}{2(\frac{A^2E}{B^3} - \frac{AD}{B^2} + \frac{C}{B})}.$$

Subſtituto itaque $-\frac{ddy}{dx^2}$ loco $2(\frac{A^2E}{B^3} - \frac{AD}{B^2} + \frac{C}{B})$ invenitur $r = \frac{dx^2 (\frac{A^2}{B^2} + 1) \sqrt{(\frac{A^2}{B^2} + 1)}}{-ddy}$. Denique eſt $dx^2 (\frac{A^2}{B^2} + 1) = \frac{A^2}{B^2} dx^2 + dx^2 = dy^2 + dx^2$ proinde $dx \sqrt{(\frac{A^2}{B^2} + 1)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, et $\sqrt{(\frac{A^2}{B^2} + 1)} = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$. Ex quibus valoribus ſubſtitutis obtinetur $r = \frac{(dx^2 + dy^2) \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dxddy}$. Cum igitur ſit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ formula pro arcu curvae evaneſcente ds (§. 313. *A.*) habetur $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$, quae formula differentiam Δx conſtantem ſupponit, facili vero negotio in aliam mutatur, quae eandem non ſupponit

con-

conſtantem ſcripto $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ loco ddy (§. 425.)

quo facto ſit $r = \frac{ds^3}{-dxddy + dyddx}$.

§. 49.

Cum igitur formula pro radio curvaturae propric ſit iſta $r = \frac{(dx^2 + dy^2)(\pm\sqrt{dx^2 + dy^2})}{-dxddy}$, atque factor $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ambiguitatem ſigni involvat; incertum eſt, utrum iſta expreſſio ſit affirmativa, an negativa. Priori enim caſu concavitas curvae punctum N reſpicit, poſteriori vero convexitas. Ad hoc dubium tollendum, abſciſſa AP $= x$ augeatur differentia quadam P$p = \Delta x$, atque per p ducatur nova applicata pm, curvae apud m, et rectae curvam apud M tangenti apud μ occurrens, eritque punctum curvae m vel intra tangentem MT et axem TN poſitum, vel extra tangentem. Priori caſu curva verſus N erit concava, atque centrum circuli oſculantis in recta MN portionem verſus axem protenſam incidet; poſteriori caſu curva verſus N erit convexa, atque centrum circuli oſculantis cadit in portionem rectae MN verſus M productam. Omnis igitur dubitatio corruet, ſi inquiratur, utrum qm ſit minor, quam $q\mu$, an major. Priori enim caſu curva verſus N erit concava, et poſteriori convexa. Eſt vero $qm = \Delta y = -\frac{A}{B}\Delta x + \left(-\frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3}\right)$ $\Delta x^2 + \left(-\frac{F}{B} + \frac{GA}{B^2} - \frac{HA^2}{B^3} + \frac{IA^3}{B^4}\right)\Delta x^3 +$ etc.

Deinde ob ſimilitudinem triangulorum MTN et μMq habetur MT : MN $=$ Mq : $q\mu$ et proinde $q\mu = \frac{MN \times Mq}{MT}$. Cum igitur ſit MN $= \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$ et

$MT = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$, (§. 34.) fiet $\frac{MN}{MT} = \frac{dy}{ds}$, proinde $q\mu = \frac{dy}{dx} Mq = \frac{dy}{dx} \Delta x$, et quia $\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}$, obtinetur $q\mu = -\frac{A}{B}\Delta x$, et proinde $qm = q\mu + (-\frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3})\Delta x^2 + (-\frac{F}{B} + \frac{GA}{B^2} - \frac{HA^2}{B^3} + \frac{IA^3}{B^4})\Delta x^3 +$ etc. Concludimus igitur ex hiſce ſequens criterium, ex quo dijudicari poteſt, utrum curva verſus N convexa an concava ſit: Si fuerit $-\frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3}$ vel $\frac{-B^2C + BDA - EA^2}{B^3}$ quantitas negativa, curva verſus N eſt concava: ſi vero eadem quantitas prodeat poſitiva, curva verſus N convexa erit. Cum igitur ſit $-\frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3} = \frac{ddy}{2dx^2}$, eadem regula quoque ad formulam differentialem pro r inventam applicata hæc erit: Si inveniatur $\frac{ddy}{2dx^2}$ quantitas negativa, curva verſus N concava eſt; ſi vero ſit $\frac{ddy}{2dx^2}$ quantitas poſitiva, curva verſus N convexa eſt. Pro priori itaque caſu habemus $r = \frac{ds^2}{-dxddy}$ et pro poſteriori $r = \frac{ds^3}{dxddy}$.

§. 50.

F.319. Sit propoſita ellipſis CD, ad axem transverſum AD

AD et abſciſſarum initium A, quod centrum curvæ eſt, relata, pro qua æquatio inter coordinatas orthogonales AP et PM eſt $aayy + bbxx = aabb$; quærendus ſit radius oſculi hujus curvæ. Differentiata æquatione habetur $2aaydy + 2bbxdx + aady^2 + bbdx^2 = 0$, quæ æquatio cum formula generali comparata dat $A = 2bbx$; $B = 2aay$ $C = bb$, $D = 0$, $E = aa$. Proinde habemus

$$\frac{-AAE + ABD - B^2C}{B^3} = \frac{-4b^4x^2aa - 4a^4y^2bb}{8a^6y^3}$$

$$= \frac{-4aabb(aayy + bbxx)}{8a^6y^3} = \frac{-4a^4b^4}{8a^6y^3},$$ quæ eſt quantitas negativa et proinde indicat, curvam verſus axem cavam eſſe. Deinde eſt $A^2 + B^2 = 4(a^4yy + b^4xx)$, et $A^2E - ABD + B^2C = 4a^4b^4$, proinde

$$\frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)} = \frac{8(a^4yy + b^4xx)\sqrt{(a^4yy + b^4xx)}}{9a^4b^4}$$

$$= \frac{(a^4yy + b^4xx)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$ = radio oſculi. Quia præterea eſt $PN = y\frac{dy}{dx}$, atque ex æquatione ellipſeos differentiali concludatur $\frac{dy}{dx} = \frac{2bbx}{2aay} = \frac{bbx}{aay}$ hincque $y\frac{dy}{dx} = \frac{bb}{aa}x = PN$; fiet $MN = \sqrt{(yy + \frac{b^4}{a^4}xx)}$ et proinde $aa \times MN = aa\sqrt{(yy + \frac{b^4}{a^4}xx} = \sqrt{(a^4yy + b^4xx)}$. Ideo eſt $r = \frac{a^6 \times MN^3}{a^4b^4} = \frac{a^2 \times MN^3}{b^4}$.

Quodſi nunc in normalem MN productam ex centro A ducatur perpendicularis AO, fiet $AN = x - \frac{bb}{aa}x$,

 et

et triangulum MNP ∽ triang. ANO, proinde MN:NP $= AN : NO$ et $NO = \frac{NP \times AN}{MN} = \frac{\frac{bb}{aa}x \times x - \frac{bb}{aa}x}{\sqrt{(yy + \frac{b^4}{a^4}x^2)}}$

$$= \frac{\frac{bb}{aa}xx - \frac{b^4}{a^4}xx}{\sqrt{(yy + \frac{b^4}{a^4}xx)}} = \frac{aabbxx - b^4 xx}{a^4\sqrt{(yy + \frac{b^4}{a^4}xx)}} = \frac{aabbxx - b^4 xx}{a^4 \times MN},$$

ex quo fit $NO \times MN = \frac{aabbxx - b^4 xx}{a^4}$, et $NO \times MN + MN^2 = \frac{aabbxx - b^4 xx}{a^4} + yy + \frac{b^4}{a^4}xx = \frac{bb}{aa}xx - \frac{b^4}{a^4}xx + yy + \frac{b^4}{a^4}xx = yy + \frac{bbxx}{aa} = \frac{aayy + bbxx}{aa}$; proinde $NO + MN = MO = \frac{aayy + bbxx}{aa \times MN}$. Ex æquatione vero $aayy + bbxx = aabb$ eſt $\frac{aayy + bbxx}{aa} = bb$, ideo erit $MO = \frac{bb}{MN}$, et $MN = \frac{bb}{MO}$. Erat vero $r = \frac{a^2 \times MN^3}{b^4}$, exquo concluditur $r = \frac{a^2 b^6}{MO^3 \times b^4} = \frac{aabb}{MO^3}$.

§. 51.

F.318. Ex æquatione generali pro parabola oſculatrice $ss = ar$, in quam æquatio pro curva data nm mutatur, poſito $r = 0$ et $s = 0$, ſuppoſito, quod non ſit $y = 0$, patet, curvam ad utramque axis MN partem verſus axem eſſe curva-

curvatam. Curva enim *nm* circa punctum M cadit intra parabolam oſculantem et tangentem Tμ. Proinde cum unicuique abſciſſae poſitivæ r duplex reſpondeat applicata $\pm\sqrt{\alpha r}$ altera poſitiva altera negativa, ad abſciſſam $-r$ vero omnes adplicatae ſint imaginariæ, curva apud M ad utramque hujus puncti partem verſus axem cava erit, et uterque curvæ ramus M*m* et M*n* verſus eandem tangentis partem cadet. Quodſi in æquatione vero ſupra inventa pro curva *nm* ad axem MN relata

$$(\S.\ 42.)\ \sqrt{(A^2+B^2)} = \alpha r + \beta s + \gamma\frac{ss}{r} + \delta r^2 + \varepsilon rs + \zeta s^2 + \eta\frac{s^3}{r} + \text{etc},$$

ſit $\gamma = 0$, pro curva oſculante eſt $\sqrt{(A^2+B^2)} = \eta\frac{s^3}{r}$, quæ erit parabola cubica. Eſt vero $\gamma = \frac{A^2E - ABD + B^2C}{A^2+B^2}$, proinde fit $\gamma = 0$, ſi C = 0, D = 0, et E = 0, et æquatio pro curva ad axem MR relata erit $-A\Delta x - B\Delta y = F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 +$ etc. Cum igitur ſit radius curvaturæ $= \frac{\sqrt{(A^2+B^2)}}{2\gamma}$, patet eundem hoc caſu eſſe infinitum, quod tantum rectam tangentem indicat; recta enim circulum tangens limes eſt, ad quem circulus continuo accedit, creſcente ejus radio. Curva vero oſculans continebitur æquatione $\sqrt{(A^2+B^2)} = \eta\frac{s^3}{r}$, ſi non ſit $\eta = 0$, ex quo curvæ *nm* figura circa punctum M cognoſcitur. Cum enim abſciſſae r poſitivæ unus applicatæ s valor poſitivus et abſciſſae r negativæ F. 320.
unus adplicatae s valor negativus reſpondeat; curvæ ramus M*m* verſus unam et ramus M*n* verſus alteram tangentis partem cadet, atque mutata curvatura ramus M*n*

con-

convexitatem axi TN obvertit, cum altera Mm verſus TN cavus ſit. Proinde curva apud M habet *punctum flexus contrarii*. Ubi igitur radius circuli oſculatoris eſt finitus, ibi ejusmodi curvaturæ immutatio locum non habet. Quodſi præter γ etiam η fuerit $= 0$, quod accidet, ſi ſint F, G, H, et I $= 0$, natura curvæ oſculantis exprimetur æquatione $\gamma(A^2 + B^2) = \mu \frac{s^4}{r}$, ex qua cum unicuique abſciſſa r poſitivæ duplex applicata reſpondeat, altera affirmativa, altera negativa, ad abſciſſam r negativam vero applicatae ſint imaginariæ, iterum utraque curvæ ramus Mm et $M\bar{n}$ ad eandem tangentis partem erit poſita, et curva non immutabit curvaturam. Eodem modo generaliter patet, curvam apud M habere punctum flexus contrarii, ſi fuerit exponens ipſius s numerus impar: exiſtente vero hoc exponente numero pari, curva ejusmodi puncto carebit et proinde apud M curvaturam non immutabit.

§. 52.

Hisce methodis cognoſcitur curvatura curvarum in puncto dato, ſi punctum M fuerit ſimplex, quod eveniet, ſi in æquatione $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + \text{etc} = 0$, non uterque factor A et B fuerit $= 0$. Quodſi vero fuerit $A = 0$ et $B = 0$, hincque curva duos vel plures habeat ramos in puncto M ſe interſecantes; uniuscujusque rami curvatura in M ſcorſim, ut ante, eſt inveſtiganda. Sit enim primo M punctum duplex, et æquationis $C\frac{dx^2}{dy^2} + D\frac{dx}{dy} + E = 0$ duæ radices inæquales, quarum una ſit $= -\frac{n}{m}$, ut habeatur $\frac{dx}{dy} = -\frac{n}{m}$ ſeu $m dx + n dy = 0$, altera vero $-\frac{\nu}{\mu}$, ut ſit $\frac{dx}{dy} = -\frac{\nu}{\mu}$, vel $\mu dx + \nu dy = 0$, et quæratur

tur æquatio pro hoc ramo inter coordinatas r et s, quarum illa r in normali MN capiatur. Poni ergo debet $dx = \frac{-mr+ns}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ et $dy = \frac{-ms-nr}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, ut ſit $r = \frac{-mdx-ndy}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ et $s = \frac{ndx-mdy}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$. Jam vero eſt $-Cdx^2 - Ddxdy - Edy^2 = Fdx^3 + Gdx^2dy + Hdxdy^2 + Idy^3 + Kdx^4 + Ldx^3dy + Mdx^2dy^2 + Ndxdy^3 + Ody^4 +$ etc. quæ æquatio ſubſtitutis valoribus pro dx et dy eam recipiet formam $(-mdx-ndy)(\mu dx+\nu dy) = r\sqrt{(m^2+n^2)} \times (\mu dx + \nu dy) = \alpha r^3 + \beta r^2 s + \gamma r s^2 + \delta s^3 + \varepsilon r^4 + \zeta r^3 s + \eta r^2 s^2 + \vartheta r^2 s^3 + \iota s^4 +$ etc, ex qua concluditur $\frac{r\sqrt{(m^2+n^2)}}{r} \times \frac{\mu dx+\nu dy}{s} = \alpha\frac{r^2}{s} + \beta r + \gamma s + \delta\frac{s^2}{r} + \varepsilon\frac{r^3}{s} + \zeta r^2 + \eta rs + \vartheta s^2 + \iota\frac{s^3}{r}$ + etc. Quia igitur eſt $s = \frac{ndx-mdy}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, fiet $\frac{\mu dx+\nu dy}{s} = \frac{(\mu dx+\nu dy)\sqrt{(m^2+n^2)}}{ndx-mdy}$ functio nullius dimenſionis ipſarum dx et dy, quæ poſito $\frac{dx}{dy} = -\frac{n}{m}$ abit in quantitatem conſtantem. Poſito itaque $r = 0$, quo caſu etiam eſt $s = 0$, $dx = 0$, $dy = 0$, ita tamen ut ratio $\frac{s^2}{r}$ ſit finita, habemus talem pro curva oſculante æquationem $A = \delta\frac{s^2}{r}$, ſi non eſt $\delta = 0$, vel $ss = \frac{A}{\delta}r$, quæ eſt pro parabola apolloniana, cujus parameter eſt $\frac{A}{\delta}$. Curva igitur quoque habet circulum oſcu-

oſculatorem in M, cujus radius eſt $\frac{A}{2\delta}$. Si vero ſit $\delta = 0$, æquatio pro curva oſculante unam habet ex formis ſequentibus $s^3 = Cr$, vel $s^4 = Cr$, vel generaliter $s^k = Cr$, ex quibus ut ante colligitur, curvæ ramum in M vel punctum flexus contrarii habere, vel tali carere. Prius ſcilicet evenit, ſi k fuerit numerus impar, poſterius vero, ſi ſit k numerus par. Eodem modo judicandum erit de altero ramo per punctum duplex M tranſeunte.

§. 53.

Si fuerit M punctum curvæ triplex, cujus tangentes determinantur æquatione $\frac{dx^3}{dy^3} + \frac{G}{F} \times \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{H}{F} \times \frac{dx}{dy} + \frac{I}{F} = 0$, cujus radices ſint $-\frac{n}{m}$, $\frac{\nu}{\mu}$, et $\frac{q}{p}$, ut ſit $mdx + ndy = 0$, $\mu dx - \nu dy = 0$, $pdx - qdy = 0$; ſimilibus ratiociniis eruuntur curvæ oſculatrices. Captis enim abſciſſis in normali MN ab initio abſciſſarum M, ut ante, fiet $(-mdx - ndy)(\mu dx + \nu dy) \times (pdx + qdy) = \alpha r^4 + \beta r^3 s + \gamma r^2 s^2 + \delta r s^3 + \epsilon s^4 + \zeta r^5 + \eta r^4 s + \vartheta r^3 s^2 + \iota r^2 s^3 + \kappa r s^4 + \lambda s^5 +$ etc. et $\frac{(-mdx - ndy)}{r} \times \frac{\mu dx + \nu dy}{s} \times \frac{pdx + qdy}{s}$

$$= \alpha \frac{r^3}{ss} + \beta \frac{r^2}{s} + \gamma r + \delta s + \epsilon \frac{s^2}{r} + \zeta \frac{r^4}{s^2} + \eta \frac{r^3}{s}$$

$$+ \vartheta r^2 + \iota rs + \kappa s^2 + \lambda \frac{s^3}{r} + \text{etc.}$$

Quare cum ſint $\frac{\mu dx + \nu dy}{s}$ et $\frac{pdx + qdy}{s}$ functiones nullius dimenſionis variabilium dx et dy, quæ poſito $\frac{n}{m}$ loco $\frac{dx}{dy}$ abeunt

ouunt in quantitates conſtantes, habemus pro curva oſculante æquationem hujus formæ: $A = \varepsilon\frac{ss}{r}$, niſi ſit $\varepsilon = 0$, quo caſu eſt $A = \lambda\frac{s^3}{r}$, etc, ita ut hoc caſu quoque curva oſculans ſit parabolica generis $s^k = Cr$. Simili modo judicium erit ferendum de quovis reliquorum ramorum per punctum M tranſeuntium. Atque generaliter ſi punctum M ſit multiplex quodcunque, alius formæ æquationem pro curva oſculante prodire non poſſe, facile patet, ſi nimirum quilibet ramus per punctum M tranſiens propriam ſuam habeat tangentem.

§. 45.

Aliæ autem pro hac æquatione prodibunt formæ, ſi duorum pluriumve ramorum tangentes in puncto M coincidant. Si enim evaneſcentibus A et B in æquatione $0 = Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 + Fdx^3 + Gdx^2dy + Hdx\,dy^2 + Idy^3 +$ etc, radices æquationis $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{D}{C} \times \frac{dx}{dy} + \frac{E}{C} = 0$ ſint æquales, quo caſu ambo rami in puncto duplici M communem habent tangentem; qualibet radice exiſtente $= -\frac{n}{m}$, erit $Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 = (mdx + ndy)^2$. Proinde æquatione ad coordinatas r et s translata prodibit hujusmodi æquatio $(mdx + ndy)^2 = rr(m^2 + n^2) = \alpha r^3 + \beta r^2 s + \gamma r s^2 + \delta s^3 + \varepsilon r^4 + \zeta r^3 s + \eta r^2 s^2 + \vartheta r s^3 + \iota s^4 +$ etc, proinde $m^2 + n^2 = \alpha r + \beta s + \gamma\frac{s^2}{r} + \delta\frac{s^3}{rr} + \varepsilon rr + \zeta rs + \eta s^2 + \vartheta\frac{s^3}{r} + \iota\frac{s^4}{rr} +$ etc. Hic primum ſpectandus eſt terminus $\delta\frac{s^3}{rr}$, qui ſi adſit, reliqui omnes evanſcunt, caſu $r = 0$ et $s = 0$,

et

et proveniat æquatio formæ $s^3 = Crr$ pro curva oſculante, et quia applicata s eundem obtinet valorem, ſive abſciſſa r ſumatur affirmativa, ſive negativa, curva in M habet *cuſpidem* ſeu *punctum reflexionis*, atque in duos ramos Mm, Mμ divaricatur, ſe mutuo in M contingentes, atque tangenti Mt convexitatem obvertentes.

Si fuerit $\delta = o$, fiet $m^2 + n^2 = \gamma \frac{s^2}{r} + \varepsilon \frac{s^4}{rr}$ pro curva oſculante, quæ æquatio in duos factores imaginarios vel reales formæ $ss = Cr$ reſolvi poteſt. Si prius ſit, curva apud M habet punctum conjugatum. Si poſterius, duo curvæ rami ſe apud M mutuo contingent. Sic generaliter obtinebitur aut æquatio in duos alias formæ $s^k = Cr$ reſolubilis, quo caſu prodibunt tot diverſæ figuræ, quot dantur combinationes binorum ramorum, qui in M punctum ſimplex conſtituunt, *qui rami primi ordinis* vocari poſſunt, aut invenietur æquatio, quæ non reſolubilis eſt in duas alias, et hujus formæ erit $s^5 = Crr$, $s^7 = Crr$, $s^9 = Crr$ etc, qui rami cum eo, ad quem $s^3 = Crr$, *rami ſecundi ordinis* poſſunt vocari. Atque hi rami ſecundi ordinis omnes in M habebunt cuſpidem, uti præbuit æquatio $s^3 = Crr$.

§. 55.

Si tres tangentes ramorum, quæ per M tranſeunt, fuerint coincidentes; vel tres rami primi ordinis ſe in eodem puncto contingent, vel in M erit contactus unius rami ſecundi ordinis cum uno primi ordinis, vel unicus *ramus tertii ordinis* tranſibit per punctum M, quorum ramorum tertii ordinis oſculatrices exprimentur æquationibus formæ $s^k = Cr^3$, ubi k eſt numerus integer ternario major, neque per ternarium diviſibilis. In M itaque erit punctum flexus contrarii, ſi k eſt numerus impar. Si quatuor ramorum per M tranſeuntium tangentes coincidunt; vel quatuor rami primi ordinis, vel duo primi et unus ſecundi, vel duo ſecundi, vel

unus

unus primi et unus tertii ordinis ſe in eodem puncto M tangent, vel denique unus ramus quarti ordinis per M tranſibit, cujus oſculatrix definitur æquatione $s^k = Cr^4$, in qua eſt k numerus integer quaternario major, quæ æquationes omnes praebent cuſpidem, uti rami ſecundi ordinis. Eodem modo natura ramorum *quinti*, *ſexti*, et *ſuperiorum ordinum* inveſtigatur. Ratione autem figurae rami quinti, ſeptimi, noni, omniumque imparium ordinum conveniunt cum ramis primi ordinis, quorum duplex eſt figura, vel cum vel abſque puncto flexus contrarii. Rami autem ſexti, octavi et omnium parium ordinum ratione figurae convenient cum ramis ſecundi et quarti ordinis. Cuſpide enim omnes erunt prædita.

§. 56.

Ex præcedentibus jam deducitur ſolutio problematis: *ſi data ſit æquatio curvæ inter abſciſſam* x *et applicatam* y, *invenire ejusdem puncta flexus contrarii.* Ex data enim æquatione quæri debet $\frac{ddy}{dx^2}$, tumque ex æquatione $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ inveſtigari debent radices, quae pro x ſubſtitutae puncta flexus contrarii indicabunt, ſi adſint. Cautelae enim hic obſervandae ſunt ſimiles iis, quibus ſupra *Sect. XVII Anal. Math.* pro maximis et minimis inveniendis uſi ſumus. Id enim tantum ex §. 47. ſequitur, quod eo caſu, quo curva habet punctum flexus contrarii, ſit $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Viciſſim vero non ſequitur, quoties eſt $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, toties adeſſe punctum flexus contrarii. Limitationes neceſſariae ex §. 47. deducendæ ſunt. Facilius autem ſic quoque erui poſſunt. Poſita AP $= x$, PM y, ſi TM curvam apud M tangat, et MR axi parallela ſit; creſcente AP $= x$ differentia valde parva $\Delta x = Pp$, et du-

cta applicata pm, ſi ea ſecet parallelam MR apud q, curvam in m, et tangentem in μ, ſequitur, caſu, quo M eſt punctum flexus contrarii, ſi pro $Ap = x + \Delta x$ ſit $pm < p\mu$; pro $Ap = x - \Delta x$ eſſe debere $pm > p\mu$ et viciſſim. Sed eſt tang. μMR $= \frac{dy}{dx}$, et proinde $q\mu = \frac{\Delta x dy}{dx}$. Praeterea

pro $Ap = x + \Delta x$ eſt

$$pm = y + \frac{\Delta x dy}{1.dx} + \frac{\Delta x^2 ddy}{1.2.dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4y}{1.2.3.4.dx^4} + \text{etc,}$$

atque pro $Ap = x - \Delta x$ habetur

$$pm = y - \frac{\Delta x dy}{1.dx} + \frac{\Delta x^2 ddy}{1.2.dx^2} - \frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4y}{1.2.3.4.dx^4} - \text{etc,}$$

F.320. Hinc patet, quod caſu $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, punctum M certo ſit punctum flexus contrarii, ſi non ſimul ſit $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Hoc enim caſu $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ utraque adplicata pm tam pro $x + \Delta x$, quam pro $x - \Delta x$, vel major vel minor eſt valore reſpondente ipſius $p\mu$, ſi non ſit $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$, unde punctum flexus contrarii locum non habet. Quodſi vero ſimul ſit $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$, non vero $\frac{d^5y}{dx^5} = 0$, iterum ad punctum flexus contrarii recte concluditur. Generatim igitur evaneſcente $\frac{ddy}{dx^2}$, vel ſimul $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, vel praeterea quoque $\frac{d^5y}{dx^5}$, $\frac{d^6y}{dx^6}$; ita ut numerus terminorum evaneſcentium impar ſit; punctum flexus contrarii

trarii adeſſe certo concluditur. Sin vero numerus terminorum evaneſcentium ſit par, nullum punctum flexus contrarii locum habet.

§. 57.

Ad cuſpides ſeu puncta reflexionis invenienda quod adtinet, judicium ex §. 50 et 51. deſumendum erit. Primo enim patet, omne punctum, ubi datur cuſpis in curva, eſſe punctum curvae multiplex. Niſi igitur curva propoſita talis ſit, quae uno ſaltem vel pluribus punctis duplicibus ſit praedita; ea etiam plane nullam habere poteſt cuſpidem. Primo igitur ex §. 40. quaeri debet, num et quot puncta multiplicia habeat curva propoſita. Quaerenda eum in finem erit aequatio differentialis completa aequationis pro curva data propoſitae formae $A dx + B dy + C dx^2 + D dx dy + E dy^2 + F dx^3 + G dx^2 dy + H dx dy^2 + I dy^3 +$ etc $= 0$. Ubi ex tribus iſtis aequationibus $A = 0$, $B = 0$, et ipſa propoſita ſi inventi ſint valores $x = f$, $x = g$, etc, et $y = p$, $y = q$, etc; inquirendum eſt, utrum a ſubſtitutus $x = f$, et $y = p$, vel $x = g$, et $y = q$ etc, radices aequationis $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{D}{C} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{E}{C}$ aequales fiant, quod ſi accidat, aderit cuſpis ſub limitationibus §. 54. expoſitis, idque pro eo caſu, quo inventum curvae punctum duplex eſt. Pro curvae puncto ſi triplex, vel quadruplex, vel utcunque aliud multiplex inveniatur, judicium ſecundum §. 55. erit inſtituendum. Caeterum hoc quoque notari meretur, quo eo in caſu, quo curva apud M habet cuſpidem, qualem praebet aequatio $r^3 = Crr$, applicata PM ſit *maximum vel minimum ſecundae ſpeciei*, quale §. 265. *Anal. Math.* deſcripſimus, quare ipſa methodus expoſita quoque maximis et minimis ſecundae ſpeciei inveniendis accommodata eſt.

 SECT.

SECTIO VI.

DE SIMILITVDINE, DIAMETRIS ET CENTRIS CVRVARVM.

§. 58.

Omnis aequatio pro linea algebraica praeter variabiles x et y quasdam continet quantitates conſtantes a, b, c, etc, quae in hoc negotio ſemper lineas rectas denotare aſſumuntur, atque a magnitudine harum rectarum conſtantium, valores applicatae y pro quovis ipſius x valore pendent. Propoſita vero duabus curvis ac ſumta abſciſſa quacunque in axe unius tumque alia abſciſſa in axe alterius in ratione data, ſi in utraque curva angulus coordinatarum idem ſit; praeterea in una tot applicatae y valores ac in altera inveniantur, et denique adplicatae homologae ſint in ratione abſciſſarum; iſtae curvae dicuntur *ſimiles*. Ex quo patet, quod omnes curvae ſimiles ejusdem ſint ordinis. Atque ſi in aequatione quadam propoſita praeter binas variabiles x et y, unica tantum deprehendatur conſtans a, diverſae quidem prodibunt curvae, ſi ipſi a hic vel alius tribuatur valor conſtans, ſed omnes iſtae curvae, erunt inter ſe ſimiles. Data ſit aequatio hujus generis quaecunque, ut $y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0$, ubi neceſſe eſt, ut quivis terminus ſit productum ex tot lineis, quot exponens maximae dignitatis ipſius y continet unitates. Sit
322. AC $= a$, atque curva AMB ea, quae aequatione $y^3 -$
323. $2x^3 + ayy - axx + 2aay = 0$ exprimitur, ſi AP $= x$ et
PM $= y$. Loco conſtantis $a =$ AC jam aſſumatur quicunque alius valor ac, ſitque AC : ac $= n : m$, et proinde

nde $ac = \frac{m}{n}$AC. Capiatur $ap = \frac{m}{n}$AP, erit $pm = \frac{m}{n}$PM. Si enim in propoſita aequaticne loco a, x, y, reſpective ponatur $\frac{m}{n}a$, $\frac{m}{n}x$, $\frac{m}{n}y$; omnes ermini per $\frac{m^3}{n^2}$ erunt multiplicati, atque ideo $\frac{m}{n}y$ alis ſit functio ipſius $\frac{m}{n}x$, qualis erat y ipſius x.

§. 59.

Haec conſtans vocari poteſt *parameter* curvae in enſu aliquo latiori, ſicque ejusmodi curvae, de quibus unc ſermo eſt, talem habent proprietatem, ut ſumtis bſciſſis AP, ap; in rationc parametrorum, ratio appliatarum PM et pm eadem inveniatur. Iisdem vero poitis non tantum applicatae homologae, ſed et omnes aliæ ectæ ſimiliter in curva ductae, quin et arcus curvarum M et am parametrorum rationem tenebunt. Præterea areae ſimiles APM et apm erunt in ratione parametrorum duplicata. Tangentes denique in punctis homologis M et m æquali ad axem inclinatae erunt angulo, atque radii oſculi ibidem tenebunt rationem parametrorum. Omnis circulus exprimi poteſt æquatione $yy = 2ax - xx$, et omnis parabola æquatione $yy = ax$. Proinde omnes circuli, ut et omnes parabolae inter ſe ſimiles erunt.

§. 60.

Si propoſita ſit æquatio curvae cujusdam, quæ præer conſtantem a plures alias in ſe complectitur contantes, b, c, e, f, etc; manifeſtum eſt, ſi loco valois a ſumatur $\frac{m}{n}a$, præterea $\frac{m}{n}b$ loco b, $\frac{m}{n}c$ loco c,

 $\frac{m}{n}$

$\frac{m}{n}e$ loco e, $\frac{m}{n}f$ loco f, etc, donec nulla conſtans ſuper ſit, aliam quidem æquatione ſic mutata prodire debere curvam, ſed talis proprietatis, ut omnes conſtantes, quibus hæc curva determinatur, prioris curvae conſtantibus homologis proportionales ſint. Ideo neceſſe eſt, ut nova curva hac conſtantium mutatione orta priori ſit ſimilis. Scripto enim $\frac{m}{n}a$, $\frac{m}{n}b$, $\frac{m}{n}c$, etc, $\frac{m}{n}x$, $\frac{m}{n}y$, reſpective loco a, b, c, etc, x et y in æquatione propoſita iterum omnes termini per $\frac{m^s}{n^s}$, ſi nimirum curva ſit ordinis s, erunt multiplicati, atque proinde $\frac{m}{n}y$ talis ſit ipſius $\frac{m}{n}x$ functio qualis, antea erat y ipſius x functio. Ellipſes itaque et hyperbolae ſimiles ſunt, ſi inter binos earum axes principales eadem ratio intercedat, vel quoque ſi parametri earum ſint ut axes. Caeterum quemadmodum in curvis ſimilibus abſciſſae et applicatae homologæ in eadem ratione ſive augentur, ſive minuuntur; ita ſi abſciſſae aliam ſequantur rationem, aliam vero applicatae, curvae non amplius ſimiles manent; hoc vero caſu *affines* vocantur, ita ut affinitas ſimilitudinem ſub ſe tanquam ſpeciem complectatur, quia curvae affines in ſimiles abeunt, ſi ambae illae rationes, quas abſciſſae et applicatae ſeorſim ſequuntur, aequales evadant.

§. 61.

Si linea recta tangat lineam ſecundi ordinis in dato puncto M; ex puncto contactus alia educi poteſt recta quae omnes curvae ordinatas tangenti parallelas bifariam ſecat, quae recta diameter lineae ſecundi ordinis vocatur.

tur. Atque haec diameter iſta gaudet proprietate, ut ſumta eadem pro axe et angulo coordinationis eo, ſub quo diameter ad tangentem inclinatur, cuivis abſciſſae reſpondeat duplex applicata, una poſitiva altera negativa, quarum vero prior poſteriori abſolute ſpectatae æqualis eſt. Quia itaque ſumma algebraica ejusmodi binarum applicatarum nihilo æqualis eſt, atque ſimilis axis proprietas nonnunquam in aliis curvis obſervatur, ſignificatio vocis diametri aliquantum extendi ſolet in Geometria Generali, atque omnis axis curvae *diameter* vocari, qui hac proprietate eſt praedita, ut ſumma algebraica omnium adplicatarum cuivis abſciſſae reſpondentium ſit nihilo æqualis. Secundum hanc diametri notionem inquirendum jam erit, utrum aliae quoque curvae praeter conicas ſectiones diametro ſint præditae.

§. 62.

Quam ob rem conſideremus æquationem pro lineis tertii ordinis generalem $\alpha x^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta x^2 + \vartheta y + \iota x + k = 0$, ex qua patet, unicuique abſciſſae x vel unam vel tres reſpondere applicatas reales, niſi ſit $\alpha = 0$. Sit $\alpha = 1$ atque ponamus tres adeſſe applicatas reales, eæque dabuntur ex iſta aequatione $y^3 + (\beta x + \epsilon)yy + (\gamma xx + \zeta x + \vartheta)y + \delta x^3 + \eta xx + \iota x + k = 0$. Erit itaque ſumma trium applicatarum $= -(\beta x + \epsilon)$, ſumma productorum ex ſingulis binis $= \gamma xx + \zeta x + \vartheta$, atque productum omnium $= -(\delta x^3 + \eta xx + \iota x + k)$. Sit itaque linea quaedam tertii ordinis propoſitae ad axem BD relata, ad quem ſub dato angulo applicatae ſint ordinatae MNn, curvam in tribus punctis ſecantes. Hinc poſita abſciſſa BQ $= x$, applicata y triplicem habet valorem, QM, QN, et $-$ Qn, unde erit QM + QN $-$ Qn $= -\beta x - \epsilon$, Diameter itaque curvae talem habere debet poſitionem, ut in aequatione $y^3 + (\beta x + \epsilon)yy +$ etc; ſit $\beta x + \epsilon = 0$. Atque haec ratiocinia ad curvas ſuperiorum ordinum facile

extendi poſſunt. Poteſt vero poſitio talis rectae ex æquatione pro curva data inveniri ſic raciocinando·

§. 63.

F.324. Sit curva propoſita curva CMNn ordinis n, cujus æquatio ad abſciſſam AP $= x$, et ordinatas PM $= y$ relata iſta eſt $y^n + (ax + b)y^{n-1} + (cxx + dx + e)y^{n-2} + (fx^3 + gxx + hx + i)y^{n-3}$ + etc $= 0$. Ducta præterea ſit recta AQD ad eundem axem, abſciſſam AP $= x$ et applicatam PQ $= u$ relata. Partes præterea QM, QN, Qn, adplicatæ PM vocentur z, tunque in æquatione pro curva CMNn ſubſtituatur $u \pm z$ loco y, quo facto prodibit æquatio, cujus terminus primus erit z^n, et reliquorum coefficientes, ſi nimirum æquatio ſecundum dimenſiones ipſius z ordinetur, ſic procedent: $nu + ax + b$; $\frac{n.\,n-1}{1.\,2}u^2 + \frac{n-1}{1}(ax + b) + cx^2 + dx + e$; $\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}u^3 + \frac{n-1.\,n-2}{1.\,2}(ax+b)u^2 + \frac{n-2}{1}(cxx + dx + e) + fx^3 + gx^2 + hx + i$, etc. Hujus æquationis radices erunt valores QM, QN, Qn, etc. Ut itaque horum valorum ſumma algebraica fiat $= 0$, poni debet $nu + ax + b = 0$, atque hæc ipſa æquatio poſitionem diametri AD definiet.

§. 64.

Sed ex eadem æquatione per ſubſtitutionem ipſius $u \pm z$ loco y inventa ſequentia etiam deducuntur conſectaria. Summa productorum ex ſingulis binis valoribus QM, QN, etc, erit $= 0$, ſi fuerit coefficiens

$$\frac{n.\,n-1}{1.\,2}u^2 + \frac{n-1}{1}(ax+b) + cxx + cx + e = 0.$$

Sed hæc eſt æquatio pro linea ſecundi ordinis, quæ ſecabit omnes ipſius QMNn applicatas ea lege, ut ſumma productorum ex ſingulis nihilo æquetur. Præterea ſumma productorum ex ſingulis ternis valoribus QM, QN, etc. erit

erit = o, ſi ſit coefficiens $\frac{1 . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3 .} u^3 + \frac{n-1 . n-2}{1 . 2 .}$ $(ax + b) u^2 + \frac{n-2}{1} (cxx + \delta x + e) u + fx^3 + gxx + hx + i$ = o, quæ eſt æquatio pro linea tertii ordinis, applicatas curvæ QMNn ea lege ſecans, ut ſumma productorum ex ſingulis tribus ſegmentis evadat nihilo aequalis. Poſſunt haec ratiocinia etiam per coefficientes ſequentes omnes continuari; atque curvæ ſecundum has leges applicatas alterius cujusdam curvae ſecantes *diametri curvilineæ* vocantur. Quaevis itaque curva tertii ordinis et quævis alia ſuperioris ordinis habet diametrum curvilineam ordinis ſecundi. Quaevis curva quarti et ſuperioris ordinis habet diametrum curvilineam ſecundi et aliam tertii ordinis et generaliter quaevis curva ordinis n habet diametrum curvilineam ordinis 2, 3, 4, - - - $n - 1$.

§. 65.

Vox itaque *diametri curvæ* nonnunquam in admodum lata ſumitur ſignificatione. Nihilo tamen minus potiſſimum ejusmodi linea recta hoc nomine indigitari ſolet, quae integram curvam in duas partes dividit inter ſe aequales et ſimiles, ita ut ſumta eadem recta pro axe ad quamvis abſciſſam cuilibet applicatae orthogonali poſitivae reſpondeat negativa priori abſolutae ſpectatae aequalis. Ejusmodi diameter a Neutono *diameter abſoluta* vocatur. Sic parabola unam ejusmodi habet diametrum; ellipſis vero et hyperbola duas; circulus denique innumeras. Sit AB axis curvae cujusdam propoſitae, atque diviſo integro curvae plano in quatuor regiones Q, R, S, T, ducta recta EF per initium abſciſſarum C axi AB normali; ſumta x poſitiva, pro applicatis y poſitivis oritur curvae portio in regione Q ſita, et pro y negativis portio curvae in regione R ſita. Pro x vero negativa et y poſitivis portio curvae in regione S F.325.

 ſita

ſita, y vero negativis portio curvae in regione T ſita prodibit. Portiones itaque in regionibus Q et R ſitae inter ſe erunt aequales et ſimiles, ſi aequatio ita fuerit comparata, ut non mutetur, etiamſi $-y$ loco $+y$ ſcribatur. Sed omnis poteſtas exponentis paris ipſius y hac gaudet propietate; quare ſi in aequatione pro curva nullae poteſtates impares ipſius y occurrant, curvae portiones in regionibus Q et R ſitae erunt inter ſe aequales et ſimiles. Ergo hoc caſu recta AB erit diameter curvae abſoluta. Omnes itaque hujus generis curvae algebraicae in hac aequatione generali continentur: $\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta yy + \epsilon x^3 + \zeta xyy + \eta x^4 + \vartheta x^2 y^2 + \iota y^4 +$ etc $= 0$, quae expreſſio eſt functio rationalis ipſarum x et yy. Hoc enim caſu quoque portiones in regionibus S et T ſitae inter ſe aequales et ſimiles ſunt.

§. 66.

Praetera portiones in regionibus Q et S ſitae erunt aequales et ſimiles, ſi aequatio pro curva ita ſit comparata, ut eadem non mutetur, licet $-x$ loco $+x$ ponatur. Si igitur Z fuerit functio rationalis ipſarum xx et y; aequatio $Z = 0$, erit pro curva, quam recta EF in duas partes ſimiles et aequales dividit. Portiones denique in regionibus Q et T, ſeu R et S oppoſitis ſimiles et aequales erunt, ſi aequatio inter coordinatas x et y ita fuerint comparata, ut poſita utraque x et y negativa nullam ſubeat mutationem. Si fuerit $Z = 0$ aequatio pro his curvis, primo patet, ſi Z fuerit functio ipſarum x et y parium dimenſionum, ſeu ſi fuerit aggregatum ex quotcunque functionibus homogeneis parium dimenſionum, hanc aequationem $Z = 0$ eam habere conditionem quae requiritur. Quodſi vero Z fuerit aggregatum quotcunque functionum homogenearum imparium dimenſionum ſumtis x et y negativis, Z abibit in $-Z$ atque tum erit $-Z = 0$ et proinde pariter $Z = 0$. Duplex itaque eſſe poteſt forma aequationis pro curvis, quae in

in regionibus oppoſitis Q et T, portiones habent aequales et ſimiles, Una erit $\alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta y^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta x^2 y^2 + \vartheta xy^3 + \iota y^4 + \text{etc} = 0$; altera vero $xx + \beta y + \gamma x^3 + \delta x^2 y + \varepsilon xy^2 + \zeta y^3 + \eta x^5 + \vartheta x^4 y + \iota x^3 y^2 + \kappa x^2 y^3 + \text{etc} = 0$. Hoc itaque caſu recta AB erit ita comparata, ut abſciſſis oppoſitis aequalibus reſpondeant applicatae oppoſitae aequales; atque ejusmodi rectam DE BRAGELONGE vocat *contra-diametrum*. Si itaque una eademque recta ſimul ſit diameter et contra-diameter, in regiones Q, R, S, T, cadent quatuor curvae portiones inter ſe aequales et ſimiles, quo caſu curvae aequatio ſub hac formae generali comprehenditur $\alpha + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta x^4 + \varepsilon x^2 y^2 + \zeta y^4 + \eta x^6 + \vartheta x^4 y^2 + \iota x^2 y^4 + \kappa y^6 + \text{etc} = 0$, quae erit functio rationalis ipſarum xx et yy. Curvas diametro praeditas EVLERVS vocat *diametraliter aequales*: eas vero, quae habent contra-diametrum adpellat *alternatim aequales*.

§. 67.

Si curvae MA*m* contra-diameter eſt *p*P; et initium F. 326.
abſciſſarum A; erit pro AP = A*p*, quoque PM = *pm*, unde ob congruentiam triangulorum APM et A*pm*, ſemper erit recta AM = rectae A*m*. Punctum itaque A ejus erit conditionis, ut omnis recta M*m* per idem ducta et curvae utrinque occurrens in ipſo A biſecetur; atque ob hanc proprietatem tale punctum vocatur *curvae centrum*. Omnes itaque curvae alternatim aequales centro erunt praeditae. Praeterea patet, quod omnis recta per curvae centrum ducta ſit ipſius contra-diameter. Ducatur enim ejusmodi recta per centrum A quaecunque *q*Q, atque ex puncto M ad eandem ordinata rectangula vel adeo obliquangula quaecunque MQ. Ducatur AM, eaque ad oppoſitam curvae partem uſque ad *m* producatur, tumque ex puncto *m* ad novum axem ducatur applicata *mq*; erunt triangula AQM et A*qm* congruentia ob AM = A*m*, et angulos homologos aequales.

§. 68.

§. 68.

Ex praeſtructis hiſce principiis deducuntur ſolutiones problematum; *ſi data ſit aequatio pro curva quadam, inquirere, utrum curva habere poſſit diametrum vel centrum, nec ne.* Subſtituendo enim in aequatione data $mu + nt - f$ loco x et $nu - mt - g$ loco y (§. 169.) habetur aequatio pro curva generalis ad axem quemcunque, abſciſſam, t, et applicatam u relatam. Tum ordinata aequatione ſecundum dimenſiones ipſius u, coefficientes terminorum ubi u imparium eſt dimenſionum eſſe debent $= 0$, atque ex iſtis aequationibus concludi poteſt debita relatio coefficientium aequationis conſtantium, ut nova axis fiat curvae diameter. Quo praeterea curva habeat centrum, neceſſe eſt, ut aequatione in membra ſecundum dimenſiones variabilium x et y diſtincta, (§. 164.) omnia membra quae numero pari a ſupremo diſtant, nihilo ſint aequalia. Scribatur itaque $m + t$ loco x et $n + u$ loco y, atque peracta aequationis transformatione et reductione, omnia membra a ſupremo numero pari diſtantia ponantur $= 0$, tumque ex his aequationibus conveniens coefficientium aequationis eliciatur relatio.

§. 69.

Data ſit aequatio generalis pro lineis ſecundi ordinis $a + by + cx + \delta yy + exy + fxx = 0$, quae facta ſubſtitutione $m + t$ loco x et $n + u$ loco y abit in ſequentem:

$$\delta uu + etu + ftt$$
$$+ (b + em + 2\delta n)u + (c + en + 2fm)t$$
$$+ (a + bn + cm + \delta nn + enm + fmm$$

unde habentur aequationes $b + em + 2\delta n = 0$ et $c + en + 2fm = 0$, et quibus concluditur $m = \frac{be - 2c\delta}{4\delta f - ee}$ et $n = \frac{ce - 2bf}{4\delta f - ee}$. Ergo quaevis curva ſecundi ordinis centro

gau-

gaudet, cujus poſitio his æquationibus determinatur. Quando $4df - ee = o$, centrum infinito ab initio abſciſſarum diſtat intervallo. Atque ſi præterea $be - 2cd = o$, fiunt $n = \frac{o}{o}$ et $m = \frac{o}{o}$; hoc vero caſu curva complexa eſſe invenitur, et æquatio ſic mutata $a + by + bx\sqrt{\frac{f}{d}} + dyy + 2xy\sqrt{df} + fxx = o$ exprimit ſyſtema duarum rectarum. Hæc ratiocinia ad curva ſuperiorum ordinum quomodo adplicanda ſint, cuivis adtendenti ſatis clarum eſt.

SECTIO VII.

DE INVENTIONE CVRVARVM EX DATIS PROPRIETATIBVS.

§. 70.

Satis prolixe hucusque in eo fuimus occupati, ut explicetur, quomodo ex data æquatione pro curva algebraica ejusdem figura et palmariae proprietates deduci queant. Reſtat, ut explicatis addamus ſpecimina quædam methodi, qua ex datis curvæ cujusdam palmariis proprietatibus inveſtigari debeat æquatio naturam illius curvæ exprimens. De proprietatibus curvarum geometricis hoc loco tantum ſermonem eſſe poſſe, facile patet. Ac primo quidem ad hoc negotium ſpectant omnia problemata geometrica indeterminata, ubi locus cujusdam puncti indeterminatus in dato plano definiendus eſt. Ejusmodi enim problematis indeterminati conditio-

ditiones eas exprimunt loci quæſiti proprietates, ex quibus æquatio pro loco quæſito eſt elicienda. Atque hujus generis problema eſt, quod ſequitur.

§. 71.

F.327. *Norma ABC ad circulum ſic applicata, ut apex anguli recti B in peripheriam cadat, ductaque per punctum D, in quo crus BC peripleriam ſecat, recta DE, diametri BF perpendiculari, invenire punctum E, in quo hæc recta ſecat crus alterum AB normae ABC.* Sit diameter BF $= a$, et BG $= x$, erit GF $= a - x$. Præterea GD $= ax - xx$; atque ſi GE $= y$, ob GD : GB $=$ GB : GE, fiet $ax - xx : xx = xx : yy$, vel $a - x : x = xx : yy$. Ergo æquatio pro curva quæſita eſt $x^3 = ay^2 - xy^2$, et locus inveniendus eſt ordinis tertii. Jam ipſius curvæ figura et reliquæ proprietates ex æquatione inventa facile deteguntur. Quia enim primo eſt $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$; duæ reperiuntur adplicatæ y ſibi oppoſitæ ad quamlibet abſciſſam x abſolute ſpectatæ æquales. Ergo BF eſt curvæ diameter abſoluta. Si $x = 0$, habetur $y = \pm 0$, et proinde diameter ſecat curvam in ipſo abſciſſarum initio. Pro x negativo ambæ applicatæ fiunt imaginariæ. Pro $x = a$; habetur $y = \pm \sqrt{\frac{1}{0}} = \infty$, ergo recta diametro BF ad F perpendicularis eſt curvæ aſymtota. Pro quovis $x > a$; ambæ applicatæ iterum ſunt impoſſibiles, et proinde integra curva intra duas parallelas diametro BF in punctis B et F normaliter inſiſtentes contenta erit. Hæc curva a VETERIBVS *Ciſſois* eſt appellata.

§. 72.

Sæpe ejuſmodi curvarum proprietates proponi ſolent, quæ non immediate applicatas inter ſe paralleles reſpiciunt, quorſum pertinet caſus iſte, quo rectarum ex dato puncto ad curvam eductorum indoles quædam

pro-

proponitur. Atque tum eo modo curvam ad aequationem analyticam revocandi uti conveniet, cujus mentio facta eſt in §. 194. *Anal. Math.* et qui eo redit, ut quantitas rectae CM ex dato puncto C, quod *Polus* curvae vocari poteſt, ad curvam eductae unius variabilis locum ſuſtineat. Tum vero alia opus eſt variabili, qua ſitus rectae CM definitur, atque eum in finem aſſumenda eſt recta quaedam CA per C ducta pro axe, ut angulus ACM, vel ejus ſinus, coſinus, tangens, etc. vicem alterius variabilis ſuſtineat. Perpendamus itaque hunc lineas curvas exprimendi modum aliquo modo diligentius, atque ponamus primo, quod diſtantia CM $= z$, ſit functio quaecunque ſinus anguli ACM $= \varphi$; quae functio ſi ſit uniformis, recta CM curvae in unico puncto M occurrere videtur, quia angulo ACM $= \varphi$ unicus valor rectae CM reſpondet. Sed angulo ACM $= \varphi$ duobus rectis aucto eadem manebit rectae CM per punctum C ductae poſitio, hoc tantum diſcrimine, quod dirigatur in plagam oppoſitam, ſicque alia ejusdem rectae CM interſectio cum curva prodibit, quamvis z ſit functio uniformis ipſius $\mathit{ſin}\,\varphi$, quia ſcripto $-\mathit{ſin}\,\varphi$ loco $+\mathit{ſin}\,\varphi$ angulus ACM duobus rectis augetur. Si itaque ſit P functio illa ipſius $\mathit{ſin}\,\varphi$, ita ut ſit $z = P$; quodſi praeterea unaquaque recta CM curvae in unico tantum puncto occurrere debeat; eſſe debet P talis ipſius $\mathit{ſin}\,\varphi$ functio, quae valorem recipit negativum, ſi variabilis $\mathit{ſin}\,\varphi$ ponatur negativa. Generatim ejusmodi functio variabilis x cujuscunque quae habet valorem negativum pro x negativo, *functio impar*, quae vero eundem dat valorem ſive pro x ſcribatur $+ a$ vel $- a$, *functio par* ipſius x vocari ſolet. Quodſi igitur quaevis recta CM curvae in unico tantum puncto occurrere debeat, eſſe debet P functio impar ipſius $\mathit{ſin}\,\varphi$. Hoc idem locum habet, quando eſt P functio impar ipſius $\mathit{coſ}.\,\varphi$. Omnes itaque curvae, quas ſingulae rectae ex C eductae

in

in unico puncto interſecant, continentur in hac aequa-
tione $z = P$, ſi P ſit functio impar ſinus et coſinus an-
guli ACM.

§. 73.

Generalis vero ejusmodi aequationis forma haec erit $z = \alpha \cos.\phi + \beta \sin.\phi + \frac{\gamma}{\cos\phi} + \frac{\delta}{\sin\phi} + \varepsilon(\cos.\phi)^3 + \zeta(\cos.\phi)^2 \sin\phi + \eta \cos.\phi (\sin\phi)^2 + \vartheta(\sin\phi)^3 + \iota\frac{\cos.\phi^2}{\sin\phi} + \kappa\frac{\sin\phi^2}{\cos.\phi} + \lambda\frac{\sin\phi}{\cos.\phi^2}$ + etc; quae facile mutatur in aliam, qua curvae natura inter coordinatas orthogonales $CP = x$ et $PM = y$ exprimitur, ponendo $z = \surd(xx + yy)$, $\sin\phi = \frac{y}{z}$ et $\cos.\phi = \frac{x}{z}$. Erit enim $z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y} + \frac{\varepsilon x^3}{z^3} + \frac{\zeta x^2 y}{z^3} + \frac{\eta x y^2}{z^3} + \frac{\vartheta y^3}{z^3} + \frac{\iota xx}{yz} + \frac{\kappa yy}{zy} + \frac{\lambda yz}{xx}$ + etc; qua aequatione per z diviſa ubi-que pares tantum ipſius z occurrent poteſtates, ideoque ponendo $z = \surd(xx + yy)$ prodibit aequatio rationalis inter x et y. Erit itaque aequatio generalis ita compa-rata, ut conſtans quaedam C aequalis ſit functioni — 1 di-menſionum variabilium x et y, cujusmodi functio ſi fuerit P, erit $C = P$, et proinde $\frac{1}{C} = \frac{1}{P}$, ubi eſt $\frac{1}{P}$ functio ipſarum x et y unius dimenſionis. Si jam fuerit P functio variabilium x et y dimenſionum n, et Q functio earundem variabilium $n+1$ dimenſionum; erit $\frac{Q}{P}$ functio unius dimenſionis. Ideo omnes cur-

vae,

vae, quam rectae ex puncto C eductae in unico puncto interſecant, contentæ erunt æquatione $c = \frac{Q}{P}$, vel Q $= cP$. Hinc generalis pro hisce curvis æquatio erit $\alpha x^{n+1} + \beta x^{n} y + \gamma x^{n-1} yy + \delta x^{n-2} y^{3} + \epsilon x^{n-3} y^{4}$ + etc $= c(ax^{n} + bx^{n-1} y + cx^{n-2} y^{2} + fx^{n-3} y^{3}$ + etc.) unde lineæ ſingulorum ordinum hac proprietate gaudentes ſequentibus contentae erunt æquationibus

$$\alpha x + \beta y = c$$

$$\alpha x^{2} + \beta xy + \gamma yy = c(ax + by)$$

$$\alpha x^{3} + \beta x^{2} y + \gamma xy^{2} + \delta y^{3} = c(ax^{2} + bxy + cyy)$$

$$\alpha x^{4} + \beta x^{3} y + \gamma x^{2} y^{2} + \delta xy^{3} + \epsilon y^{4} = c(ax^{3} + bx^{2} y + exy^{2} + fx^{3}) \text{ etc.}$$

§. 74.

Simili modo inveſtigari poſſunt curvæ, quas ſingulæ rectae ex eodem puncto C eductae vel in duobus punctis interſecant, vel nuſquam. Quia hoc caſu pro quovis angulo ACM $= \phi$ recta CM $= z$ duplicem habere debet valorem vel realem vel impoſſibilem, eadem per æquationem quadraticam definietur. Sit itaque $zz - Pz + Q = 0$, atque P et Q ſint functiones anguli ϕ ſeu ejus ſinus et coſinus uniformes, et quidem P functio impar, Q autem functio par. Erit vero ut ante $\frac{y}{z} = ſin.\,\phi$ et $\frac{x}{z} = cos\,\phi$. Ergo P debet eſſe functio impar ipſarum $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et Q earundem variabilium functio par. Ex his concluditur, fore $\frac{P}{z}$ functionem rationalem variabilium x et y et quidem homogeneam -1 dimenſionum, atque $\frac{Q}{zz}$ functionem rationalem ipſarum x et y homogeneam -2 dimenſionum. Si igitur ſit L functio homogenea $n+2$ dimenſionum, M functio

ctio homogenea $n+1$ dimenſionum, atque N functio homogenea n dimenſionum ipſarum x et y; erit $\frac{M}{L}$ functio -1 dimenſionum, $\frac{N}{L}$ functio -2 dimenſionum earundem variabilium. Fit vero $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{zz} = 0$ ex aequatione $zz - Pz + Q = 0$, unde ſequentis formae æquatio pro curvis, quae a rectis ex puncto C eductis in duobus punctis ſecantur, deducitur $1 - \frac{M}{L} + \frac{N}{L} = 0$, ſeu $L - M + N = 0$, atque exinde æquationes ſpeciales pro quovis linearum ordine eodem modo ut ſupra eliciuntur.

§. 75.

Quodſi jam detur relatio binorum valorum CM et CN ad ſe invicem, difficile non erit, curvam aſſignare, in qua data relatio inter valores CM et CN obtinet. Quaerenda itaque ſit curva in qua ſumma quadratorum $CM^2 + CN^2$ eſt quantitas conſtans $= 2aa$. Ex æquatione pro his curvis generali $zz - Pz + Q = 0$, patet, eſſe $P = CM + CN$, et $Q = CM.CN$. Ergo $PP = CM^2 + 2CM.CN + CN^2 = CM^2 + 2Q + CN^2$, atque $CM^2 + CN^2 = PP - 2Q$. Eſſe itaque debet $PP - 2Q = 2aa$ vel $Q = \frac{1}{2}(PP - 2aa)$. Sed $P = \frac{Mz}{L}$ et $Q = \frac{Nzz}{L}$; ergo $\frac{2Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} - 2aa$, et $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$ vel $L - M + \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz} = 0$, quae eſt æquatio generalis pro curvis, quae data proprietate ſunt praeditae.

Scrip

Scripto itaque $xx+yy$ loco zz, habetur $2LL(xx+yy) - 2LM(xx+yy) + MM(xx+yy) - 2aaLL = 0$, in qua æquatione ſi $M=0$, curva reſolvens erit circulus. Si $n+1=0$, ut ſit M quantitas conſtans $=2b$, et $L=\alpha x+\beta y$; curva reſolvens eſt quarti ordinis hac aequatione contenta $(\alpha x+\beta y)^2(xx+yy-aa) - 2b(\alpha x+\beta y)(xx+yy) + 2bb(xx+yy) = 0$. Atque ſi $L=xx+yy$ et $M=2(\alpha x+\beta y)a$; prodibit alia quarti ordinis aequatio. Tum enim ex aequatione inventa per $2xx+2yy$ diviſa fit $(xx+yy)^2 - 2a(\alpha x+\beta y)(xx+yy) + 2aa(\alpha x+\beta y)^2 - aa(xx+yy) = 0$. Si diviſio per $xx+yy$ non ſuccedat, aequatio inventa, ponendo 2M loco M, ſemper erit ordinis $2n+6$. Praeterea, ſi L per $xx+yy$ diviſibilis ſit, ut habeatur $L=(xx+yy)N$, exiſtente N functione homogenea n dimenſionum ipſarum x et y; oritur haec aequatio $NN(xx+yy)^2 - 2MN(xx+yy) + 2MM - aaNN(xx+yy) = 0$, quae eſt ordinis $2n+4$. Ex ſingulis itaque ordinibus paribus duplex invenitur æquatio pro curvis data proprietate gaudentibus.

§. 76.

Quaerenda jam ſit curva, in qua quadratum $(CM+CN)^2 = CM^2+2CM.CN+CN^2$ vel generaliter functio $CM^2+m.CM.CN+CN^2$ eſt quantitas conſtans. Erit $CM^2+m.CM.CN+CN^2 = PP+(m-2)Q$. Si itaque ponatur $PP+(m-2)Q=aa$; erit $Q=\frac{aa-PP}{m-2}$.

Eſt vero $P=\frac{Mz}{L}$, et $Q=\frac{Nzz}{L}$. Ergo $\frac{MMzz}{LL} + \frac{(m-2)Nzz}{L} = aa$, et $N=\frac{aaL}{(m-2)zz} - \frac{MM}{(m-2)L}$. Cum igitur æquatio pro curva ſit $L-M+N=0$, habebitur pro hac proprietate iſta æquatio: $(m-2)LLzz-(m-2)LMzz+aaLL-MMzz=0$, vel $aaLL+(xx+yy)((m-2)L^2-(m-2)LM-M^2)=0$, exiſtente L functio-

ctione homogenea $n+2$ et M functione homogenea $n+1$ dimenſionum ipſarum x et y. Sit N functio homogenea earundem variabilium n dimenſionum, atque ſi fuerit $L = (xx+yy)N$ prodibit iſta aequatio $aa(xx+yy)N^2 + (m-2)(xx+yy)^2N^2 - (m-2)(xx+yy)MN - M^2 = 0$. Si ſtatuatur $m = 2$, ut ſit $(CM+CN)^2 = aa$ fiet vel $aaLL = (xx+yy)M^2$, vel $M^2 = aa(xx+yy)N^2$. Cum autem utraque æquatio ſit homogenea, ea reſolvetur in duas pluresve æquationes hujus formae $\alpha y + \beta x$. Ideo quæſito ſatisfieri non poteſt, niſi duabus pluribusve rectis per punctum C ductis, quæ eo ſenſu, quo quæſtio proponitur, non ſatisfaciunt. Dari itaque non poſſunt curvæ algebraicæ in quibus quadratum ſummae CM + CN, et proinde nec ipſa ſumma CM + CN ſit conſtans.

§. 77.

Si ſtatuatur $m = -2$, ut quadratum differentiae CM − CN, et proinde ipſa differentia CN − CM debeat eſſe conſtans; oriuntur iſtae aequationes $aaLL = (xx+yy)(aL-M)^2$ et $aa(xx+yy)NN = (2(xx+yy)N - M^2)$. Oritur itaque ſimpliciſſima ſolutio, ſi ponatur $M = 0$, quo caſu curva reſolvens erit circulus. Deinde pro $N = 1$ et $M = 2bx$ ſatisfaciunt lineae quarti ordinis aequationibus $aa(xx+yy) = 4(xx+yy-bx)^2$ et $aaxx = (xx+yy)(2x-2b)^2$ contentae, quae facillime conſtruuntur, ſi ad aequationes inter z et ϕ regrediatur. Cum igitur ſit $xx+yy = zz$, $x = z \cos\phi$, et $y = z \sin\phi$, poſito $a = 2c$, erit primo $cczz = (zz - bz\cos\phi)^2$, vel $b\cos\phi \pm c = z$. Secundo $cc(\cos\phi)^2 =$

F.328. $(z\cos\phi - b)^2$, vel $z = \dfrac{b}{\cos\phi} \pm c$. Ad conſtruendam

329.

330. itaque primo curvam ex aequatione $z = b\cos\phi \pm c$; per punctum c ducatur recta ACB, in qua ſumatur CD = b, atque ex D ſumatur utrinque DA = DB = c, erunt

erunt primo puncta A et B in curva quæſita. Tum ducta quavis recta NCM per C, ex D in eam demittatur perpendiculum DL et ab L ſumatur utrinque LM $= LN = c$, erunt puncta M et N in curva quæſita, et intervallum $MN = 2c$, uti quæſtio poſtulat. Oriuntur itaque ex hac æquatione curvae in ſe reduentes, atque ſi $b < c$, curva apud c habebit punctum conjugatum; ſi $b = c$, curva in c habet cuſpidem; atque ſi $b > c$, curva in C nodum habebit.

§. 78.

Quod adtinet ad alteram æquationem $z = \frac{b}{\cos\varphi} \pm c$; ducta per C recta CAB, ſumatur $CD = b$, et capiatur $DA = DB = c$, erunt puncta A et B in curva. Deinde per D ducatur normalis EDF, et ducta per C quacunque CL, erit $CL = \frac{b}{\cos\varphi}$, ſi $DCL = \varphi$. Sumantur $LM = LN = c$, erunt puncta M et N in curva quaeſita. F.332.

Haec curva eſt *Conchois* VETERVM, cujus *polus* eſt C et aſymtota recta EF, ad quam quatuor curvae rami in infinitum excurrentes convergunt. Ipſum vero punctum C erit vel *punctum conjugatum*, vel *cuſpis*, vel *nodus* pro diverſa relatione conſtantium b et c ad ſe invicem, prouti nimirum vel $c < b$, vel $c = b$, vel $c > b$. Praeter has curvas ex linearum ordine quarto etiam curvæ altiorum ordinum, quot libuerit, exhiberi poſſunt, eadem proprietate præditæ. Si enim generatim fuerit P functio impar ſinus et coſinus anguli φ; iſta æquatio $z = bP \pm c$ præbet curvam continuam, quam omnes rectae per C ductae ita in duobus punctis M et N ſecabunt, ut intervallum MN futurum ſit conſtans $= 2c$. Omnes autem ejusmodi curvae referri poſſunt ad *genus conchoidalium*, loco EF *directricis* ſubſtituendo lineam quamcunque aequatione $z = \mp bP$ contentam, quæ æquatio complectitur curvas, quæ a rectis per punctum C ductis non

niſi in unico puncto ſecantur. Sit CEDLF talis curva
F.333. et C ejus polus. In ſingulis rectis CL productis utrin-
que ab L capiantur intervalla aequalia LM = LN = ι
erunt puncta M et N in curva quæſita AMPCQBNRC.
Si CEDLF fuerit circulus curva §phi praec. invenitur.

Similibus raciociniis inveniri poſſunt curvae tales,
in quibus alia quæcunque valorum CM et CN relatio
data eſt. Quin etiam progredi licet ad curvas, quae a
rectis per polum C ductis in tribus, quatuor, vel pluri-
bus punctis interſecantur, atque tum ex ipſis illae inve-
niri, quae datis proprietatibus ſunt praeditae.

§. 79.

F.331. Poſitio tangentis reſpectu curvae, cujus natura ex-
primitur æquatione inter rectam variabilem CM = z et
angulum ACM = ϕ inveſtigari ſolet modo aliqua ratio-
ne ab eo diverſo, quo poſitio tangentis inveſtigatur, ſi
ſingula curvae puncta per rectas parallelas referantur ad
rectam quandem pro axe aſſumtam ſub angulo conſtan-
te inclinatas. Quaeri enim ſolet angulus, ſub quo tangens
in puncto M inclinata eſt ad rectam CM, cum alias po-
ſitio tangentis per angulum, ſub quo ad axem inclinatur
ſit definita. Sit itaque angulus ACM = ϕ, et quæren-
da proponatur poſitio tangentis TM in puncto M. Per
polum C ducatur recta SR ipſi CM normalis, eaque
producatur, donec tangentem ſecet in puncto T, atque
patet, quod inventa recta CT, poſitio tangentis deter-
minata ſit, quare hic quoque CT vocari ſolet *Subtan-
gens* curvae. Creſcat angulus ACM differentia MCN
= $\Delta\phi$ atque per puncta M et N ducatur recta SMN cur-
vam in punctis M et N ſecans. eaque producatur, donec
ipſam SR ſecet in S, quo facto recta CS hic vocari poteſt
ſubſecans. Ex puncto N in rectam CM ſi opus eſt pro-
ductam cadat perpendicularis NP, atque radio CN de-
ſcribatur arcus NO; erit NO = $z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi$ (§. 318.)
NP = *ſin* $(z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi)$, OP = *ſv* $(z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi)$, at-
que

que $PM = \Delta z - ſv(z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi)$. Præterea PM : PN = CM : CS, id eſt $\Delta z - ſv\,(z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi) : ſin(z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi) = z : CS$, atque $CS = \frac{z\,ſin(z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi)}{\Delta z - ſv(z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi)}$ $= \frac{z\,ſin(z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi)}{\Delta z - 1 + cos\, z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi)}$. Decreſcente jam angulo $MCN = \Delta\phi$, angulus SMT atque ſimul intervallum TS decreſcunt; evaneſcente vero $\Delta\phi$ recta SM coincidit cum tangente, et punctum S cadet in punctum T, ita ut CS abeat in CT. Eſt itaque coſinus arcus $z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi$, qui jam evaneſcit $= 1$, et proinde CT $=$

$$\frac{z\,ſin(zd\phi + dzd\phi)}{dz} = \frac{z\,ſin(zd\phi + dzd\phi) : (dz\phi + dzd\phi)}{dz : (zd\phi + dzd\phi)}$$

$$\frac{z}{dz : (zd\phi + dzd\phi)} = \frac{z \,.\, zd\phi + zdzd\phi}{dz} = \frac{z \,.\, zd\phi}{dz},$$

ob $\frac{ſin(zd\phi + dzd\phi)}{zd\phi + dzd\phi} = 1$ et $zd\phi = 0$. Tangens igitur anguli CMT, ſub quo recta CM tangentem curvae in M ſecat, habetur ex analogia CM : CT = 1 :

$$tang.\,CMT = \frac{zd\phi}{dz}.$$

SECT.

SECTIO VIII.

DE CVRVIS TRANSCENDENTIBVS.

§. 80.

Ad curvas tranſcendentes non tantum ipſam logarithmicam, ſed et curvas exponentiales omnes, quippe quarum conſtructio pendet a conſtructione logarithmicae, pertinere, in praecedente de Analyſi tractatione jam oſtenſum fuit. Prouti vero generatim omnis æquatio inter duas variabiles algebraica repræſentat lineam quandam algebraicam in plano deſcriptam, ita quaevis aequatio transſcendens inter duas variabiles pariter repræſentat lineam quandam in plano deſcriptam et quidem tranſcendentem. Explicabimus itaque hac Sectione quarundam ejusmodi linearum transſcendentium naturam, earum nimirum, quarum uſus maxime vulgatus eſt, quorſum potiſſimum pertinent iſtae functiones transſcendentes, quae a circulo pendent, et quarum ſimpliciſſima datur per ejusmodi aequationem $\frac{y}{a} = A\ ſin\ \frac{x}{c}$, ita ut applicata y ſit proportionalis arcui circulari, cujus ſinus eſt $\frac{x}{c}$. Quia eidem ſinui $\frac{x}{c}$ infiniti arcus reſpondent, applicata y erit functio infinitinomia abſciſſæ, eaque proinde curvam in infinitis punctis ſecabit.

§. 81.

Si s fuerit arcus minimus ſinui $\frac{x}{c}$ conveniens

atque

atque π ſemiperipheria circuli, erunt valores ipſius $\frac{y}{a}$ ſequentes:

$$s,\ \pi - s,\ 2\pi + s,\ 3\pi - s,\ 4\pi + s,\ 5\pi - s,\ \text{etc.}$$
$$-\pi - s,\ -2\pi + s,\ -3\pi - s,\ -4\pi + s,\ -5\pi - s,\ \text{etc.}$$

Quare ſi recta CAB pro axe et A pro abſciſſarum initio ſumatur, erunt primo poſito $x = a$, applicatæ $AA^{I} = \pi a$, $AA^{II} = 2\pi a$, $AA^{III} = 3\pi a$, etc. atque ex altera parte $AA^{-I} = \pi a$, $AA^{-II} = 2\pi a$, $AA^{-III} = 3\pi a$ etc. Sumta vero abſciſſa $AP = x$, applicata curvam in infinitis punctis M ſecabit, eritque $PM^{I} = as$, $PM^{II} = a(\pi - s)$, $PM^{III} = a(2\pi + s)$, etc. Integra igitur curva ex infinitis portionibus $BE^{I}A^{I}$, $A^{I}F^{I}A^{II}$, $A^{II}E^{II}A^{III}$, $A^{III}F^{II}$, A^{IV}, etc. ſimilibus compoſita erit, ita ut ſingulae rectæ axi BC parallelæ per puncta E vel F ductæ ſint curvæ diametri. Præterea erit $AC = AB = c$, et intervalla $E^{I}E^{II}$, $E^{II}E^{III}$, $E^{III}E^{IV}$ etc, atque $F^{I}F^{II}$, $F^{II}F^{III}$ etc. ſingula erunt $= 2a\pi$. Hanc curvam LEIBNIZIUS vocavit *Lineam Sinuum.* Atque ob ſimilem rationem lineæ æquationibus $\frac{y}{a} = A\,cos\,\frac{x}{c}$, $\frac{y}{a} = A\,tang.\,\frac{x}{c}$, $\frac{y}{a} = A\,cot\,\frac{x}{c}$, $\frac{y}{a} = A\,ſec\,\frac{x}{c}$, $\frac{y}{a} = A\,coſec\,\frac{x}{c}$, $\frac{y}{a} = A\,ſv\,\frac{x}{c}$, vocari poſſunt *Linea coſinuum, tangentium, cotangentium, ſecantium, coſecantium, ſinuum verſorum*, quarum curvarum figurae ſimili modo, quo ante uſi ſumus, inveſtigari poſſunt.

§. 82.

Si circulus ACB rotetur ſuper recta EA, atque punctum diametri productæ D quodcunque deſcribat lineam curvam Dd; hæc curva *Cycloïs* vel *Trochoïs* vocatur, atque æquatio pro hac curva inveſtigari poteſt F. 335.

ſequen-

ſequentem in modum. Ponatur radius circuli rotantis CA $= a$, et CD $= b$, atque ſi circulus inter rotandum pervenerit in ſitum quemcunque $aQbR$, tandem vero in ſitum APBD, quo DA rectæ AE eſt perpendicularis; ponatur AQ $= z$, erit arcus circuli $aQ = z$, qui diviſus per radium a dabit angulum $acQ = \frac{z}{a}$, et punctum deſcribens erit in d, ut ſit $cd = b$, angulus $dcQ = \pi - \frac{z}{a}$, ubi eſt d punctum in curva quæſita. Ducatur ex d in rectam AQ perpendicularis dp, et in rectam QR normalis dn, erit $dn = b\ ſin\ \frac{z}{a}$ et $cn = -b\ cos\ \frac{z}{a}$, proinde $Qn = dp = a + b\ cos\ \frac{z}{a}$. Producatur dn, donec rectæ AD occurrat in P, ſitque DP $= x$, P$d = y$, erit $x = b + cn = b - b\ cos\ \frac{z}{a}$, et $y = AQ + dn = z + b\ ſin\ \frac{z}{a}$. Sed $b\ cos\ \frac{z}{a} = b - x$, ergo $bb\ (cos\ \frac{z}{a})^2 = bb - 2bx + xx$, $2bx - xx = bb - bb\ (cos\ \frac{z}{a})^2$, $\surd(2bx - xx) = b\surd(1 - (cos\ \frac{z}{a})^2) = b\ ſin\ \frac{z}{a}$, unde porro concluditur $ſin\ \frac{z}{a} = \frac{\surd(2bx - xx)}{b}$, $\frac{z}{a} = A\ ſin\ \frac{\surd(2bx - xx)}{b}$, $z = aA\ ſin\ \frac{\surd(2bx - xx)}{b}$ $= aA\ cos\ (1 - \frac{x}{b})$. Valoribus hisce ſubſtitutis erit y

=

$= \sqrt{(2bx-xx)} + aA\,fin\,\frac{\sqrt{(2bx-xx)}}{b}$, vel ſi abſciſſae in axe AD a centro circuli C computentur, ponendo $CP = b - x = t$, erit $\sqrt{(2bx-xx)} = \sqrt{(bb-tt)}$, atque inter t et y habetur æquatio $y = \sqrt{(bb-tt)} + aA\,cos\,\frac{t}{b}$. Si $b = a$, *cyclois* vocatur ordinaria, ſi $b > a$, *curtata*, ſi $b < a$, *elongata*. Perpetuo igitur y eſt functio ipſius x vel t infinitiformis, niſi x vel t fuerit tanta, ut $\sqrt{(2bx-xx)}$ vel $\sqrt{(bb-tt)}$ fiat quantitas imaginaria.

§. 83.

Si loco rectæ EA aſſumatur circulus OAQ, atque ſuper ejusdem peripheria rotetur alius circulus ACB; curva, quam deſcribit punctum D in diametro AB prolongato vel extra vel intra circulum aſſumtum, vocatur *Epicyclois*: atque ſi circulus genitor intra circulum immobilem ad partem peripheriae concavam rotetur, curva deſcripto modo genita *Hypocyclois* vocatur. Ponatur radius circuli mobilis $CA = CB = a$, et diſtantia puncti deſcribentis a centro $CD = b$, atque ſumatur recta CD pro axe curvæ Dd quæſitæ. Si a ſitu initiali, quo puncta OCD in directum jacent, provenerit circulus mobilis in ſitum QCR, deſcripto arcu $AQ = z$, ita ut ſit angulus $AOQ = \frac{z}{c}$, erit arcus $Qa = AQ = z$, angulus $acQ = \frac{z}{a} = Rcd$, et ſumta recta $cd = CD = b$, erit punctum d in Epicycloide. Ex hoc puncto ad axem demittatur perpendiculum dP, atque ex c perpendiculum cm in OD et cn in dP; atque ob angulum $Rcn = AOQ = \frac{z}{c}$, erit angulus $dcn = \frac{z}{c} + \frac{z}{a} = \frac{(a+c)z}{ac}$. Ergo habetur $dn = b\,fin\,\frac{(a+c)z}{ac}$ F.136.

et

et $cn = b\ cos\ \frac{(a+c)z}{ac}$. Præterea ob $OC = Oc = a+c$ erit $cm = (a+c)\ ſin\ \frac{z}{c}$ et $Om = (a+c)\ cos\ \frac{z}{c}$. Si $OP = x$, $Pd = y$, erit $x = (a+c)\ cos\ \frac{z}{c} + b\ cos\ \frac{(a+c)z}{ac}$ et $y = (a+c)\ ſin\ \frac{z}{c} + b\ ſin\ \frac{(a+c)z}{ac}$. Quoties igitur eſt $\frac{a+c}{a}$ numerus rationalis, toties ob commenſurabilitatem angulorum $\frac{z}{c}$ et $\frac{(a+c)z}{ac}$ arcus z eliminari, et æquatio algebraica inter x et y inveniri poteſt, quo itaque caſu hæc curva algebraica, alias vero transſcendens eſt. Si radius a ſumatur negativus, curva eſt hypocyclois. Præterea ſi $b = a$, *Epicyclois* vel *Hypocyclois ordinaria*, ſi $b > a$, *curtata*, ſi $b < a$, *elongata* vocatur. Quodſi itaque quadrata xx et yy addantur, invenietur æquatio pro Epicycloidibus et Hypocycloidibus generalis iſta $xx + yy = (a+c)^2 + b^2 + 2b(a+c)\ cos\ \frac{z}{a}$.

§. 84.

F. 337. Ad rectam AC in puncto C inclinata ſit alia recta MC ſub angulo quocunque ACM, ita quidem ut valor ipſius $MC = z$ pro eadem rectæ MC ad rectam AC poſitione ſit $= a$. ACM. Si itaque omnium angulorum, quorum crura coincidunt cum rectis CA et CM, minimus ſit $= s$; erunt pro eadem rectæ CM poſitione valores ipſius y infiniti iſti: as, $a(2\pi+s)$, $a(4\pi+s)$, $a(6\pi+s)$ etc, atque $-a(2\pi-s)$, $-a(4\pi-s)$, $-a(6\pi-s)$ etc. Quin etiam ſi pro s ponatur $\pi+s$, eadem rectæ CM manet poſitio, præterquam quod valor ipſius z fiat ne-

negativus. Ideo ad valores ipſius z praecedentes accedunt $-(\pi+s)$, $-a(3\pi+s)$, $-a(5\pi+s)$, etc, atque $a(\pi-s)$, $a(3\pi-s)$, $a(5\pi-s)$. Erunt itaque omnia puncta M in curva quadam tranſſcendente, quae *Spiralis* ab inventore *Archimedea* vocatur, quae talem habet figuram, ut rectam AC in C tangat, ab hoc vero termino duobus ramis utrinque infinitis gyris polum C ambientibus atque ſe mutuo in recta BC ad AC normali perpetuo ſecantibus in infinitum extendatur, ita ut recta BCB ſit ejus diameter. Si aliae aequationes algebraicae inter z et s accipiantur, innumerae aliae prodibunt ſpirales, ſi aequatio ita ſit comparata, ut ſingulis ipſius s valoribus reſpondeant valores ipſius s reales.

Spiralis, quam praebet aequatio $z = \frac{a}{s}$ a JO. BERNOULLIO *ſpiralis hyperbolica* vocatur. Spiralium genus multo plures ſub ſe comprehendet curvas, ſi inter z et s quoque aequationes tranſcendentes admittantur, quarum praecipue ea notari meretur curva, in qua anguli s logarithmis diſtantiarum z proportionales ſunt, quam F. 338.
praebet aequatio $z = nl\frac{z}{a}$, quae ideo *Spiralis Logarithmica* ſeu *Logiſtica ſpiralis* vocatur.

§. 85.

Praeter has curvas tranſſcendentes methodus tangentium inverſa in Analyſi explicata innumeras alias ſuppeditat, dum quævis curva tranſſcendens ſit, cujus conſtructio quadraturam vel reſtificationem alterius curvae poſtulat, cujus quadratura vel rectificatio exacta non habetur. Poteſt iſta curva, a cujus quadratura vel rectificatione pendet conſtructio alterius, hujus curvæ *generatrix* vocari, atque tum ipſæ curvæ tranſſcendentes in diverſos ordines diſtribui, prouti generatrix eſt vel algebraica vel adeo ipſa tranſcendens. Sic curva eſt

trans-

tranſcendens primi ordinis, ſi ejus generatrix eſt algebraica, *tranſcendens ſecundi ordinis*, ſi generatrix eſt *tranſcendens primi ordinis*, et generatim *tranſcendens ordinis n+1*, ſi generatrix eſt tranſcendens ordinis n.

Sic curva æquatione $dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$, expreſſa eſt tranſcendens primi ordinis, quia ſupponit rectificationem circuli, cujus radius eſt $= a$ et ſinus verſus $= x$. Curva vero, quam præbet æquatio $2axddy^2 - xxddy^2 = dx^4$ poſito differentiali dx conſtante, eſt tranſcendens ſecundi ordinis, quia ſupponit quadraturam curvæ ad quam $dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$. Eſt enim per æquationem datam $ddy^2 = \frac{dx^4}{2ax-xx}$, et proinde $ddy = \frac{dx^2}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ vel $addy = dx\,\frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; ideo $ady = dx\int\frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$. Sit $\int\frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}} = X$, erit $ady = Xdx$, atque $ay = \int Xdx$, ubi eſt $\int Xdx$ integrale pendens a quadratura curvæ $dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$.

§. 86.

Omnes curvæ tranſcendentes, ad quas eſt $y = A$ *ſin* x, vel $y = A$ *ſv* x, vel $y = A$ *tang.* x, etc, vocari poſſent quadratrices circuli, eodem ſenſu, quo logarithmica dicitur hyperbolæ quadratrix. Potiſſimum vero *quadratrix* circuli ab inventore *Dinoſtratis* dici ſolet curva, ad quam $x = A\,cot\,\frac{y}{x}$, vel $\frac{y}{x} = cot\,x$, cujus
F.339. conſtructio ſic poteſt concipi. Radio CA = 1 deſcribatur circulus, in eoque ducatur diameter AB, cui in centro C normaliter inſiſtat recta indefinita FG. Si

matur CP = arcui AD = x, atque ad rectam FG in puncto P excitetur normalis PM rectæ CD productæ occurrens in M, erit punctum M in quadratrice dinoſtratis. Eodem modo plura puncta reperientur, quotcunque lubet, capiendo alium arcum AE atque ſumendo Cp = AE, tumque excitando pm normalem ad FG, quæ rectam CE, productam ſecet in m, erit quoque m in curva quæſita. Quia enim generatim CP = x,

ſi PM = y, erit $x : y = 1 : \cot x$, id eſt $\frac{y}{x} = \cot x$,

vel $x = A \cot \frac{y}{x}$. Quodſi hæc curva conſtructa ſupponatur, ejus ope angulus quicunque propoſitus ſecari poteſt in data ratione. Ad rectam enim AC in puncto C conſtruatur angulus dato æqualis, qui ſit ACM, cujus crus CM occurrat quadratici in m, a quo puncto ad rectam FG ducatur perpendicularis mp. Deinde ſi ſecandus ſit angulus in ratione $m : n$ fiat $m : n$ = Cp : CP, atque ex puncto P excitetur perpendicularis PM occurrens curvæ in M, ducaturque CM; erit ACm : ACM = Cp : CP = $m : n$.

§. 87.

Cæterum curvarum transſcendentium affectiones, quorſum pertinet poſitio tangentis, curvatura, adplicatarum maximæ et minimæ, et quæ ſunt reliqua, calculi differentialis et integralis ope eodem modo inveſtigantur, quo curvarum algebraicarum affectiones reperiuntur. Formulæ enim differentiales et integrales in Analyſi expoſitæ adeo univerſales ſunt; ut pro functionibus algebraicis non ſolum, ſed et pro tranſcendentibus veræ ſint. Multa hujus rei ſpecimina explicatis addere non poſſumus, ne hoc libellum, quod Studioſis Matheſeos prima tantum hujus ſcientiæ elementa explicare debet, in adeo magnum excreſcat volumen. Dabimus unicum, quod ſequitur. *In logiſtica ſpirali CAMB datur punctum* F. 338.
M,

M, et quaeritur poſitio tangentis in hoc puncto reſpectu rectae CM ex polo C ad punctum M ductae. Poſito angulo ACM $= s$ et recta CM $= z$; aequatio pro logiſtica ſpirali eſt $s = nl\frac{z}{a}$. Sed tangens anguli, ſub quo recta CM ad rectam in M tangentem inclinatur, eſt $= \frac{zds}{dz}$ (§. 79. *Geom. Subl.*), atque ex aequatione $z = nl\frac{z}{a}$ deducitur $ds = n\frac{dz}{z}$. Proinde $\frac{zds}{dz} = \frac{nzdz}{zdz} = n$. Ergo hic angulus in logiſtica ſpirali conſtans eſt, quia ipſius tangens eſt conſtantis magnitudinis. Angulus, quem recta CM cum tangente in M comprehendit, idem eſſe cenſetur cum eo, ſub quo recta CM ipſam curvam in M ſecat. Recta igitur CM logiſticam ſpiralem ubique ſub eodem interſecat angulo.

SECTIO IX.

DE EVOLVTIONE CVRVARVM

§. 88.

F. 340 Si curvae ACG adplicetur filum perfecte flexibile, cujus extrema pars AB extenſa ſit in lineam rectam curvam ACG in initio A tangentem; tumque terminus A aequabili manus ductu moveatur verſus M, ita quidem ut perpetuo pars CE a curva abducta extenſa ſit in rectam, quae curvam in puncto C tangat; punctum ſi

extremum B deſcribet curvam BEM. Tumque curva ACG vocatur *Evoluta curvae* BEM; hæc vero BEM dicitur *curva ex evolutione curvae ACG deſcripta.* Eſt itaque perpetuo recta CE æqualis arcui CA curvæ evolutæ + conſtante AB. Deinde ipſa CE perpetuo eſt radius curvaturae curvae BEM ex evolutione curvae ACG deſcriptae in puncto E. Si enim radio CE deſcribatur circulus ER, dico eundem eſſe eorum, qui curvam EM apud E tangere poſſunt maximum. Capiatur enim EN > EC utcunque, et per punctum N ducta ſit recta tangens evolutam in F, quæ producta cum curva BM concurrat in M, cum circulo ER vero in R. Ducatur CR, quae erit = CE. Praeterea eſt FM = arcui FC + CR, ergo FM > FR, et proinde arcus EM curvae ex evolutione deſcriptae cadit extra circulum ER. Quivis vero circulus radio DE < CE deſcriptus cadit intra circulum ER, ergo eorum nullus per ſpatium intra EM et ER tranſire poteſt. Denique FN + NC > FC (§. 164. *Geom. Elem.*), proinde FN + NC + CE > FC + CE, id eſt FN + NE > FM. Utrinque igitur FN ſubtracto invenitur NE > FM − FN, id eſt NE > NM. Ergo pars circuli radio NE > CE deſcriptus cadit extra EM, unde patet, rectam CE eſſe radium curvaturae curvae BM in puncto E.

§. 89.

Data jam æquatione pro curva quacunque AM inter coordinatas orthogonales, ejus evoluta invenitur ſic ratiocinando. Ex puncto M quocunque propoſitae curvae ad axem demittatur applicata MP, ut ſit AP = x, PM = y. Radius curvaturae in M ſit MC, qui tangit evolutam BC apud C. Radius curvaturae in puncto A, ubi axis curvam trajicit, inventus ſit AB, erit iterum punctum B in curva evoluta et AB ipſius tangens in B. Ex puncto C ad applicatam MP productam cadat perpendicularis CE, atque ex eodem puncto C perpendicularis CN ad axem curvæ datæ. Erit primo MH : MP = F. 341.

$HC : PE = CN = \frac{MP \cdot HC}{MH}$. Deinde eſt $MH : HP = MC : CE = PN = \frac{HP \cdot MC}{MH}$, unde concluditur $BN = AP + PN - AB$. Sed radius curvaturae MC, normalis MH, ſubnormalis PH et radius curvaturae AB, habentur ex formulis in praecedentibus inventis per functiones ipſius x expreſſae. Poſitis itaque $BN = t$, $NC = u$, ex aequatione pro curva AM data duae eliciuntur aequationes x, t et u involventes, ex quibus per eliminationis methodum deducitur aequatio tantum variabiles t et u involvens. Ne autem in caſibus ſpecialibus calculus fiat nimis prolixus, quaeri poteſt ME ex formulis differentialibus. Quia enim $MH = \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$ (§. 34.) erit $\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx} : y = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} : ME = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$.

§. 90.

Sit curva AM parabola, cujus vertex eſt A, et latus transverſum AN; ac primo habentur radii curvaturae MC et AB ex formula $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy}$. Sit enim parabolae parameter $= a$; erit $yy = ax$, unde $2ydy = adx$; $dy = \frac{adx}{2y}$, $dy^2 = \frac{aadx^2}{4yy} = \frac{adx^2}{4x}$. Praeterea ſumto dx conſtante fit $ddy = \frac{-adx^2}{4x\sqrt{ax}}$. Ergo $dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{adx^2}{4x} = \frac{(4x+a)dx^2}{4x}$; $\sqrt{(dx^2}$

+

$+dy^2) = \frac{dx\sqrt{(4x+a)}}{2\sqrt{x}}$; $(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{(4x+a)dx^2}{4x} \cdot \frac{dx\sqrt{(4x+a)}}{2\sqrt{x}} = \frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}}dx^3}{8x^{\frac{3}{2}}}$; MC $=$ $\frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}}dx^3}{8x^{\frac{3}{2}}} : \frac{adx^3}{4x\sqrt{ax}} = \frac{x(4x+a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{ax}}{2ax^{\frac{3}{2}}}$. Ergo $MC^2 = \frac{x^2(4x+a)^3 ax}{4a^2x^3} = \frac{(4x+a)^3}{4a} = 16x^3 + 12x^2 + 3ax + \frac{1}{4}aa$. Pro radio AB eſt $x = 0$, unde AB $= \frac{1}{2}a$. Subnormalis PH eſt conſtans $= \frac{1}{2}a$. Fit itaque ME $=$ $\frac{(4x+a)dx^2}{4x} : \frac{adx^2}{4a\sqrt{ax}} = \frac{(4x+a)\sqrt{ax}}{a} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + y$. Ergo PE $=$ NC $= u =$ $\frac{4x\sqrt{ax}}{a}$. Deinde $y : \frac{1}{2}a = \frac{4xy}{a} + y :$ EC $= 2x + \frac{1}{2}a$, ergo BN $= t = 3x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = 3x$. Ex hac aequatione $t = 3x$ fit $x = \frac{1}{3}t$, quo valore in aequatione $u = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ ſubſtituto, habetur $u = \frac{\frac{4}{3}t\sqrt{\frac{1}{3}at}}{a}$, $3au = 4t\sqrt{\frac{1}{3}at}$, $9a^2u^2 = \frac{16}{3}at^3$; $27a^2u^2 = 16at^3$, vel $\frac{27}{16}au = t^3$. Ergo evoluta parabolae Apollonianae eſt parabola cubica, cujus parameter eſt $\frac{27}{16}$ parametri Apollonianae.

§. 91.

Sit curva AMB cyclois ordinaria, et brevitatis gratia ponatur diameter circuli genitoris AD $= 1$, AP $= x$, F. 342.
PM $= y$, erit QP $= \sqrt{(x-xx)}$, arcus AQ $= \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-xx)}}$ et proinde PM $=$ PQ $+$ QM $= \sqrt{(x-xx)} + \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-xx)}}$.

Ergo $y = \surd(x - xx) + \frac{\int dx}{2\surd(x-xx)}$, $dy = \frac{dx - 2xdx + \ldots}{2\surd(x-xx)}$

$= \frac{2dx - 2xdx}{2\surd(x-xx)} = \frac{dx(1-x)}{\surd(1-x)\surd x} = \frac{dx\surd(1-x)}{\surd x}$, unde ſi dx ſumatur conſtans, habetur $ddy = -\frac{dx^2\surd x}{2x\surd(1-x)} - \frac{dx^2\surd(2-x)}{2x\surd x} = \frac{-xdx^2 - dx^2 + xdx^2}{2x\surd(x-xx)} = -\frac{dx^2}{2x\surd(x-xx)}$,

Ergo $dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{dx^2(1-x)}{x} = \frac{xdx^2 + dx^2 - xdx^2}{x}$

$= \frac{dx^2}{x}$, et MC $= \frac{(dx^2 + dy^2)\surd(dx^2 + dy^2)}{-dxddy} =$

$\frac{2xdx^3\surd(x-x^2)}{xdx^3\surd x} = 2\surd(1-x) = 2$DQ. Quia enim PD$^2 = 1 - 2x + xx$ et PQ$^2 = x - xx$, erit DQ$^2 = 1 - x$, et DQ $= \surd(1-x)$. Si $x = 0$, erit radius curvaturae $= 2\surd 1 = 2 = 2$AD. Si itaque fiat DG $=$ AD, erit G in evoluta. Si $x =$ AD $= 1$, erit radius oſculi $= 2\surd(1-1) = 0$, ideo punctum B pariter eſt in evoluta. Ducatur BL ipſi QD vel MC parallela, et erit LBD $=$ BDQ, et proinde arcus QD, BL, eorumque chordæ æquales. Ideo quoque BL $=$ EC, et LC $=$ BE. Præterea vero AQ $=$ QM $=$ DE, AQD $=$ DB et proinde BE $=$ QD $=$ BL $=$ CI. Ergo evoluta cycloidis ipſa eſt cyclois priori ſimilis et æqualis.

§. 92.

Quia radius curvaturæ CM ſemper æqualis eſt arcui evolutæ, vel eundem excedit data conſtante, omnes arcus evolutarum geometrice rectificantur, quarum radii per conſtructiones geometrice inveniri poſſunt. Sic patet ex §. præcedente, cycloidem geometrice rectificabilem eſſe; nimirum arcus CB $=$ CM $=$ 2BL. Poſſumus

mus vero methodum generalem rectificandi curvam ope ſuæ evolutionis ex his colligere, qui ſequentibus nititur ratiociniis. Data ſit curva AC, cujus tangens in puncto B ſit recta GB. Punctum A evolvendo deſcribat curvam AD, erit BM = arcui AB. Tangens BG habetur methodis ſupra explicatis: ideo reſtat, ut inveniatur GM = u, quae ſubtracta a tangente dabit MB = arcui AB. Creſcat AG = t differentia ſua GE = Δt, atque per punctum E tranſeat nova tangens EC. Fiat DH = MG, erit HE = Δu. Ex puncto G ad CE cadat perpendicularis GF, atque ex A ad AE excitetur perpendicularis AL occurrens tangenti GB in L et tangenti EC in I, erit EI = $r + \Delta r$, ſi GL ponatur = r. Praeterea F.34.

EG : EF = EI : EA, atque $\frac{EG}{EH} : \frac{EF}{EH}$ = EI : EA, ideſt

$$\frac{\Delta t}{\Delta u} : \frac{EF}{\Delta u} = r + \Delta r : t + \Delta t, \text{ vel } \frac{\Delta t : \Delta u}{EF : \Delta u} = \frac{r + \Delta r}{t + \Delta t}.$$

Decreſcente jam GE vel Δt, ſimul decreſcunt Δu, Δr, Δt, EF, ac evaneſcente Δt, ſimul Δu, Δr, Δt, EF, evaneſcunt, et quidem Δu et EF in ratione æqualitatis. Fit itaque $\frac{dt}{du} = \frac{r}{t}$, vel $\frac{du}{dt} = \frac{t}{r}$, et $u = \int \frac{tdt}{r}$ = GM, quod ſubtractum a tangente relinquit MB = arcui AB.

§. 93.

Reſtat, ut quæramus methodum, ex data evoluta inveniendi curvam evolutione deſcriptam. Ubi in anteceſſum notari meretur, quod problema hoc diverſas admittat ſolutiones, prouti initium evolutionis in hoc vel alio datæ curvæ puncto ſumatur. Sit enim curva data ABCD, eidemque applicari concipiatur filum, cujus unus terminus fixus ſit in D, alter vero protendatur ultra verticem A, uſque ad E. Hoc filum ſi evolvi intelligatur, deſcribet punctum E curvam EF et punctum A curvam AG, quæ duæ curvæ diverſæ erunt naturæ. F.344.

 Radius

Radius enim circuli oſculantis curvam EF in E eſt = EA, radius vero circuli oſculantis curvam AG in A = o. Sic quoque eodem tempore quodlibet punctum intermedium B ſuam deſcribet curvam particularem BH. Quodſi nunc terminus A fixus alter D vero mobilis concipiatur; manifeſtum eſt, punctum D et omnia intermedia C deſcribere curvas DK, CI, tam inter ſe, quam a prioribus diverſas, niſi curvæ ABCD ab utraque parte ſit ſimilis poſitio. Hanc ob cauſam curvarum tantum EF et AG natura quomodo invenienda ſit, explicabimus, quia reliquarum, ut curvae BH, natura ſimili reperitur methodo, conſiderando B tanquam verticem curvae BCD et BL ad curvam normalem.

§ 94.

F. 345. Sit itaque AB curva data, A vertex, AC axis curvæ AB, $AC = x$, $CB = y$. Curvæ AB adplicatum ſit filum, cujus terminus protenditur ultra verticem uſque ad D, quique per evolutionem deſcribit curvam DE. Producantur CA et DA, ad quas demittantur perpendiculares EG, EH, ac ultima EH producatur uſque ad L. Sit $AD = b$, $AB = s$, $DH = t$, $HE = u$. Quia BF eſt tangens et FC ſubtangens evolutæ, erit $BF = \frac{yds}{dy}$, $AF = \frac{ydx}{dy}$. Sed BF : FC = EB : EL, id eſt $\frac{yds}{dy} : \frac{ydx}{dy} = s + b : EL$; ergo $EL = \frac{(s+b)dx}{ds}$. Praeterea BF : BC = BE : BL, ſive $\frac{yds}{dx} : y = s+b : BL$, et proinde $BL = \frac{(s+b)dx}{ds}$. Ergo $CL = AH = y - \frac{(s+b)dx}{ds}$, $DH = t = b+y-\frac{(s+b)dx}{ds}$, et $HE = u =$

EL

$EL - AC = \frac{(s+b)dx}{ds} - x.$ Quia igitur $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; invenitur $t = b + y - \frac{(s+b)dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ et $u = \frac{(s+b)dx}{\sqrt{(dx^2 - dy^2)}} - x.$ Si vero evolutio incipit in A, fiet $b = 0$, unde hoc caſu erit $t = y - \frac{sdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, et $u = \frac{sdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} - x.$ Valori itaque ipſius dy ubique ſubſtituto ſecundum naturam curvæ datæ AB invenitur quidem natura curvæ DE absque differentialibus; ſed littera s non eliminabitur, quod indicio eſt, naturam curvæ DE pendere a rectificatione curvæ AB. Licet igitur data curva AB ſit geometrica, tamen plerumque DE ſit curva tranſcendens, atque tum ſolum algebraica eſt, ſi evoluta eſt rectificabilis.

SECTIO X.

DE SVPERFICIEBVS, SOLIDIS ROTVNDIS ET CVRVIS DVPLICIS CVRVATVRAE.

§. 95.

Prouti natura lineæ cujuscunque in eodem plano de- F.346
ſcriptæ exprimi poteſt æquatione inter duas variabiles x et y; ſic natura ſuperficiei cujuscunque repræſentatur æquatione inter tres variabiles x, y et z, ita ut una earum z ſit functio duarum reliquarum x et y. Singula

 gula

gula nimirum lineæ curvae in eodem plano deſcriptæ puncta referuntur ad duos axes, in dato puncto ſub angulo quocunque, potiſſimum recto ſe interſecantes, ita ut ultimo caſu ex æquatione pro curva data diſtantia cujusvis ipſius puncti ab utroque axe definiatur. Licet vero locus puncti in dato plano perfecte determinetur, ſi cognita ſit ipſius diſtantia a duabus rectis in eodem plano normaliter ſeinvicem decuſſantibus; tamen locus puncti M generatim non determinatus eſt, ſi cognita ſit ipſius diſtantia a duabus planis ſe mutuo normaliter ſecantibus ut AQ et AR. Eum in finem opus eſt tertio plano Aq ad utrumque priorum normali. Quodſi enim ex puncto M ad plana AQ, Aq, AR demittantur perpendiculares MQ, Mq, MR; hisce diſtantiis locus puncti M penitus determinatur. Sit itaque punctum M in ſuperficie quacunque, atque aſſumto plano quodam AQ pro lubitu, ad quod ſingula illius ſuperficiei puncta referantur, demittatur ex puncto M ad hoc planum perpendicularis MQ. Praeterea in plano AQ aſſumatur recta quaedam AB pro axe et A pro initio abſciſſarum. Ex puncto Q in plano AQ ad axem AB ducatur perpendicularis QP: quo facto, ſi innoteſcat longitudo trium coordinatarum $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, ſitus puncti M determinatus erit.

§. 96.

Ex his patet, quod data æquatione inter tres variabiles x, y, z, natura ſuperficiei determinetur, ſic ut ſumtis pro lubitu binis variabilibus x et y, determinetur magnitudo tertiæ z, atque pro quavis ſuperficie propoſita variabilis z ſit functio duarum variabilium x et y. Poſſunt itaque ſuperficies dividi in *continuas* ſeu *regulares* et *diſcontinuas*, ſeu *irregulares*. Prioris generis illæ ſunt, quarum omnia puncta per eandem æquationem inter z, y, et x exprimi poſſunt, ſeu ubi z eſt eadem functio variabilium x et y pro omnibus ſuperficiei punctis. Superficies vero irregulares ſunt, quarum

rum variæ partes per diverſas functiones exhibentur. De regularibus hic tantum ſermo erit, quæ iterum ſubdividi poſſunt in *algebraicas* et *tranſcendentes*, prouti z erit vel algebraica vel tranſcendens ipſarum x et y functio. Denique ad id quoque reſpiciendum eſt, qualis ſit functio z ipſarum x et y ratione numeri valorum, quos continet, prouti vel æquatione ſimplici $z = P$, vel quadratica, $zz - Pz + Q = 0$, vel cubica $z^3 - Pz^2 + Qz + R = 0$, vel altiore quadam determinatur, ubi P, Q, R, etc, ſunt functiones variabilium x et y uniformes.

§. 97.

Quodſi in æquatione inter tres variabiles x, y, z, ea, quae ad planum APQ eſt normalis, nempe z, ubique pares habeat dimenſiones; tum geminos habebit valores abſolute aequales, alterum affirmativum alterum negativum. Proinde ſuperficies ita erit comparata, ut ad utramque plani APQ partem ſit ſui ſimilis et æqualis, ideoque ſolidum, quod iſta ſuperficie terminatur, ſectione ſecundum planum AQ facta, in duas partes ſimiles et æquales dividetur. Ideo hoc caſu illud *planum* poteſt *diametrale* vocari. Eodem modo patet, planum Ap fore diametrale, ſi variabilis y ubique pares habet dimenſiones. Planum AR vero diametrale erit, ſi variabilis x pares ubique habet dimenſiones. Fieri quoque poteſt, ut duo, quin omnia haec plana ſint diametralia. Sic pro ſuperficie ſphaere, cujus centrum eſt A, ob radium AM $= \sqrt{(xx + yy + zz)} = a$, erit $xx + yy + zz = a$. Ceterum, ſi punctum M fuerit in ſuperficiei plana, aſſumto plano AQ parallelo, z erit quantitas conſtans $= b$, ita ut aequatio pro hoc plano fiat $z = b$, atque z a variabilibus x et y non pendeat. Si fuerit M in plano, quod planum AQ in recta AB ſecet; invenietur PQ : QM, uti ſinus totus vel radius ad tangentem anguli inclinationis eorum planorum. Quae

ratio ſi fuerit $m : n$; foret aequatio pro ſuperficie plana $z = \frac{n}{m} y$.

§. 98.

Si in aequatione pro ſuperficie quadam data ponatur $z = 0$; remanet aequatio inter x et y, quae exprimet lineam, in qua ſuperficies propoſita a plano AQ interſecatur. Pari modo ſuppoſitio $y = 0$ dabit aequationem inter x et z, quae exprimet interſectionem plani Aq cum data ſuperficie. Denique ſi ponatur $x = 0$, aequatio reſidua inter y et z dabit interſectionem plani AR cum ſuperficie. Haud abſimili modo determinantur curvae, in quibus propoſita ſuperficies per planum uni trium principalium parallelum interſecatur. Si enim concipiatur planum ipſi AQ parallelum, ab eodem diſtans intervallo $= b$; omnia ſuperficiei puncta, quorum ab eodem plano AQ diſtantia, quae per variabilem z indicatur eſt $= b$, ſita erunt in iſto plano parallelo, eorumque locus erit interſectio plani cum data ſuperficie. Invenitur itaque pro hac interſectione aequatio, ſi in aequatione pro ſuperficie ponatur $z = b$; hoc enim facto habetur aequatio inter binas variabiles x et y, naturam ſectionis exprimens. Eodem quoque modo interſectiones, quae per plana vel ipſi Aq, vel ipſi AR parallela formantur, reperiri poſſunt, quod facile patet. Si itaque conſtanti arbitrariae b ſucceſſive omnes valores poſitivi et negativi tribuantur, obtinebuntur omnes interſectiones plano AQ parallelae atque omnes iſtae ſectiones unica aequatione inter x et y conſtantem arbitrariam involvente exprimentur, unde omnes iſtae ſectiones erunt lineae vel ſimiles, vel ſaltem affines.

§. 99.

Potiſſimum ex genere ſuperficierum, in quibus omnes ſectiones plano AQ parallelae ſunt ſimiles, notari merentur illae, in quibus omnes iſtae ſectiones ſunt circuli, quorum centra cadunt in eandem rectam ad planum AQ

AQ normalem. *Solida* ejusmodi ſuperficiebus terminata *tornata* dicuntur, quia torno efformata eſſe concipi poſſunt. Plano enim circuli CD in centro A normaliter F. 347. inſiſtat recta AB, quæ ſit axis lineæ BMS in plano NBA ſitæ et per circuli peripheriam in N tranſeuntis. Praeterea ex puncto M ad planum circuli CD cadat perpendicularis MQ, erit Q in recta NA communi planorum NBA et circuli CD interſectione. Sumta recta AC quacunque in plano circuli CD pro axe, ad eandem ex puncto Q cadat perpendicularis QP, et vocentur AP $= x$, PQ $= y$, QM $= z$. Si denique ex puncto M ad axem AB lineae NMB ducta ſit perpendicularis Mp, ea ſit applicata hujus lineae orthogonalis pro abſciſſa Ap = QM = z, et proinde erit Mp = AQ functio ipſius z quaecunque, quae ſi denotetur littera Z; ex triangulo APQ rectangulo habetur $AQ^2 = ZZ = xx + yy$. Ergo $ZZ = xx + yy$ eſt aequatio generalis pro ſuperficiebus omnium ſolidorum tornatorum, quae ortae eſſe concipi poſſunt, plano NBA circa axem AB rotato. Si BMN ſit parabola, cujus latus transverſum BA, parameter p et abſciſſa Bp $= x$, erit $Mp^2 = px$. Si AN $= a$, AB $= b$, erit $p = \frac{aa}{b}$, et $Mp^2 = \frac{aa}{b}x$. Si jam AP $= z$; erit Ap $= z = b - x$, atque $x = b - z$, unde $Mp^2 = \frac{aa}{b}z = AQ^2$. Ergo aequatio $aa - \frac{aa}{b}z = xx + yy$ eſt pro ſuperficie ſolidi, quod revolutione parabolæ circa axem transverſum generatur, atque *Sphæroïs parabolica* vocatur. Sit BMN ellipſis, cujus axes conjugati ſunt AN $= a$ et AB $= b$, centrum A, abſciſſa Ap $= z$, erit Mp^2 vel $AQ^2 = aa - \frac{aa}{bb}zz$, unde æquatio $aa - \frac{aa}{bb}zz = xx + yy$ eſt pro ſolido revolutione ellipſeos

circa

circa axem generato, quod *ſphæroïs elliptica* dicitur. Hæc æquatio ponendo $b = a$, fit $aa - zz = xx + yy$ pro ſphæra. Si aa ſit negativa quantitas, æquatio $aa + \frac{aa}{bb} zz = xx + yy$ eſt pro ſuperficie *ſphæroidis hyperbolici*, ubi a denotat axem conjugatum atque ſolidum revolutione circa axem transverſum generatum eſſe intelligitur.

§. 100.

Prouti expoſita methodo inveſtigatur natura ſectionis, quæ oritur, ſi ſuperficies quæcunque a plano ſecatur; ita quoque inveſtiganda ſæpe proponitur natura ſectionis, ſi ſuperficies curva propoſita ab alia quadam curva ſuperficie interſecetur. Tum vero ſectio non in eodem plano jacebit, et proinde ejus natura duabus coordinatis comprehendi nequit. Trium coordinatarum eum in finem opus eſt, quibus cujusvis puncti in tali curva diſtantia a tribus planis inter ſe normalibus determinatur, ita quidem, ut una earum pro lubitu determinata, binæ reliquæ valores determinatos obtineant. Una igitur æquatio inter tres illas coordinatas non ſufficit ad hoc præſtandum, quia eadem eſſet pro univerſa ſuperficie; ſed duabus opus eſt æquationibus, quarum ope, ſi uni variabili datus valor tribuatur, ſimul reliquarum valores determinentur. Quocirca curvæ duplicis curvaturae natura exprimi poterit duabus æquationibus inter tres variabiles x, y, z, quæ totidem coordinatas inter ſe normales repræſentant.

§. 101.

Sit igitur propoſita linea duplicis curvaturæ, in qua ſumtum eſt punctum M quodcunque. Aſſumantur tres axes inter ſe normales AB, AC, AD, quibus tria plana BAC, BAD, CAD ſibi invicem normalia determinantur. Ex puncto curvæ M in planum BAC demittatur perpendiculum MQ, et ex puncto Q ad axem AD

F.348.

duca-

ducatur normalis QP, erunt AP, PQ et QM tres illæ coordinatae, inter quas ſi duæ dentur æquationes, natura curvae determinatur. Si jam ponatur AP $= x$, PQ $= y$, QM $= z$, atque ex duabus æquationibus inter x, y et z propoſitis eliminando z formetur æquatio duas tantum variabiles x et y continens; ea determinabit locum puncti Q in plano BAC, qui erit curva quædam EF in plano BAC deſcripta, atque *projectio curvæ* GMH in planum BAC dicetur. Prouti autem hæc curvae GMH projectio in plano BAC invenitur eliminando variabilem z, ita ejusdem curvæ projectio in plano BAC vel CAD habetur eliminando variabilem y vel x. Una projectio EQF non ſufficit ad curvam GMH cognoſcendam. Cognitis vero perpendiculis QM $= z$ pro ſingulis punctis Q natura curvae GMH perfecte cognoſcitur. Praeterea quoque ex duabus projectionibus curvae GMH in duobus planis ipſa haec curva cognoſcitur. Vel quoque ſi detur ſuperficies, in qua linea curva CMH continetur, et praeterea ejus projectio in uno plano, pariter illa curva erit cognita. Excitatis enim ex ſingulis punctis projectionis perpendiculis QM, eorum puncta extrema, ubi ſuperficiei occurrunt, erunt in curva GMH.

§. 102.

Interſecetur nunc ſuperficies quaecunque ab alia, earumque communis interſectio erit vel linea recta vel curva, et poſteriori caſu vel ſimplicis vel duplicis curvaturae. Utcunque autem haec linea fuerit comparata, ſingula ejus puncta erunt in utraque ſuperficie, et proinde in æquatione utriusque ſuperficiei continebuntur. Quodſi itaque ambae ſuperficies exprimantur æquationibus inter ternas coordinatas, quae ad eadem tria plana principalia inter ſe normalia, vel ad eosdem tres axes inter ſe normales AB, AC, AD referantur, ambae iſtae aequationes conjunctae naturam interſectionis expriment. Si ex hisce æquationibus una variabilium x, y, z, elimine-

minetur, aequatio inter binas reliquas definit projectionem interſectionis in plano, in quo iſtae coordinatae jacent. Si haec æquatio projectionis fiat impoſſibilis, ambae ſuperficies ſe nuſquam interſecant. Quodſi vero projectio in punctum evaneſcat, ipſa quoque interſectio erit punctum, ſeu potius ambae ſuperficies ſe *in puncto contingent.* Praeterea quoque datur *contractus ſuperficierum linearis*, ac ipſa linea contactus erit vel recta vel curva. Sic recta erit linea contactus, ſi planum tangat cylindrum vel conum. Conus rectus autem a ſphaera intus tangitur in peripheria circuli. Iſte contactus aequatione cognoſcitur, ſi pro projectione ejusmodi invenitur aequatio, quae duas habet factores aequales. Si enim duae interſectiones coincidunt, contactus locum habet.

§. 103.

Methodus itaque generalis, vi cujus cognoſci poteſt, utrum ſuperficies quaecunque a plano vel alia ſuperficie tangatur, an non? ad ſequentia redibit. Eliminata ex ambabus æquationibus una variabili, diſpiciendum eſt, utrum æquatio inventa reſolvi poſſit in factores ſimplices, an ſecus. Si invenientur duo factores ſimplices impoſſibiles, dabitur contactus in puncto, quod invenietur, ponendo utrumque factorem $=0$. Si factores ſimplices inveniantur reales et aequales, ſuperficies ſe mutuo ſecundum lineam rectam tangent. Si denique æquatio habeat duos factores non ſimplices aequales; vel ſi fuerit per quadratum diviſibilis, ejus radix nihilo æquata, dabit projectionem lineae contactus. Unde ſimul patet, quod caſu quatuor factorum ſimplicium impoſſibilium ſuperficies ſe mutuo in duobus punctis contingant. Caeterum licet ex impoſſibilitate projectionis ad impoſſibilitam interſectionis rite concludatur, viciſſim a projectione reali tuto non concluditur ad interſectionem realem. Ut enim ipſa interſectio ſit realis, non ſufficit projectionem eſſe realem, ſed inſuper per-

pendi-

pendicula ex projectione ad interſectionem ducta realia eſſe debent. Licet igitur omnis curva realis habeat projectiones reales, tamen non viciſſim ex realitate projectionis realitas curvae quaeſitae ſequitur,

§. 104.

Caeterum facilior modus inveniendi plani datam ſuperficiem in dato puncto tangentis poſitionem deduci poteſt ex methodo inveniendi tangentes curvarum in eodem plano deſcriptarum ſupra explicata. Natura ſuperficiei data ſit aequatione inter tres coordinatas $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, atque ſi determinanda ſit poſitio plani ſuperficiem in puncto M tangentis, ſic ratiocinandum erit. Si ſuperficies ſecetur plano quocunque per punctum M tranſeunte, ſectionis inde ortae tangens in puncto M erit in plano tangente. Si itaque duarum ejusmodi ſectionum tangentes in puncto M repertae ſint, planum earum tangentium erit ipſum planum tangens, quod quaeritur. Ergo ſecetur ſuperficies per punctum M plano per normalem MQ tranſeunte atque ad rectas PQ, AB, normali; erit idem hoc planum ad planum APQ normale, et interſectio QS ipſi AP parallela. Deinde alio plano pariter per QM tranſeunte ideoque ad APQ normali fiat interſectio ſecundum rectam QP; erit hoc planum ſecans axi AP normale. Sit curva EM prior interſectio cum data ſuperficie, FM vero altera. Quaeratur tangens MS curvae EM in M axi QS in S occurrens, ita ut QS ſit ſubtangens curvae EM. Tum ſi eodem modo quaeratur tangens MT curvae TM, inventa ſubtangente QT; planum SMT erit planum tangens quaeſitum. Recta igitur ST erit interſectio plani tangentis et plani APQ. Praeterea ſi ex Q ad ST ducatur perpendiculum QR; erit $QR : QM = 1 : tang.$ MRQ, qui eſt angulus, ſub quo planum tangens ad planum APQ inclinatur.

§. 105.

Quodſi per methodum tangentium ſupra explicatum

tam inventae ſint ſubtangentes $QS = s$ et $QT = t$, erit $PT = t - y$. $PX = s - \frac{sy}{t}$, $AX = x + \frac{sy}{t} - s$. Ex his habetur punctum X, in quo recta ST axem AP ſecat. Deinde quia $AXS = TSQ$, erit *tang.* $AXS = \frac{t}{s}$, ex quo poſitio interſectionis plani tangentis in plano APQ reſpectu axis AP innoteſcit. Praeterea habetur $ST = \surd(ss + tt)$, et proinde $QR = \frac{st}{\surd(ss+tt)}$, ex quo concluditur tangens anguli inclinationis plani tangentis ad planum $APQ = \frac{z\surd(ss+tt)}{st}$. Si per punctum M tranſeat MN normalis ad planum tangens; ea quoque ipſae *ſuperficiei in M normalis* eſſe dicitur. Quia haec NM normalis eſt ad MR, ea erit in plano RQM ad planum SNT normali, ideo recta RQ producta, eidem in puncto quodam N occurrit, ut fiat $QN = \frac{zz\surd(ss+tt)}{st}$. Ex puncto N, quod erit in plano APQ ducatur perpendicularis NV ad axem AP, ſecans rectam SQ productam in W; erit angulus $QNV = QST$ et $PV = QW = \frac{zz}{s}$, et $NW = \frac{zz}{t}$. Proinde ſi ex his formulis definiatur poſitio puncti N in plano APQ; erit NM ad ſuperficiem normalis.

§. 106.

Si data ſit curva Mm duplicis curvaturae, ejusque
F. 348. tangens quaeratur in dato puncto M; ope projectionis curvae in ſubjecto plano res perfici poteſt. Vocatis enim coordinatis orthogonalibus $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, ponamus curvam Qq, eſſe ipſius Mm projectionem in plano APQ. Creſcat AP differentia ſua

$Pp = \Delta x$; coordinata PQ creſcet differentia ſua $rq = \Delta y$, atque z differentia $Rm = \Delta z$. Quia MQ et mq ſunt parallelae hae rectae erunt in eodem plano. Proinde ſi ducatur recta rQq ſecans projectionem in punctis Q et q, atque praeterea recta SMm ſecans curvam datam in M et m; ambae ſecantes in eodem erunt plano, atque in puncto quodam S concurrent. Erit itaque Ps ſubſecans projectionis, atque QS dicetur ſubſecans curvae Mm. Eſt itaque $Ps = y\frac{\Delta x}{\Delta y}$; atque ob analogiam $Rm : RM = MQ : QS$, vel $\Delta z : \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = z : QS$, erit recta $QS = \frac{z\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta z} = z\Delta x\sqrt{(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2})} : \Delta z$. Evaneſcente Δx, quando Qr abit in tangentem Qt, et Ps in ſubtangentem $Pt = y\frac{dx}{dy}$; recta ſecans MS cadit in tangentem MT, atque ſubſecans QS evadit *Subtangens* QT $= z dx\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})} : dz$, vel $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz}$. Fit itaque $\frac{dy}{dx} = tang.\, QtP$; atque ob $QT : QM = 1 : tang.\, MTQ$, invenitur $tang.\, MTQ = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Ex his quoque via patet ad inveniendam longitudinem arcus dati curvae Mm per calculum integralem. Eſt enim recta $Mm = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)} = \Delta x\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}\right)}$ quae evaneſcente differentia Δx et ab ea pendentibus Δy et Δz cum arcu ipſius evaneſcit in ratione aequalitatis, ita ut vocato arcu $Mm = \Delta s$ fiat $\frac{ds}{dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}} = 1$,

$=1$, et proinde $\frac{ds}{dx}=\sqrt{}(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2})$. Ergo $s=\int dx\sqrt{}(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2})$, vel $ds=\int\sqrt{}(dx^2+dy^2+dz^2)$.

§. 107.

F.350. Solidum *cubare* eſt rationem ſolidi ad datum cubum pro unitate aſſumtum numero exprimere, ſive ſolidum menſurare. Solidi rotundi, revolutione curvae AM circa axem AP geniti menſura ſic invenitur. Si $AP=x$ creſcat differentia ſua $Pp=\Delta x$, atque in punctis P et p excitentur applicatae orthogonales $PM=y$, pm, ducta MR ipſi AP parallela, erit $Rm=\Delta y$, $MR=\Delta x$. Sed revoluta ſic curva rectangulum PMRp deſcribit cylindrum, cujus menſura habetur ex §. 25. *Cor. I. Calc. Ext.* Sit enim ratio radii ad peripheriam $=r:p$, erit peripheria circuli radio PM deſcripti $=\frac{py}{r}$, quae multiplicata per dimidium radii $=\frac{1}{2}y$ dat hujus circuli aream $=\frac{py^2}{2r}$. Hac iterum ducta in altitudinem cylindri habetur ſoliditas ipſius $=\frac{py^2}{2r}\Delta x$. Jam iſte cylindrus minor quidem eſt ſolido revolutione figurae PMmp genito; ſed differentia horum ſolidorum minuitur decreſcente Δx, et evaneſcit evaneſcente Δx. Unde patet ea ſolida evaneſcere in ratione aequalitatis, ita ut ſolido ex figurae APM revolutione genito littera S denotato ſit $\frac{dS}{\frac{py^2}{2r}dx}=1$, atque $\frac{dS}{dx}=\frac{py^2}{2r}$, unde erit ipſum ſolidum $S=\int\frac{py^2}{2r}dx$.

§. 108.

Sit curva AM circulus, ut ſolidum S fiat ſphaera; eri

erit $yy = 2rx - xx$, unde $\frac{pyydx}{2r} = pxdx - \frac{pxxdx}{2r}$, et $\int\frac{py^2dx}{2r} = \frac{1}{2}px^2 - \frac{px^3}{6r}$, ex qua formula habetur cubatura indefinita ſegmenti ſphærici, cujus diameter $2r$ et altitudo $= x$. Quodſi itaque ponatur $x = 2r$, invenitur ſphaerae integrae menſura $= 2pr^2 - 8\frac{pr^3}{6r} = 2pr^2 - \frac{4}{3}pr^2 = \frac{2}{3}pr^2$, quae eadem eſt cum menſura ſqhaerae §. 25. *Cor.* 5. *Calc. Ext.* inventa. Quia etiam $\frac{2}{3}pr^2 = 2rp.\frac{1}{3}r$; ſphaera aequalis erit pyramidi, cujus baſis aequalis eſt rectangulo ex diametro ſphaerae in peripheriam circuli maximi, id eſt ſphaerae ſuperficiei (§. 21. *Cor.* 7. *Calc. Ext.*) et altitudo radio ſphaerae.

§. 109.

Sit AM ellipſis, ut fiat ſpæroides ellipticum. Poſita axe ellipſeos $= a$ et parametro $= b$, erit $yy = bx - \frac{bxx}{a}$, proinde $\frac{pyydx}{2r} = \frac{pbxdx}{2r} - \frac{pbx^2dx}{2ar}$, et $\int\frac{pyydx}{2r} = \frac{pbx^2}{4r} - \frac{pbx^3}{6ar}$. Poſita itaque $x = a$, ſoliditas integri ſphæroidis habetur $= \frac{pbaa}{4r} - \frac{pba^3}{6ar} = \frac{pbaa}{4r} - \frac{pbaa}{6r} = \frac{6pba^2 - 4pba^2}{24r} = \frac{pba^2}{12r}$. Si $2r$ ſit axi conjugato aequalis, erit $4r^2 = ab$; ergo eſt $S = \frac{4par^2}{12r} = \frac{1}{3}par$, atque ſpæroides ellipticum æquale eſt cono, cujus altitudo axi majori a, baſis vero duplo circuli axe minore deſcripti æquatur. Praeterea quia cylindri circumſcripti altitudo $= a$, diameter $= 2r$, et ideo ſoliditas $= \frac{1}{2}apr$; erit ſpæroides ellipticum ad cylindrum circumſcriptum, ut $\frac{1}{3}apr$ ad $\frac{1}{2}apr$, id eſt ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, ſeu uti 2 ad 3.

Porro ſi diameter ſphæræ $= a$, erit peripheria circuli maximi $= \frac{ap}{2r}$, et ſphæra $= \frac{a^3p}{12r}$. Ergo eſt ſphæroides ellipticum ad ſphæram, cujus diameter eſt axis major, ut $\frac{1}{3}apr$ ad $\frac{a^3p}{12r}$, id eſt, dividendo per $\frac{1}{3}ap$, ut r ad $\frac{a^2}{4r}$, ſive ut $4r^2$ ad aa, vel ut quadratum axis minoris ad quadratum majoris. Si vero diameter ſphæræ $= 2r$, erit ſoliditas $= \frac{1}{2}pr^2$; unde ſphæroides ellipticum ad ſphæram, cujus diameter eſt axis minor, ut $\frac{1}{3}par$ ad $\frac{1}{2}pr^2$, id eſt ut a ad $2r$, ſive ut axis major ad minorem. Quæ hic de ſphæroide oblongo ſunt demonſtrata mutatis mutandis ad ſphæroides compreſſum facile applicantur.

§. 110.

Sit curva AM parabola et ſolidum S conoides parabolicum, erit $yy = x$, ſi in compendium calculi ponatur parameter $= 1$. Ergo $\frac{pyydx}{2r} = \frac{pxdx}{2r}$, et $\int\frac{pyydx}{2r} = \frac{px^2}{4r}$. Sit altitudo conoidis $= a$, diameter baſeos $= 2r$, erit ipſa baſis $= \frac{1}{2}pr$, itaque ſi a pro x ſubſtituatur invenitur ſoliditas conoidis $= \frac{pa^2}{4r} = \frac{praa}{4rr}$. Sed $\frac{a}{rr} = 1$, ideo ſoliditas conoidis $= \frac{1}{4}pra = \frac{1}{2}pr.\frac{1}{2}a$. Baſis itaque ducenda eſt in dimidiam altitudinem, atque ipſum conoides parabolicum eſt dimidium cylindri ejusdem baſis et altitudinis.

Si AM eſt hyperbola, ut ſolidum S fiat conoides hyperbolicum; erit $yy = bx + \frac{bxx}{n}$, ſi b parametrum et n latus tranſverſum denotat: eſt itaque $\int\frac{pyydx}{2r} = \frac{pbx^2}{}$

$\frac{pbx^2}{4r} + \frac{pbx^3}{6r}$, et pro hyperbola æquilatera $\int \frac{pyydx}{2r}$
$= \frac{apxx}{4r} + \frac{px^3}{6r}$. Quare ſi altitudo conoidis eſt axi
transverſo æqualis; in priori caſu habetur $\frac{pbaa}{4r} + \frac{pba^3}{6ar}$
$= \frac{6pba^2 + 4pba^2}{24r} = \frac{10pba^2}{24r} = \frac{5pba^2}{12r}$, et in caſu
altero $S = \frac{5pa^3}{12r}$.

§. III.

Formula generalis pro dimetiendis ſuperficiebus ſolidorum rotundorum ſimilibus invenitur ratiociniis. Creſcente $AP = x$ differentia ſua $Pp = \Delta x$, ſi ductae ſint applicatae orthogonales PM, pm, curvæ AM, atque MR axi AP parallela, chorda Mm, ſi figura circa axem AP revolvatur, deſcribit ſuperficiem coni recti truncati, quæ ſuperficies erit æqualis circulo, cujus radius eſt medius proportionalis inter $PM + pm$ et Mm (§. 356. *Geom. Elem.*). Ergo hæc ſuperficies $= \frac{p(2y + \Delta y)\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{2r}$ F. 350.
$= \frac{p(2y + \Delta y)\Delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}}{2r}$, ſi ratio radii ad peripheriam $= r:p$. Eadem ſuperficies minor erit ſuperficiei ab arcu Mm deſcripta, quae erit $= \Delta S$, ſi ſuperficies arcu AM deſcripta ſit $= S$. Decreſcente Δx ambæ ſuperficies decreſcunt, earumque differentia, quæ evaneſcit, ipſis ſuperficieb. evaneſcentibus; et proinde ratio, quacum evaneſcunt, eſt ratio æqualitatis, ita ut fiat $\frac{2rdS}{p(2y + dy)dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = 1$, atque

$\frac{dS}{dx}$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{p(2y+dy)\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{2r} = \frac{py\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{r}.$$ Ergo S

$$= \int \frac{pydx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{r} = \int \frac{py\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{r}.$$

§. 112.

Si curva AM fuerit circulus, cujus diameter in compendium calculi poſita ſit $= 1$, habetur ſuperficies ſegmenti ſphærae, cujus altitudo eſt x, aequalis integrali $\int pdx = px$. Quare ſi $x = 1$, erit ſuperficies ſphærae integrae $= 1.\, p$, ut §. 360. *Geom. Elem.* jam inventa eſt. Eſt itaque ſuperficies ſegmenti ſphaerae ad ſuperficiem ſphaerae integram, ut px ad $p.\, 1$, id eſt, ut altitudo ſegmenti ad diametrum ſphærae.

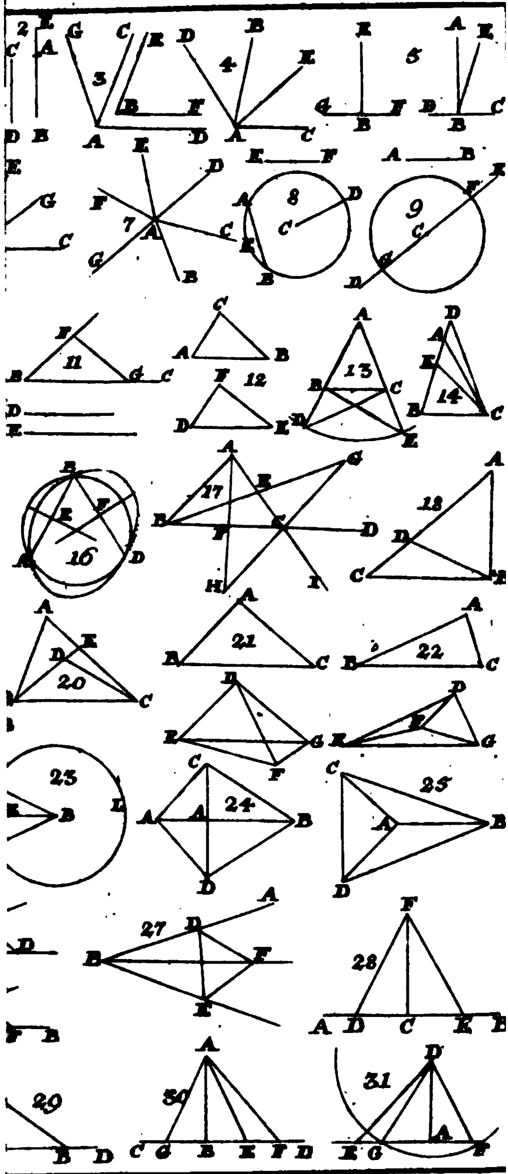
Curva AM exiſtente parabola, cujus parameter eſt a, ut ſit $yy = ax$, et $2ydy = adx$; unde $dx^2 = \frac{4yydy^2}{a^2}$, et $\frac{py\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{r} = \frac{py\sqrt{(4yydy^2+aady^2)}}{ar} =$ $\frac{pydy\sqrt{(4yy+aa)}}{ar}$. Poſito $\sqrt{(4yy+aa)} = u$, erit $4yy + aa = uu$, $8ydy = udu$, $ydy = \frac{1}{8} udu$. Ergo $\frac{pydy\sqrt{(4yy+aa)}}{ar} = \frac{puudu}{4ar}$, et $\int \frac{pydy\sqrt{(4yy+aa)}}{ar}$ $= \frac{pu^3}{12ar} = \frac{(4pyy+paa)\sqrt{(4yy+aa)}}{12ar}$. Huic integrali addenda eſt conſtans ex eo determinanda, quod poſito $y = 0$, fiat integrale quæſitum $= 0$. Ergo ſuperficies quæſita $= \frac{(4pyy+paa)\sqrt{(4yy+aa)}}{12ar} - \frac{paa}{12r}$. Eodem modo invenitur menſura ſuperficiei ſphæroidis elliptici vel conoidis hyperbolici, vel alius cujuscunque ſolidi ex genere tornatorum.

EMENDANDA.

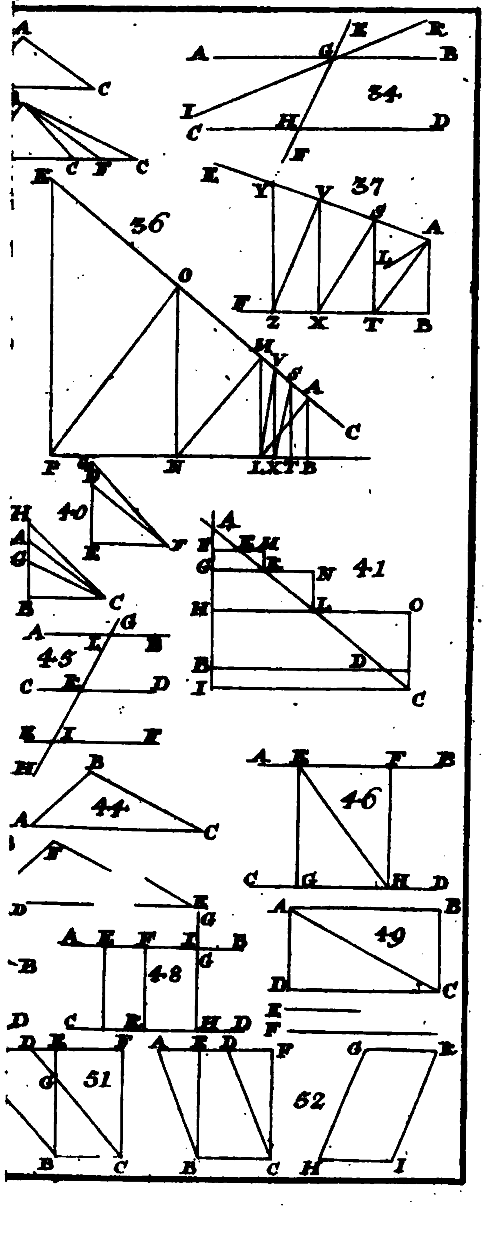
Pag. 8. lin. 4. BD. *leg.* BC, lin. 28. et 29. EAM *leg.* DAM. Pag. 14. lin. 2. a fin. Cor. 2. *leg.* Cor. 3, p. 15. lin. 4. a fin. §. 52. *l.* 51. Pag. 24. lin. 15, AB, *l.* AD, p. 27. lin. 14. AF *l.* AE. Pag. 31. lin. 5. D *l.* CD. Pag. 35. lin. 9. S. *l.* V. Pag. 41. lin. 21. in atque *l.* in G, atque. Pag. 45. lin. 4. in marg. *l.* F. 46. Pag. 46. lin. 16. p. 47. lin. 25, et p. 48. lin. 14. §. 105. *l.* 107. Pag. 48. lin. 19. et 33. §. 112. *l.* 114. Pag. 50. lin. 11. ABC. *l.* ABD. Pag. 54. lin. 15. in marg. *l.* F. 67. lin. 31. CE *l.* GE et GF *l.* GE. Pag. 56. lin. 20. A *l.* B. Pag. 58. in marg. F. 53. *l.* 15. Pag. 59. lin. penult. DE *l.* DF. Pag. 60. lin. 24. AD *l.* AE. Pag. 61. lin. antepen. in marg. *l.* F. 72. Pag. 63. ad §. 153. in Fig. æn. 76. loco G *l.* F. et G. loco J. Pag. 69. lin. 7. A *l.* C. lin. 11. KL, LM, MH, *l.* KM, OM, OH. lin. 13. OR, *l.* QR. Pag. 70. lin. 4. in marg. *l.* F. 80. Pag. 76. lin. 3. *l.* et ex æquo. Pag. 77. lin. 23. A *l.* B. Pag. 81. lin. 1. F. 88. *l.* 89. Pag. 84. lin. 11. §. 181. *l.* 178. Pag. 99. lin. 9. Sect. II. *l.* VIII. Pag. 135. lin. 8. in marg. *l.* F. 135. Pag. 162. lin. 4. a fin. LM. *l.* LN. Pag. 246. in marg. F. 153. *l.* 351. Pag. 251. in marg. F. 156. *l.* 352. Pag. 253. lin. 9. in marg. *l.* F. 208. Pag. 254. lin. 7. in marg. *l.* F. 205. lin. pen. in marg. F. 159. *l.* 209. Pag. 160. lin. 17. IK *l.* SK. Pag. 162. lin. 32. LM *l.* LN. Pag. 256. lin. 17. in marg. *l.* F. 210. Pag. 272. lin. 5. §. 70. *l.* 10. Pag. 279. lin. 15. *l.* a quanto ſubtrahendo quantum. Pag. 345. lin. 15. et 18. $y = ax$ *l.* $y = a$. Pag. 361. *del.* prima linea verticalis I. $a + d +$. Pag. 363. lin. 11. B *l.* β. Pag. 365. lin. 16. nimirum *l.* minimum. Pag. 366. l. 20. et 21. $\frac{b}{m}$ *l.* $\frac{b}{n}$ lin. ult. $\frac{\alpha}{m}$ *l.* $\frac{\beta}{m}$. Pag. 372. lin. 12. $\varphi x^{m-n}t_1$ *l.* $\psi x^{m-n}t_1 + \varphi x^{m-n}$. Pag. 375. lin. 2. contrariis *add.* pro n impari lin. 5. nt_1 *l.* rt_1, lin. 6. n. *l.* r. P. 411. lin. 15. $\frac{bx\text{AP}}{\infty}$ *l.* $\frac{b.\text{AP}}{\infty}$. Pag. 424. lin. 20. $(y+1)q$ *l.* $(\alpha+1)q$. P. 433. l. 2. *l.* $\frac{2S}{d}$; nn—. lin. 3. $(2d+2V)^2$

$2V)^2$ *l.* $(d+2V)^2$. P. 442. l. 1. 7. 28. ACB *l.* AMB. lin. 12. D *l.* C, et AD *l.* AC. lin. 14. AE *l.* AC. lin. 29. FC *l.* FG, H *l.* M. K, *l.* *m.* lin. 31. AHB *l.* AMB, AKB *l.* ... Pag. 445. lin. 5. I *l.* P. lin. 8. §. 120. *l.* 63. lin. 10. et penult. F. 10. *l.* 235. lin. 12. F. 11. *l.* 236. lin. 14. F. 12. *l.* 237. Pag. 446. lin. 9. in marg. *l.* F. 238. Pag. 448. lin. 15. GPI. GPI. Pag. 453. lin. 14. $r - \frac{1}{2}pa$ *l.* $r + \frac{1}{2}pa$ ad *l.* inter, tertia *l.* media. Pag. 454. lin. 5. *2a* *l.* *aa* lin. 7. $(aa - ba)$ *l.* $(aa - bb)$ lin. 10. M *l.* fM. Pag. 459. lin. 22. F. 144. *l.* 244 Pag. 460. lin. 22. Dc. *l.* DO, Bc *l.* BC. Pag. 464. lin. 12 CRc *l.* CGc. Pag. 466. lin. 23. $\frac{ax}{C}$ *l.* $\frac{ax}{c}$. Pag. 467. lin. 12. AH *l.* KH. Pag. 470. lin. 24. F. 522. *l.* 252. lin. 30. AD *l.* Ad. Pag. 471. lin. 5. δa^2 *l.* δa^2, lin. 8. *δa* *l.* *δa*. Pag. 474. lin. 17. $ax - y$ *l.* $ax + y$. Pag. 475. $+ p$ *l.* $+ pm$. lin. ult. MK *l.* NK. Pag. 476. lin. 1. mk *l.* nk. Pag. 477. lin. 19. et 23. quia ſignum — integræ fractioni præpoſitum eſt legi debet $+ \mu\gamma + \nu\beta$. Pag. 478. lin. 12 $-\gamma^3$ *l.* $-\gamma a$. Pag. 479. lin. 7. $2axy\zeta + \gamma\zeta\zeta -$, *l.* $2ax\,y + \gamma\gamma$. lin. 8. $aaxx$, *l.* $axx\gamma$, et $\gamma\zeta\zeta$ *l.* $\gamma\gamma\zeta$. Pag. 481. lin. 7. EP *l.* CP. Pag. 483. lin. 4. $(\mu n - \nu m)$ *l.* $(\mu n - \nu m)u$. lin. 12. = *l.* +, lin. ult. $2\gamma m\,(\mu n - \nu m)t$, *l.* $2\gamma m\,(\mu n - \nu m)tu$. Pag. 484. lin. 9. $t\varphi -$ *l.* $t\varphi =$, init. lin. 15. — *l.* +. Pag. 485. lin. 2. γn *l.* γm. Pag. 512. loco r lin. 6. *l.* r^2, lin. 7. *l.* $(cos\ z \pm ſin\ z.\, r - r)^3 : r^3$ lin. 9. et 11. r^n et lin. 12. r^n r^{n+1} loco r, lin. 14. $(cos.\ z \pm ſin\ r - 1)^n : r^n$. Pag. 4 Præf. leguntur verba. Scriptum -- nequeat, quae pag. 10 poſt verbum: eripiunt, legi debuiſſent. Ead. pag. 4. acerrimam *l.* acerrimum.

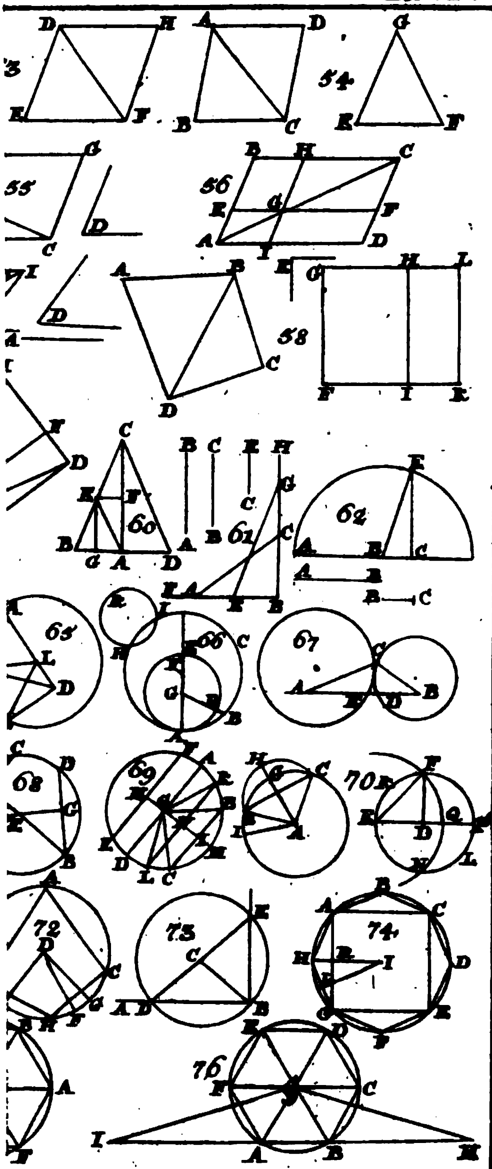
Tab. I.



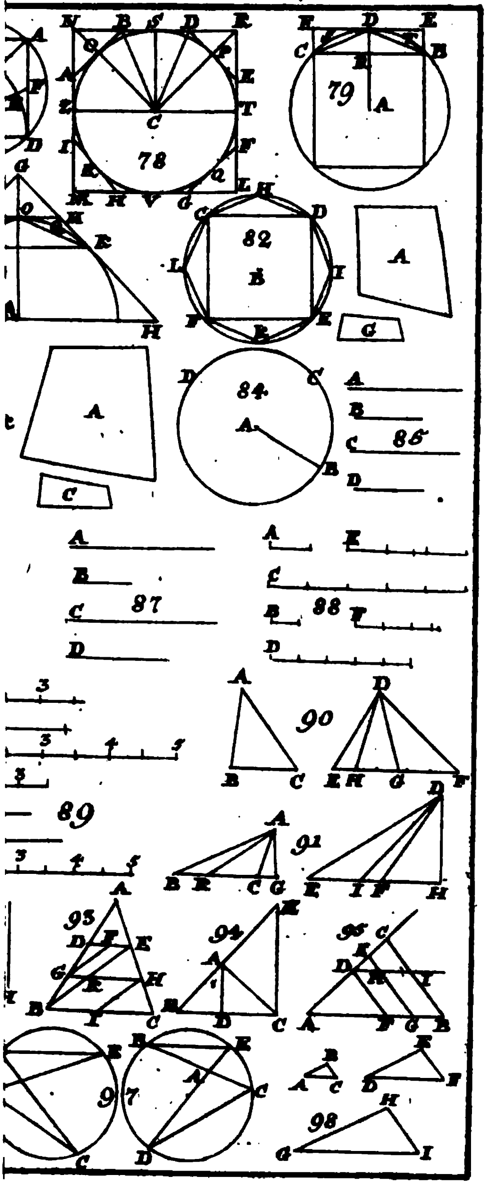
Tab. II.



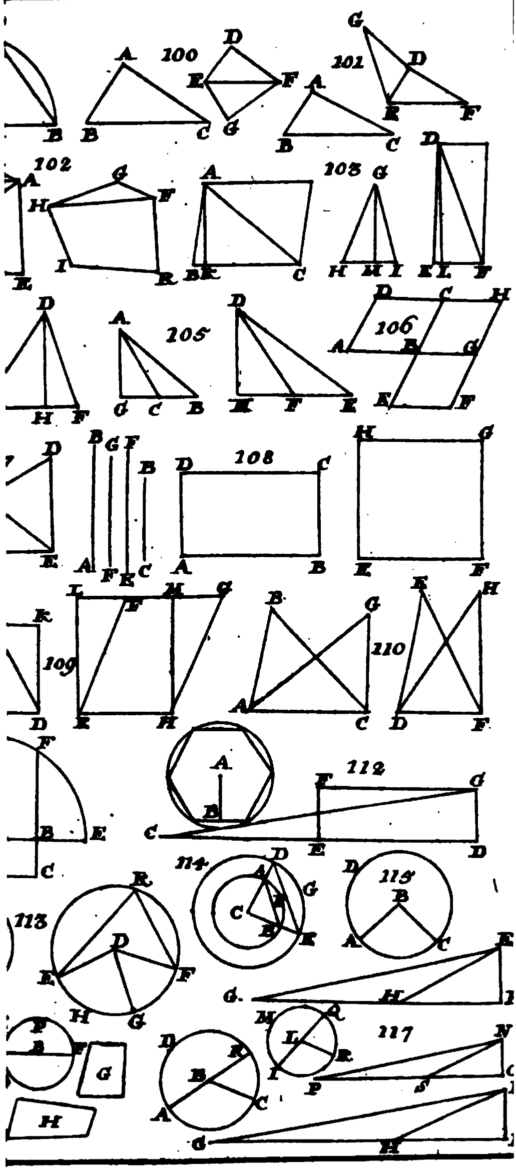
Tab. III.



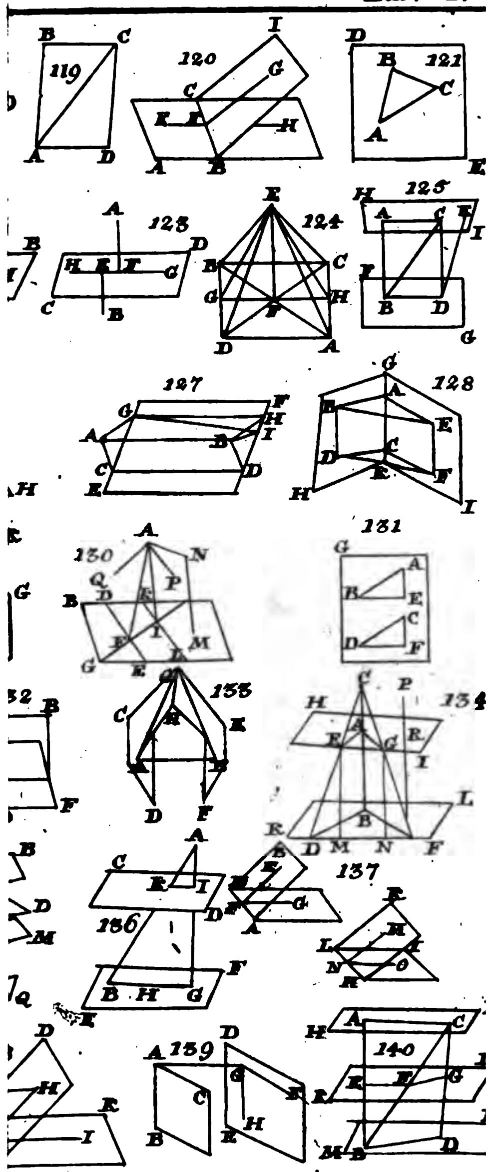
Tab. IV.



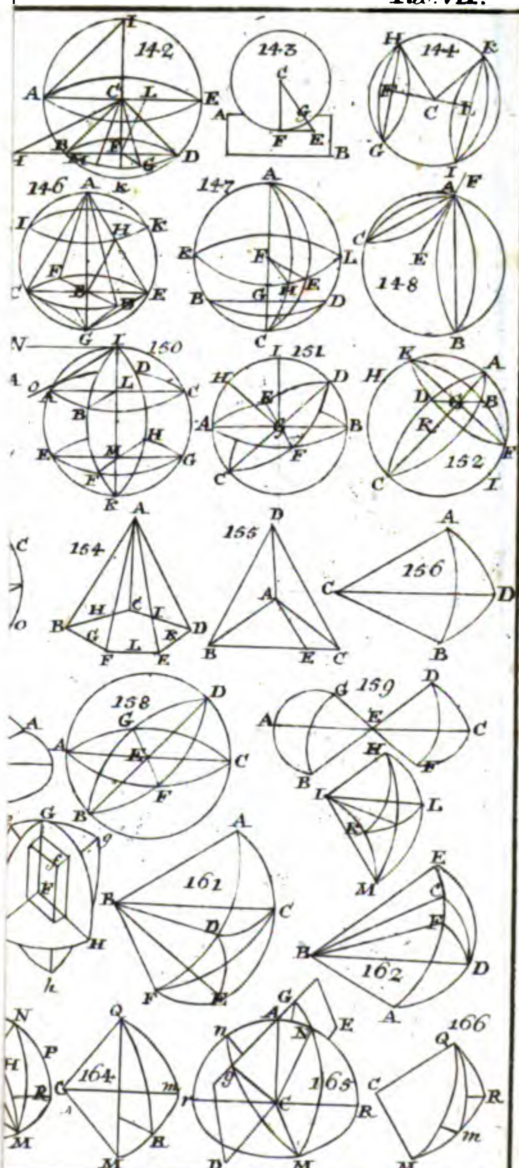
Tab. V.



Tab: VI.

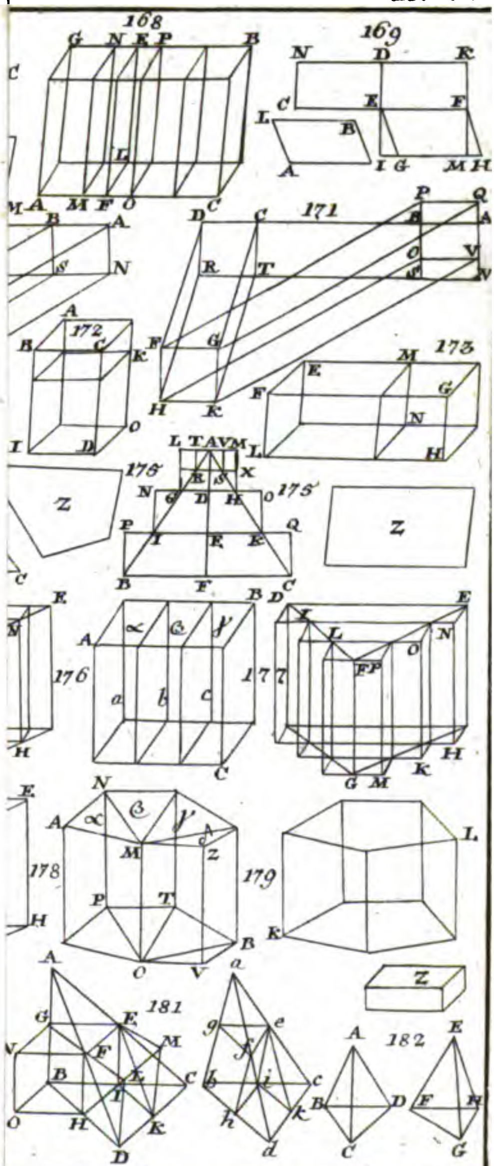


Tab. VII.

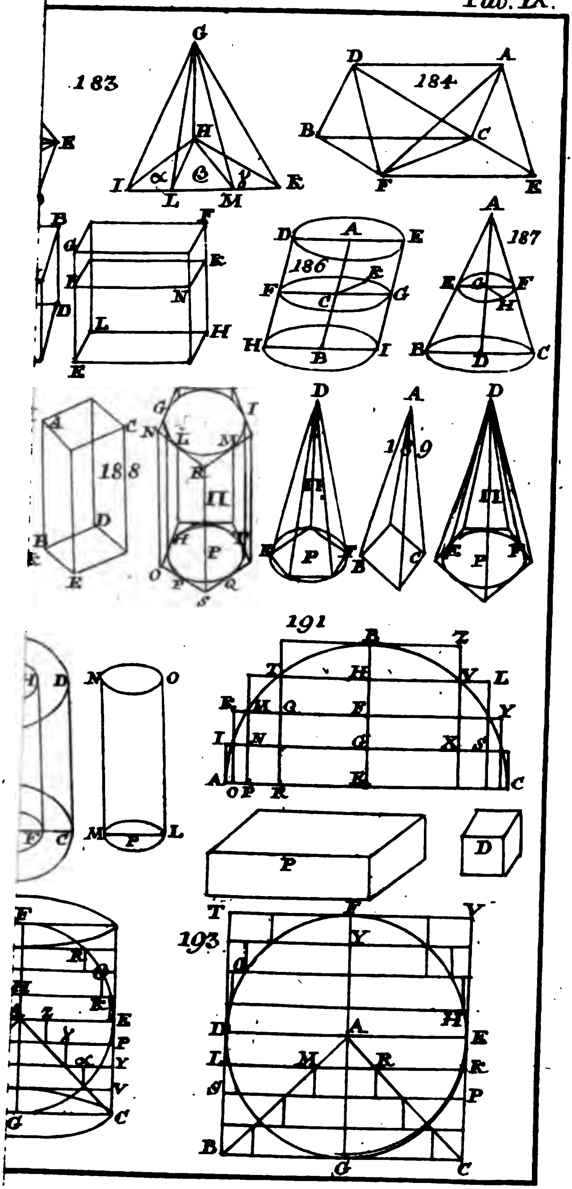


142
143
144
146
147
148
150
151
152
154
155
156
158
159
161
162
164
165
166

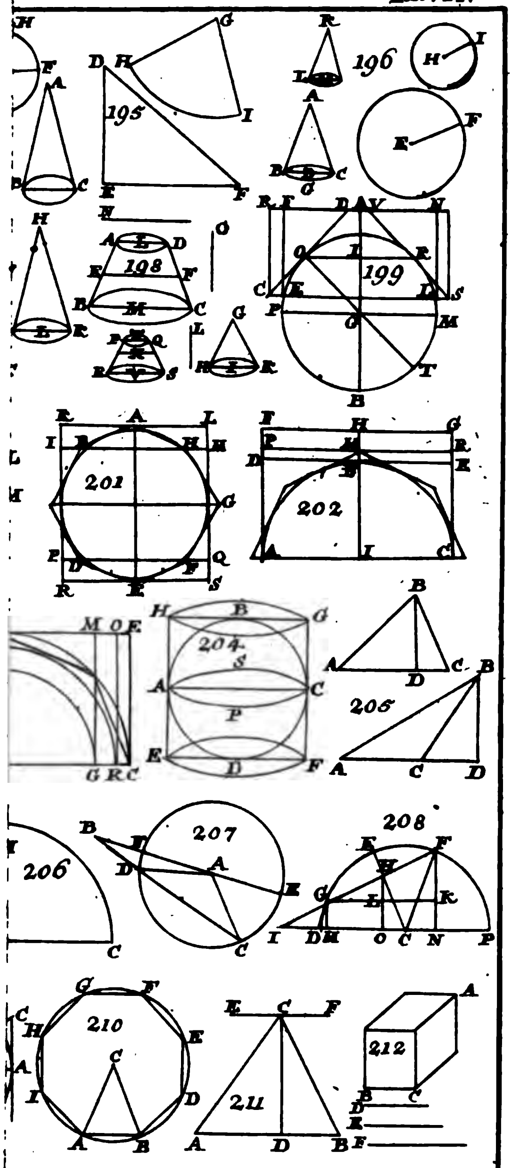
Tab: VIII.



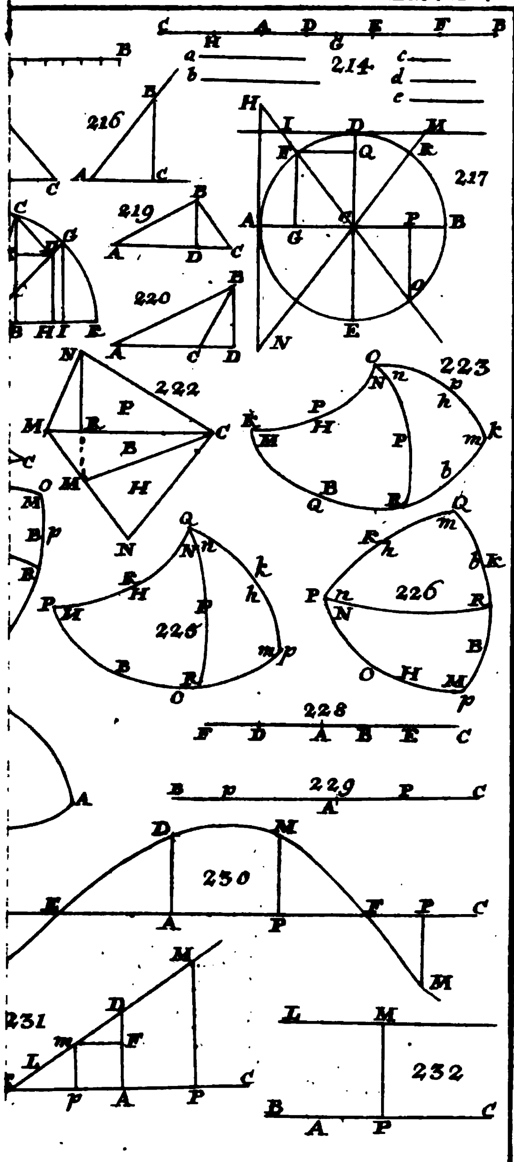
Tab. IX.

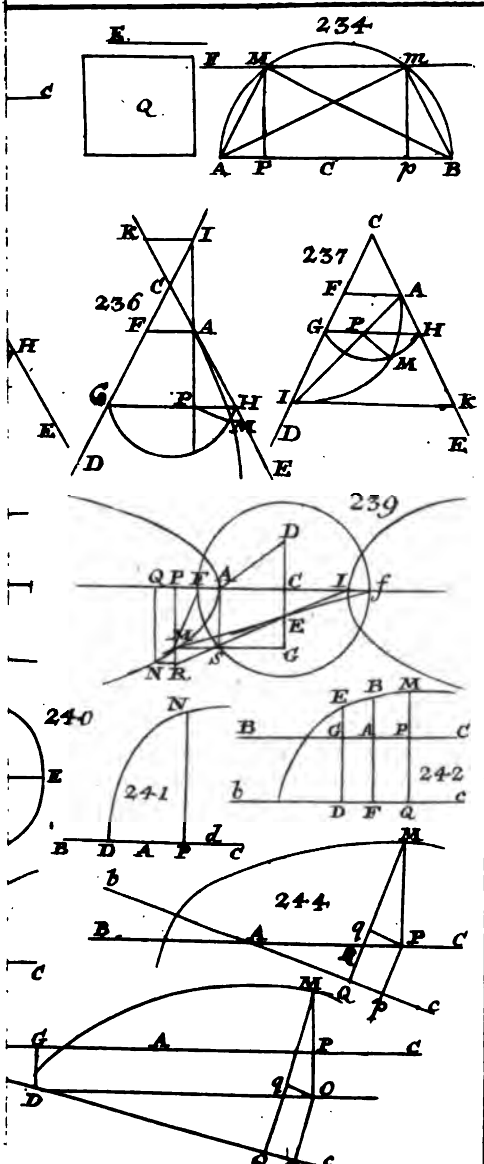


Tab. X.

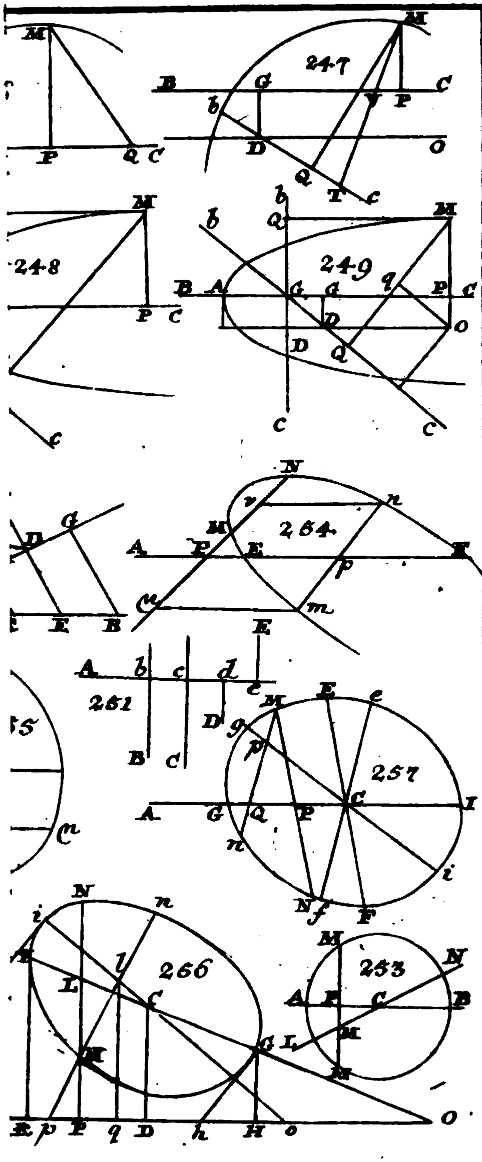


Tab: XI.

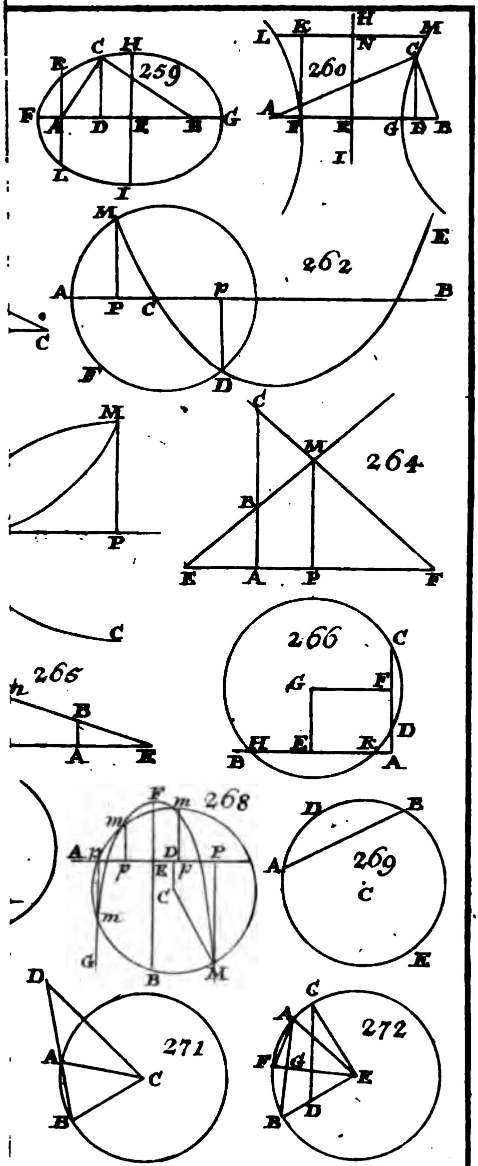



234
E
Q
F M m
A P C p B
236
K I
C
F A
G P H
M
D E
237
C
F A
G P H
M
I K
D E
H
E
239
D
Q P F A C I f
E
M
N R S G
240
E
241
N
B D A P d C
242
E B M
B G A P C
b c
D F Q
244
M
b
B A q P C
Q p c
C
M
G A P C
q O
D
Q c

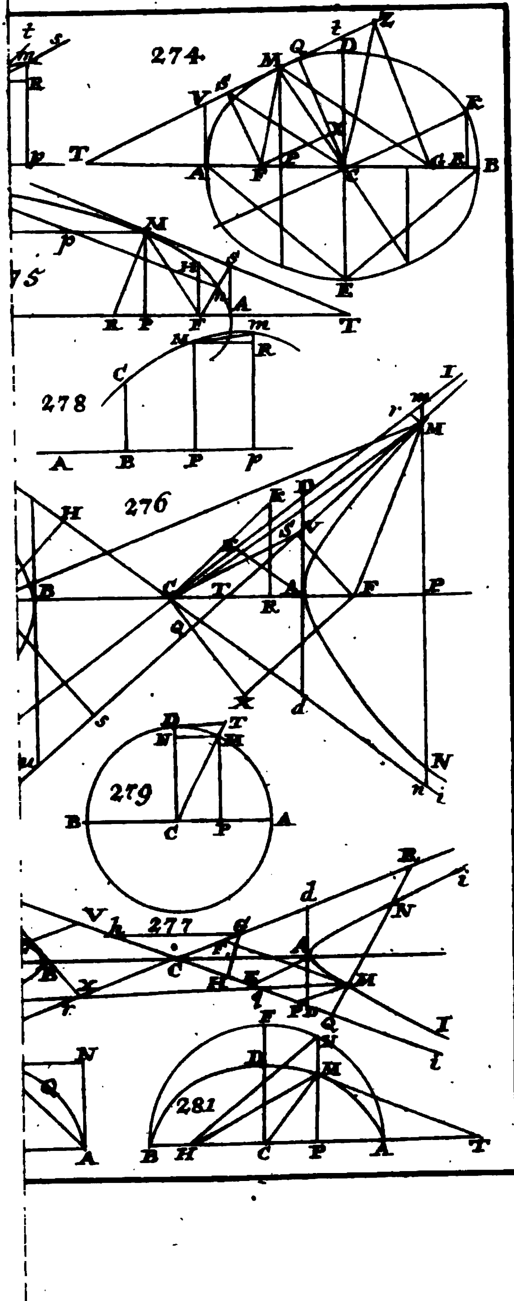
Tab. XIII.



D


259
260
262
264
265
266
268
269
271
272

Tab. XV.



Tab. XVI.

